

Esercizi sulle serie di potenze

Esercizio 1 Determinare il raggio e l'insieme di convergenza di ciascuna delle seguenti serie di potenze.

$$(a) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k+2}{(2k+2)!} (x-3)^k, \quad (b) \sum_{k=0}^{+\infty} k! (x-1)^k,$$

$$(c) \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k-2 \log_2 k} x^k, \quad (d) \sum_{k=1}^{+\infty} (k+6)^2 (x+2)^k, \quad (e) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3k-2}{k+1} \right)^k x^k.$$

Esercizio 2 Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie dopo averle ricondotte alla forma canonica $\sum_k a_k (y-y_0)^k$ con un opportuno cambio di variabile.

$$(a) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2+1} (2x-1)^{2k+1}, \quad (b) \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+2} \frac{k^2+1}{(k+3)6^{k+1}} (x-2)^{k-1},$$

$$(c) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k^{-2} (x^2-2)^k}{2^k}, \quad (d) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{3k+1}}{8^{\frac{k}{2}} (k^5+1)}, \quad (e) \sum_{k=0}^{+\infty} (k+6)^2 (\sin x)^k.$$