Esercizio 1

In forma parametrica il vincolo G è descritto da:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

La restrizione di f a G ha dunque la forma

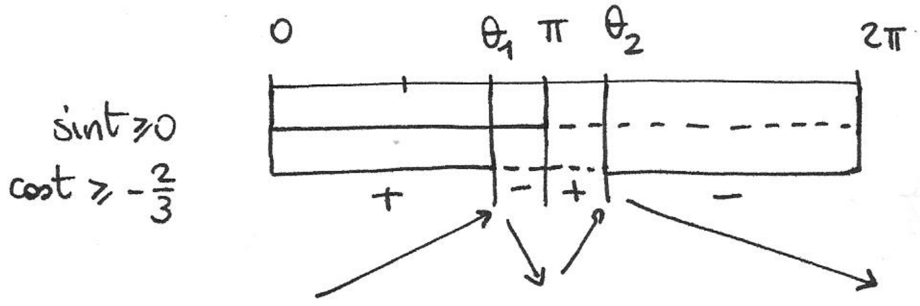
$$h(t) = e^{-(1+2\cos t)^2 - \sin^2 t}$$

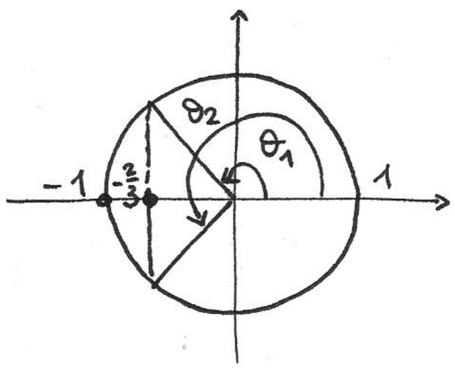
$$h'(t) = e^{-(1+2\cos t)^2 - \sin^2 t}\left[-2(1+2\cos t)(-2\sin t) - 2\sin t \cos t\right]$$

$$= e^{\cdots}\left[-2\sin t\,(-2 - 4\cos t + \cos t)\right]$$

$$= e^{\cdots}\left[-2\sin t\,(-2 - 3\cos t)\right]$$

$$h' \geq 0 \iff \sin t\,(2 + 3\cos t) \geq 0$$




$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = -\frac{2}{3}$$

$$\sin\theta_1 = \sqrt{1 - \cos^2\theta_1} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin\theta_2 = -\sin\theta_1 = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$h(0) = h(2\pi) = e^{-9}$

$h(\pi) = e^{-1}$

$h(\theta_1) = h(\theta_2) = e^{-\frac{2}{3}}$

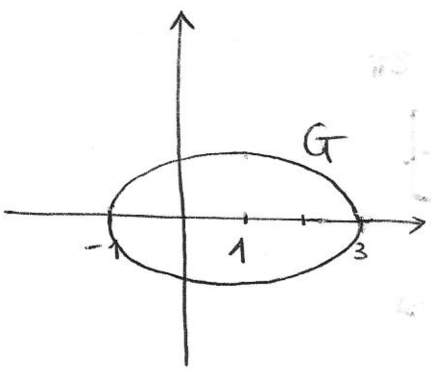
Quindi $\quad \max\limits_{G} f = e^{-\frac{2}{3}}$ raggiunto in $P_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

$P_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

$\min\limits_{G} f = e^{-9}$ raggiunto in $P_3(3,0)$

Oppure, si poteva usare l'eq. del vincolo nella forma $\quad y^2 = \dfrac{4-(x-1)^2}{4}$

e studiare max e min di $g(x) = e^{-x^2-1+\frac{(x-1)^2}{4}}$ con $x \in [-1,3]$.



## Esercizio 2

Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0=0$.

Con il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e^{\frac{n+1}{2n+3}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n+1}{(2n+3)n}} = 1$$

$\Rightarrow \quad R = 1$

$x=1$ : $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{\frac{n+1}{n+3}}$

$x=-1$ : $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\frac{n+1}{2n+3}}$

In entrambi gli estremi il termine generale della serie ottenuta non è infinitesimo. Quindi la serie non converge perché non è soddisfatta la C.N. di convergenza.

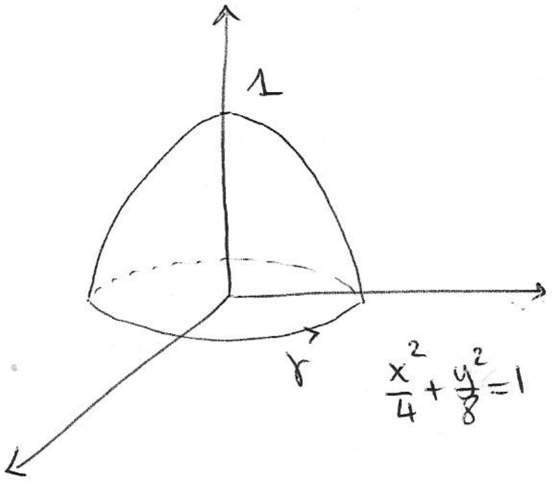
$\Rightarrow$ insieme di convergenza $(-1, 1)$.

## Esercizio 3

$$\vec{F} = \left(z^2 - y,\; x(1+\sin z),\; x^3 + y^2\right)$$

corretto

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z^2 - y & x(1+\sin z) & x^3 + y^2 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (2y - x\cos z)\,\hat{i} \\ -\hat{j}\,(3x^2 - 2z) \\ +\hat{k}\,(1 + \sin z + 1) \end{array}$$




Usando il T. di Stokes il flusso richiesto vale

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{\tau} = \int_0^{2\pi} \left(-2\sqrt{2}\sin t,\ 2\cos t,\ 8\cos^3 t + 8\sin^2 t\right)\cdot \left(-2\sin t,\ 2\sqrt{2}\cos t,\ 0\right)\, dt$$

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sqrt{2}\sin t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\sqrt{2}\, dt = 8\sqrt{2}\pi$$

$\boxed{\text{Esercizio } 4}$

$$\vec{\sigma}(t,\theta) = \left(e^t\cos\theta,\ e^t\sin\theta,\ \theta\right)$$

$$\vec{\sigma}_t = \left(e^t\cos\theta,\ e^t\sin\theta,\ 0\right)$$

$$\vec{\sigma}_\theta = \left(-e^t\sin\theta,\ e^t\cos\theta,\ 1\right)$$

$$\vec{\sigma}_t\times\vec{\sigma}_\theta = \left(e^t\sin\theta,\ -e^t\cos\theta,\ e^{2t}\right)$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{\sigma}_t \times \vec{\sigma}_\theta}{\|\vec{\sigma}_t \times \vec{\sigma}_\theta\|} = \frac{(e^t \sin\theta, -e^t\cos\theta, e^{2t})}{\sqrt{e^{2t}+e^{4t}}}$$

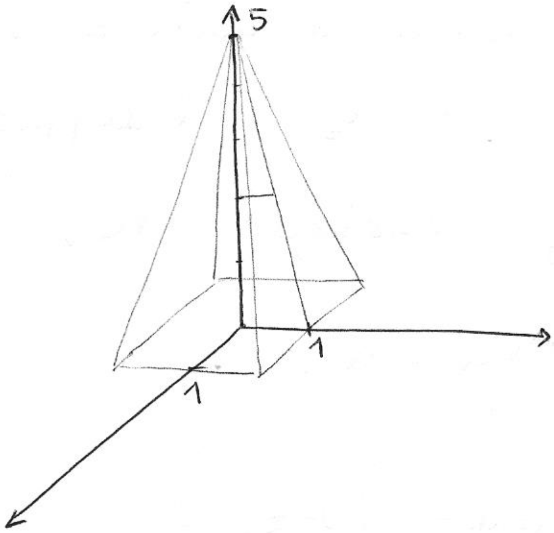
$$dA = \|\vec{\sigma}_t \times \vec{\sigma}_\theta\| dt\, d\theta = e^t\sqrt{1+e^{2t}}\; dt\, d\theta$$

Infine, il flusso di $\vec{F}$ si calcola direttamente (e non con il t. della divergenza!)

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\, dA = \int_0^2\int_0^{3\pi} (e^t\sin\theta, -e^t\cos\theta, \sin\theta)\cdot(e^t\sin\theta, -e^t\cos\theta, e^{2t})$$

$$= \int_0^2\int_0^{3\pi} (e^{2t} + e^{2t}\sin\theta)\, dt\, d\theta = (e^4-1)\left(\frac{3}{2}\pi + 1\right)$$

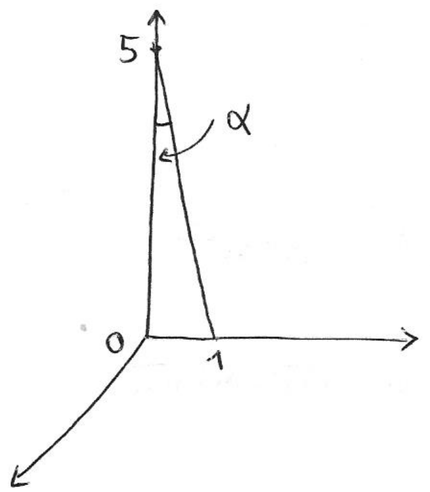
Esercizio 5




$$M = \iiint_V z\, dx\, dy\, dz$$

Integriamo per strati orizzontali. Ogni strato è un quadrato di lato $l_z$ da determinare.

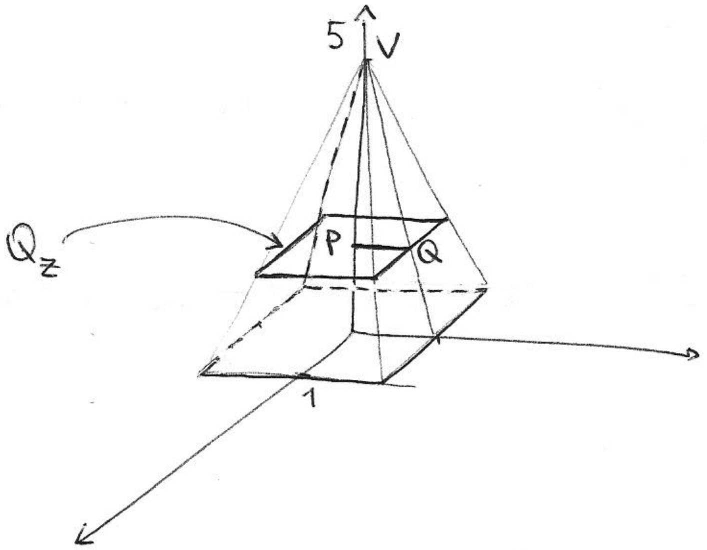
Consideriamo il triangolo di vertici $O$, $(0,0,5)$ e $(0,1,0)$




Dai teoremi sui triangoli rettangoli

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$$

Quindi:




Tagliando con un piano orizzontale a quota $z$ si ottiene un quadrato $Q_z$ il cui lato $\ell_z$ è il doppio di $\overline{PQ}$.

$\overline{PQ}$ si ottiene dal triangolo rettangolo $PQV$ sapendo che $\overline{PV} = 5 - z$ e $P\hat{V}Q = \alpha$.

Pertanto

$$\overline{PQ} = \overline{PV}\,\operatorname{tg}\alpha = (5-z)\cdot\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \ell_z = \frac{2}{5}(5-z)$$

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz = \int_0^5 z \int_{Q_z} dx\,dy\,dz = \int_0^5 z\cdot\frac{4}{25}(5-z)^2\,dz = \frac{25}{3}$$

Ora : $\quad x_G = \frac{1}{M}\iiint_V xz\,dxdydz = 0 \qquad$ x simmetria

$\quad y_G = \frac{1}{M}\iiint_V z\,dxdydz = 0 \qquad$ "

e

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_V z^2\,dxdydz = \frac{3}{25}\int_0^5 z^2\,\frac{4}{25}(5-z)^2\,dz = 2$$

Quindi il baricentro è $(0,0,2)$

$\boxed{\text{Esercizio 6}}$

Imponendo che $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ si trova $f'(y) = \operatorname{arctg} y$

Insieme alla condizione $f(0) = -1$ si trova

$$f(y) = y \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2}\log(1+y^2) - 1$$

Il lavoro è nullo in quanto il campo risulta conservativo e la curva è chiusa ($\vec{\gamma}(1) = \vec{\gamma}(-1)$ per la periodicità e la simmetria di sin e cos).