ANALISI NUMERICA, 24/07/2012

1. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1/2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix},$$
   a) si determini per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il metodo di Jacobi converge
   b) posto $a = 2$ e $x_0 = (0,0,0)^\top$, si consideri la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^3$ e si stimi il numero minimo di iterazioni del metodo di Jacobi affinché l'errore relativo soddisfi
$$\frac{\|x - x_k\|_\infty}{\|x\|_\infty} < 2^{-13}.$$

2. Si determini la funzione $f(x) = ae^{bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$ che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i seguenti dati:
$$(-1, e^{-1}), \quad (0, e^3), \quad (1, e^2), \quad (2, e^{-2}).$$

3. Sia $f \in C^4(\mathbb{R})$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$, $f'(\bar{x}) \neq 0$. Si dimostri che se la funzione f ha un flesso nella radice $\bar{x}$, allora il metodo di Newton converge (localmente) con ordine almeno cubico.

4. Si verifichi la disuguaglianza
$$\|v\|_1 \leq \sqrt{n}\|v\|_2,$$
   dove v è un vettore di $\mathbb{R}^n$.
   Si usi tale relazione per determinare le costanti $C_1(n)$ e $C_2(n)$ di equivalenza delle norme di matrici di ordine n
$$C_1(n)\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq C_2(n)\|A\|_2.$$
   Indicato con $\mu_p(A)$ il numero di condizionamento di una matrice A di ordine n, si deduca che
$$\frac{1}{n}\mu_2(A) \leq \mu_1(A) \leq n\mu_2(A).$$