

ANALISI NUMERICA, 10/02/2014

1. Dato il sistema lineare $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ -\beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

si consideri il metodo iterativo di tipo splitting corrispondente alla decomposizione $A = P - N$ con P matrice diagonale di elementi $P_{ii} = 3\alpha$, $i = 1, 2, 3$. Si stabilisca per quali valori di α e β il metodo è convergente.

2. a) Si determini la spline lineare che interpola la funzione

$$f(x) = \sin x$$

nei punti $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$.

Si stimi l'errore commesso sull'intervallo $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$ in norma infinito.

- b) Si calcoli il numero minimo di sottointervalli di uguale ampiezza in cui suddividere l'intervallo $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$ affinché l'errore commesso in norma infinito interpolando la funzione

$$f(x) = \sin x$$

con una spline lineare sia minore di 10^{-2} .

3. Sia $V = \text{span}\{1, e^x\}$. Si determini l'elemento $v \in V$ che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati la funzione $f(x) = x^2$ sull'intervallo $[0, 1]$.

4. Si determini una formula di quadratura a due nodi avente grado di precisione 3 per l'approssimazione del seguente integrale pesato:

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx.$$