

**ANALISI NUMERICA, 13/09/2013**

1. a) Si determini la spline lineare che interpola la funzione

$$f(x) = \cos x$$

nei punti  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \pi$ ,  $x_2 = \frac{3}{2}\pi$ .

Si stimi l'errore commesso sull'intervallo  $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$  in norma infinito.

- b) Si calcoli il numero minimo di sottointervalli di uguale ampiezza in cui suddividere l'intervallo  $[0, 2]$  affinché l'errore commesso in norma infinito interpolando la funzione

$$f(x) = 2e^x$$

con una spline lineare sia minore di  $10^{-2}$ .

2. Si calcoli la retta che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i seguenti dati:

$$(0, -2), \quad (1, 8), \quad (2, 0).$$

3. a) Approssimando l'integrale  $\int_0^1 f(x)dx$  con la formula di Cavalieri-Simpson si ottiene 3, mentre con quella del trapezio composta su due sottointervalli si ottiene 2. Si calcoli quanto vale  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .

- b) Si dimostri che una formula di quadratura a  $n + 1$  nodi  $\{x_0, \dots, x_n\}$  del tipo

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

con grado di precisione  $r \geq n$  è interpolatoria.

4. Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . Si dimostri la seguente disuguaglianza:

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n |a_{kj}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Suggerimento:*

- i)* si utilizzi il fatto che  $A$  ammette la fattorizzazione  $A = QR$  e si tenga conto che non è necessario calcolare esplicitamente i termini di tale decomposizione
- ii)* si stimi  $|r_{jj}|$  ( $j = 1, \dots, n$ ), essendo  $r_{jj}$  un elemento diagonale della matrice  $R$ . Può essere utile ricordare la proprietà del prodotto scalare euclideo:

$$|(v, w)| \leq \|v\|_2 \|w\|_2 \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$