

ANALISI NUMERICA, 21/06/2013

1. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix},$$

si determini per quali valori del parametro reale  $a$  il metodo di Gauss-Seidel converge.

Posto  $a = 2$  e  $x_0 = (0, 0, 0)^T$ , si supponga di applicare 20 iterazioni del metodo di Gauss-Seidel. Si stimi l'errore relativo

$$\frac{\|x - x^{(20)}\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

2. Si consideri il seguente metodo di punto fisso per la ricerca degli zeri di  $f$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{\varphi(x^{(k)})}, \quad \varphi(x) = \frac{f(x + f(x)) - f(x)}{f(x)}.$$

Si dimostri che il metodo ha ordine almeno quadratico.

3. Data la formula di quadratura interpolatoria

$$\int_{-1}^1 |x|f(x)dx \approx \alpha_0 f(-a) + \alpha_1 f(a),$$

- a) si determinino i pesi della formula in funzione del parametro  $a$ .  
b) Si determini il valore di  $a$  che massimizza il grado di precisione della formula e si dica qual è il grado di precisione corrispondente.

4. Siano  $x_0, x_1, \dots, x_n$  punti a due a due distinti dell'asse reale e sia  $\{l_i(x)\}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , la base di Lagrange associata. Calcolare l'espressione del seguente polinomio:

$$\sum_{i=0}^n l_i(x).$$