

ANALISI NUMERICA, 23/07/2013

1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- a) Si studi esistenza ed unicità della fattorizzazione LU in funzione del valore del parametro a .
- b) Si dica per quali valori del parametro a esiste la fattorizzazione di Cholesky.
- c) Posto $a = 0$, si calcoli la fattorizzazione QR di A con il metodo di Householder.
- d) Posto $a = 0$, si consideri la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$ con il metodo di Richardson stazionario non preconditionato ($P = \mathbb{I}_3$). Si calcoli il parametro d'accelerazione ottimale α_{opt} ed il raggio spettrale della corrispondente matrice di iterazione.

2. Si dica per quali punti $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste ed è unico il polinomio $p_3(x)$ di grado 3 tale che

$$p_3(0) = y_1, \quad p_3'(x_0) = y_2, \quad p_3''(x_0) = y_3, \quad p_3'(1) = y_4,$$

comunque scelti $y_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, 4$).

3. Data la funzione $f(x) = x^4 + x$,

- a) si calcoli il polinomio di grado due che interpola f nei nodi $\{0, 2, 3\}$ e si stimi l'errore commesso sull'intervallo $[0, 3]$ in norma infinito
- b) si calcoli il polinomio di grado tre che interpola f nei nodi $\{0, 1, 2, 3\}$.

4. Siano x_0, x_1, \dots, x_n punti a due a due distinti dell'asse reale e sia $f[x_0, \dots, x_n]$ la differenza divisa di Newton corrispondente ad una funzione f definita in un intervallo contenente i suddetti punti. Dimostrare la seguente relazione:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x_i - x_k)}.$$