

Esercizio

1. Dato il sistema lineare $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

lo si risolva con il metodo di Richardson stazionario preconditionato con parametro d'accelerazione ottimale e preconditionatore dato da $P = D$, essendo D la parte diagonale di A .

- a) Si verifichi che $P^{-1}A$ è simmetrica e definita positiva e si calcoli il parametro di accelerazione ottimale α_{opt} .
b) Si calcoli il fattore C di riduzione dell'errore, tale che

$$\|x^{(k+1)} - x\|_A \leq C \|x^{(k)} - x\|_A.$$

- c) Si dimostri la seguente maggiorazione:

$$\|x^{(k)} - x\|_A \leq \frac{C^k}{1 - C} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_A.$$

- d) Posto $x^{(0)} = (0, 0, 0)^\top$, si stimi il numero minimo di iterazioni sufficienti per avere un errore in norma $\|\cdot\|_A$ più piccolo di 10^{-8} .