

Esercizi

1. Si determini la spline lineare che interpola il polinomio

$$p_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$$

nei nodi $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$ e si calcoli l'errore commesso nella norma del massimo.

2. Si calcoli il numero minimo di sottointervalli di uguale ampiezza in cui suddividere l'intervallo $[0, \pi]$ affinché l'errore commesso interpolando con una spline lineare la funzione

$$f(x) = \sin^2(x), \quad x \in [0, 2\pi]$$

sia minore di 10^{-2} .

Si scriva inoltre l'espressione della spline lineare $s_1(x)$ che interpola f in 5 nodi equispaziati sull'intervallo $[0, 2\pi]$ e se ne disegni il grafico.

3. Si verifichi che la funzione $s : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$s(x) = \begin{cases} 3x + 2x^2 - x^3 & x \in [0, 1] \\ 4 + 4(x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3 & x \in (1, 2] \end{cases}$$

è una spline cubica relativa ai nodi $\{0, 1, 2\}$. Si dica se è naturale.

4. Esercizio 3.b, tema d'esame del 13/02/2013.
5. Si dica se esiste ed è unico il polinomio p di grado due che, comunque scelti $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$, verifica le seguenti condizioni:

$$p(0) = y_0, \quad p(1) = y_1, \quad \int_0^1 p(x)dx = y_2.$$