ANALISI NUMERICA, 22/07/2014

1. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$
si consideri il metodo iterativo
$$Px^{(k+1)} - Nx^{(k)} = b,$$
con
$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
per l'approssimazione della soluzione del sistema lineare $Ax = b$.
Si stabilisca per quali valori di α e β il metodo è convergente.
Posto $\alpha = 2$, $\beta = 1$ e $x_0 = (0, 0, 0)^\top$, si supponga di applicare 20 iterazioni del metodo. Si stimi l'errore relativo
$$\frac{\|x - x^{(20)}\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

2. a) Si determini la spline lineare che interpola la funzione
$$f(x) = \cos(x)$$
nei punti $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$.
Si stimi l'errore commesso sull'intervallo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ in norma infinito.
b) Si calcoli il numero minimo di sottointervalli di uguale ampiezza in cui suddividere l'intervallo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ affinché l'errore commesso in norma infinito interpolando la funzione
$$f(x) = \cos(x)$$
con una spline lineare sia minore di 10^{-2}.

3. Si determini la funzione $f(x) = \alpha_0 x^{\alpha_1}$, $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i seguenti dati:
$$(e^{-1}, e^{-1}), \quad (1, e^3), \quad (e, e^2), \quad (e^2, e^{-2}).$$

4. Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$.
a) Si assuma che:
i) $\exists \alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha) = 0$
ii) $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
iii) $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Si dimostri che il metodo di Newton converge per ogni scelta del punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$.
b) Si verifichi che tutte e tre le ipotesi in a) sono necessarie per la validità del teorema.