

ANALISI NUMERICA, 25/06/2014

1. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- si determini per quali valori dei parametri α e β il metodo di Jacobi converge
- posto $\alpha = 2$, $\beta = 1$ e $x_0 = (0, 0, 0)^\top$, si consideri la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^3$ e si stimi il numero di iterazioni del metodo di Jacobi sufficienti affinché l'errore relativo soddisfi

$$\frac{\|x - x^{(k)}\|_\infty}{\|x\|_\infty} < 2^{-10}.$$

2. Data la funzione $f(x) = x^4 - x^2$

- si calcoli il polinomio di grado due che interpola f in un insieme di nodi equispaziati sull'intervallo $[0, 2]$, estremi compresi
- si dia una maggiorazione dell'errore di interpolazione sull'intervallo $[0, 1]$
- si calcoli l'errore di interpolazione nel punto $\bar{x} = 3$ e si determini il corrispondente punto ξ che compare nella formula dell'errore
- si calcoli il polinomio di grado tre che interpola f nei nodi $\{-1, 0, 1, 2\}$.

3. Data la formula di quadratura interpolatoria

$$\int_{-1}^1 f(x)x^2 dx \approx \alpha_0 f(-a) + \alpha_1 f(a), \quad a > 0$$

- si determinino i pesi α_0 e α_1
- si determini il valore di a che massimizza il grado di precisione della formula e si dica qual è il grado di precisione corrispondente
- si dica, motivando la risposta, se la formula ottenuta è una formula di Gauss.

4. Data la funzione $f(x) = x - e^{-x}$, si considerino i seguenti metodi iterativi per la ricerca della sua radice nell'intervallo $[0.5, 0.6]$:

- $x_{n+1} = e^{-x_n}$
- $x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + e^{-x_n}}{\alpha + 1}$
- $x_{n+1} = \frac{\alpha_n x_n + e^{-x_n}}{\alpha_n + 1}$.

- Si verifichi che il metodo *i*) converge globalmente
- Si calcoli α tale che il metodo *ii*) converga con ordine almeno 2
- Si osservi che il metodo *ii*) corrispondente al valore di α calcolato in b) non è utilizzabile ai fini pratici e si determini una successione $\{a_0, a_1, \dots\}$ tale che il metodo *iii*) risulti implementabile e converga con ordine almeno 2.