

ANALISI NUMERICA, 09/09/2014

1. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

si determini per quali valori del parametro α il metodo di Gauss-Seidel converge.

Posto $\alpha = 2$ e $x_0 = (0, 0, 0)^\top$, si supponga di applicare 10 iterazioni del metodo di Gauss-Seidel per approssimare la soluzione x del sistema lineare $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^3$. Si stimi l'errore relativo

$$\frac{\|x - x^{(10)}\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

2. Si determini il polinomio di grado due che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i seguenti dati:

$$(-1, -1), \quad (0, 3), \quad (1, 2), \quad (2, -2).$$

3. Data la formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f'(0),$$

si determini per quali valori dei pesi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ la formula ha grado di precisione massimo e si dica qual è il grado di precisione corrispondente.

Si dica, motivando la risposta, se la formula di quadratura data è interpolatoria.

4. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, si consideri il seguente procedimento iterativo:

$$x_{n+1} = \phi(x_n) \quad n = 0, 1, \dots,$$

con $\phi(x) = x + (x - 1)^2$. Si studi la convergenza del metodo al variare di x_0 .