Numeri Complessi

1. Siano $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = -1 - i$. Calcolare $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ e $z_1 \overline{z}_2$.

2. Siano $z_1 = -\frac{2}{5} + i\sqrt{2}$ e $z_2 = \frac{5}{2} - 2i$. Calcolare $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ e $z_1 \overline{z}_2$.

3. Ricordando che, se z è un numero complesso, $z\overline{z}$ è un numero reale, mettere sotto la forma $a + ib$ il seguente numero complesso:
$$\frac{3-i}{4+5i}.$$

4. Ricordando che, se z è un numero complesso, $z\overline{z}$ è un numero reale, mettere sotto la forma $a + ib$ il seguente numero complesso:
$$\frac{5-2i}{1+2i}.$$

5. Siano z_1 e z_2 le due radici (complesse) della seguente equazione di secondo grado:
$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$
Calcolare $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ e $z_1 \overline{z}_2$.

6. Siano z_1 e z_2 le due radici (complesse) della seguente equazione di secondo grado:
$$z^2 + 2z + 6 = 0.$$
Calcolare $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ e $z_1 \overline{z}_2$.

7. Calcolare $z_1 - z_2$, dove z_1 e z_2 sono le due radici (complesse) dell'equazione
$$5z^2 + 2z + 2 = 0\ .$$

8. Rappresentare nella forma $a + ib$ il numero complesso
$$\frac{i}{2+3i}\ .$$

9. Siano $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 - ib_2$. Allora il prodotto $z_1 z_2$ ha

   a parte reale $a_1a_2 - b_1b_2$ **b** parte immaginaria $a_2b_1 - a_1b_2$
   c parte reale nulla **d** parte immaginaria nulla.

10. Scrivere nella forma $a + ib$ il numero complesso
$$\frac{5+2i}{3+i}\ .$$

11. Siano α, β e γ tre numeri reali, $\gamma \neq 0$. Allora

   a $Re\left(\frac{\alpha+i\beta}{i\gamma}\right) = \frac{\alpha}{\gamma}$ **b** $Re\left(\frac{\alpha+i\beta}{i\gamma}\right) = -\frac{\alpha}{\gamma}$
   c $Im\left(\frac{\alpha+i\beta}{i\gamma}\right) = \frac{\alpha}{\gamma}$ **d** $Im\left(\frac{\alpha+i\beta}{i\gamma}\right) = -\frac{\alpha}{\gamma}$.

12. Data l'equazione $z^2 - 10z + 34 = 0$, siano z_1 e z_2 le sue radici (complesse). Allora

$\boxed{\textbf{a}}$ parte reale di $z_1 + z_2$ è nulla
$\boxed{\textbf{b}}$ parte immaginaria di $z_1\overline{z}_2$ è nulla
$\boxed{\textbf{c}}$ la parte reale di $z_1 - z_2$ è nulla
$\boxed{\textbf{d}}$ parte reale di $z_1 z_2$ è nulla.

13. Ricordando che, se z è un numero complesso, $z\bar{z}$ è un numero reale, scrivere nella forma $a + ib$ il numero complesso

$$\frac{100 + 225i}{4 - 3i}$$

14. Calcolare $z_1 - z_2$, dove z_1 e z_2 sono le due radici (complesse) dell'equazione

$$2z^2 + 2z + 5 = 0 \ .$$

15. Il numero complesso $\dfrac{1 + 5i}{1 - 2i}$ è uguale a

$\boxed{\textbf{a}}$ $\frac{11}{5} + \frac{7}{5}i$ $\boxed{\textbf{b}}$ $3 - \frac{7}{3}i$ $\boxed{\textbf{c}}$ $-\frac{9}{5} + \frac{7}{5}i$ $\boxed{\textbf{d}}$ $-\frac{11}{3} - \frac{7}{3}i$.

Limiti

1. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\log_3 x} \qquad \lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x}{x-1}$

2. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 2} 2^{2x} + \log_2 x^2 \qquad \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{2^x}$

3. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 0^+} |x| \qquad \lim_{x\to 0^-} \operatorname{segno}(x)$

4. Sia
$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 2^x & x \geq 0. \end{cases}$$
Calcolare $\lim_{x\to 0} f(x)$.

5. Sia
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \sqrt{2} & x > 1 \\ x^3 - \sqrt{2} & x \leq 0. \end{cases}$$
Calcolare $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

6. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2} \qquad \lim_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} \qquad \lim_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^3}$

7. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 2\pi} \ln(4\cos x) \qquad \lim_{x\to \pi/2^-} \ln(4\cos x)$

8. sia $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^2 - 1$. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to -1} f\circ g(x) \qquad \lim_{x\to -1} g\circ f(x)$

9. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{t\to 0} \operatorname{sen}^2(t) + \ln(1+t) + e^{2t} \qquad \lim_{s\to 1} \dfrac{3s + 8s^2 + 4}{15s}$

10. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x + \ln x}{x} \qquad \lim_{x\to 3^+} \dfrac{x-3}{x^2 - 6\,x + 9}$

11. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 + 3\,x}{x-1} \qquad \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2}$

12. Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x-5} \qquad \lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-2x}}{x}.$

13. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x+1} \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x+2}{x^2 - x - 2} \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

14. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{-x^2 + 2x + 3} \qquad \lim_{x\to -\infty} \ln(1-3x) \qquad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}.$$

15. Sia $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ definita per $x > 0$. Allora il $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\boxed{\mathbf{a}}$ è uguale a 0 $\boxed{\mathbf{b}}$ non esiste
$\boxed{\mathbf{c}}$ è uguale a $+\infty$ $\boxed{\mathbf{d}}$ è uguale a 1.

16. Sia $f(x) = x^{1.54}$. Allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. $\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$

17. Siano $f(x) = 1 - x$ e $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$. Dire quali delle seguenti affermazioni è corretta:

$\boxed{\mathbf{a}}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(f(x)) = -\infty$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(f(x)) = 0$
$\boxed{\mathbf{c}}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(f(x)) = -\infty$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(f(x)) = 0$.

1. Per quale valore del parametro A la funzione
$$f(x) = \begin{cases} e^{x+A} & x \geq 1 \\ 12\,x - 1 & x < 1 \end{cases}$$
è continua in $(-\infty, +\infty)$?

2. Per quale valore del parametro A la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & x \leq 3 \\ \log_2(x + A) & x > 3 \end{cases}$$
è continua in $(-\infty, +\infty)$?

3. Per quali valori reali dei parametri a e b la funzione
$$f(x) = \begin{cases} -2\,x + 4 + a & x < 0 \\ x^2 + b\,x + 2\,a + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2\,b & x > 1 \end{cases}$$
risulta continua su tutta la retta reale ?

4. Determinare il valore del parametro k in corrispondenza del quale la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 3\,x + k & x < 1 \\ \ln(2x) & x \geq 1 \end{cases}$$
risulti continua su tutta la retta reale.

5. Determinare il valore del parametro k in corrispondenza del quale la funzione
$$f(x) = \begin{cases} e^{kx} & x > 2 \\ 18\,x & x \leq 2 \end{cases}$$
risulti continua su tutta la retta reale.

6. Determinare il valore del parametro k in corrispondenza del quale la funzione
$$\begin{cases} e^{x} + k & x < 1 \\ \ln(2x) & x \geq 1 \end{cases}$$
risulti continua su tutta la retta reale.

7. Determinare il valore del parametro λ in modo tale che la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & x \geq 2 \\ e^{4x-\lambda} & x < 2 \end{cases}$$
sia continua su tutta la retta reale.

8. Determinare il valore del parametro λ in modo tale che la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \ln(5x - \lambda) & x > 4 \\ x^2 + 1 & x \leq 4 \end{cases}$$
risulti continua su tutta la retta reale.

9. Determinare il valore del parametro k in corrispondenza del quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{kx} & x > 3 \\ 2x & x \leq 3. \end{cases}$$

risulta continua si tutta la retta reale.

10. Determinare il valore del parametro reale λ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{\lambda x - 1} & x \geq 3 \\ \dfrac{1}{2x+1} & x < 3 \end{cases}$$

risulti continua nel punto $x = 3$.

11. Determinare il parametro $k \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < -1 \\ |x| + k & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

sia continua in tutto $\mathbb{R}$.

12. Determinare il parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\lambda}{x} & \text{se } x \leq -2 \\ \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{x+2} & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

sia continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.

13. Determinare il parametro $k \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < -1 \\ |x| - k & \text{se } x \geq -1, \end{cases}$$

sia continua in tutto $\mathbb{R}$.

Domande Teoriche su Logaritmi

1. Siano $a, b, c > 1$ tre numeri reali. L'espressione $\log_b a^c$ è equivalente a

   $\boxed{\mathbf{a}}$ $\dfrac{c}{\log_a b}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $c \log_a b$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $\dfrac{c}{\log_b a}$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $a \log_b c$.

2. Se A è un numero reale, allora il numero $\ln \dfrac{A}{5}$

   $\boxed{\mathbf{a}}$ è positivo per ogni $A > 0$; $\boxed{\mathbf{b}}$ è positivo per ogni $0 < A < 5$;
   $\boxed{\mathbf{c}}$ è negativo per ogni $A > 0$; $\boxed{\mathbf{d}}$ è negativo per ogni $0 < A < 5$.

3. Sia $f(x) = \log_b x$ con $b > 0$ e $b \neq 1$.

   $\boxed{\mathbf{a}}$ Se $0 < b < 1$ allora f è sempre positiva.

   $\boxed{\mathbf{b}}$ Se $0 < b < 1$ allora f è crescente.

   $\boxed{\mathbf{c}}$ Se $0 < b < 1$ allora f è convessa.

   $\boxed{\mathbf{d}}$ Se $b > 1$ allora f è sempre positiva.

4. Sia $f(x) = \ln(x - 2)$. Allora f è:

   $\boxed{\mathbf{a}}$ continua in tutto il suo dominio
   $\boxed{\mathbf{b}}$ positiva in tutto il suo dominio
   $\boxed{\mathbf{c}}$ decrescente in tutto il suo dominio
   $\boxed{\mathbf{d}}$ convessa in tutto il suo dominio

5. Sia $f(x) = a^x$. Quale delle seguenti implicazioni è corretta:

   $\boxed{\mathbf{a}}$ se $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ allora $a > 1$
   $\boxed{\mathbf{b}}$ se $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ allora $0 < a < 1$
   $\boxed{\mathbf{c}}$ se $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ allora $a > 1$
   $\boxed{\mathbf{d}}$ se $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ allora $0 < a < 1$

6. Per ogni $x, y \in (0, +\infty)$ si ha $\ln(x + y) = \ln(x) \cdot \ln(y)$. $\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$

7. Sia $f(x) = \ln(x - 2)$. Allora il dominio di f è

   $\boxed{\mathbf{a}}$ $[0, +\infty)$. $\boxed{\mathbf{b}}$ $[0, 2) \cup (2, +\infty)$

   $\boxed{\mathbf{c}}$ $(2, +\infty)$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $(-2, +\infty)$.

8. Sia $a > 0$; allora $\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty \quad \Rightarrow \quad 0 < a < 1$$

9. Vale la seguente identità: $\log_5 3 \log_3 5 = 1$. **V** **F**

10. Sia $\ell = \log_b \frac{1}{2}$. Se $\ell > 0$ allora

    a $b < 1$ **b** $b > 1$ **c** $b = 1$ **d** nessuna delle precedenti.

11. Se $2^x = -x - 1$ allora $x < 0$. **V** **F**

12. Siano $f(x) = e^{3x}$ e $g(x) = \ln(2x)$. Allora $f(g(x))$ è la funzione

    a $3x^8$ **b** $\ln 2 + 3x$ **c** $\ln 3 + 2x$ **d** $8x^3$.

13. Siano $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \log_9 x$. Allora $g(f(x))$ vale

    a x **b** $x/2$ **c** $3^{\log_9 x}$ **d** $9^{\log_3 x}$.

14. Siano a e b due numeri reali strettamente positivi e diversi da 1. Allora vale

    a $\ln(a + b) = (\ln a)(\ln b)$
    b $\ln(ab^{-1}) = \ln a - \ln b$
    c $\ln(ax^b) = b \ln(ax)$ per ogni $x > 0$
    d nessuna delle precedenti.

15. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    a $\log(a + b) = \log a \cdot \log b$
    b $\log a^b = (\log a)^b$
    c $\log(a - b) = \log a - \log b$
    d $\log a^{-1} = -\log a$.

Equazioni e Disequazioni Esponenziali e Logaritmiche

1. Quali valori di x soddisfano l'equazione $\log_4 (5x + 6) = \log_2 x$?
2. Quali valori di x soddisfano l'equazione $\log_3 x = \log_9 (5x + 6)$?
3. Quali valori di x soddisfano l'equazione $16^{3x+2} = 4^x$?
4. Dire quali valori di x soddisfano la disequazione
$$9^{x+1} \leq 3^x.$$
5. Quali valori di x soddisfano l'equazione $3^x = 5^{x+2}$?
6. Quali valori di x soddisfano l'equazione $3^x = 9^{2x+1}$?
7. Quali valori di x soddisfano l'equazione $\log_9(2x - 1) = \log_3 x$?
8. Risolvere la seguente equazione $\log_e 2 = \log_{10} 2x$.
9. Calcolare esplicitamente (con 4 cifre decimali) la soluzione dell'equazione $3^{2x} = 2^{x-1}$.
10. Quali valori di x soddisfano l'equazione $\log_3(2x + 1) = \log_9 4$?
11. Risolvere la seguente equazione (esprimere il risultato con 3 cifre decimali)
$$2^{5x^2} = 10^{x^2+1}$$
12. Dire quali valori reali di x soddisfano la seguente equazione:
$$2 \log_3 x = \log_9 4.$$
13. Dire quali valori reali di x soddisfano l'equazione (esprimere il risultato con tre cifre decimali)
$$3^{x-1} = 2^{5x}.$$
14. Risolvere l'equazione
$$\log_4(3x^2 + 3) = 2$$
(utilizzare 3 cifre decimali).
15. Dire quali valori di x risolvono la seguente equazione:
$$3^x = e^{2x+1}.$$
16. Risolvere l'equazione esponenziale $2^{3x} = 3$ (rappresentare la soluzione con 3 cifre decimali).
17. Determinare quali valori soddisfano l'equazione
$$9^x = 3^{-4x+1}$$
(esprimere il risultato con 3 cifre decimali).

18. Determinare quali valori soddisfano l'equazione
$$4^x = 2^{3x+2}$$
(esprimere il risultato con 3 cifre decimali).

19. Risolvere l'equazione
$$3^{x^2} = 9^{2x+30}\ .$$

20. Risolvere l'equazione
$$\log_2 \frac{1}{3x+2} = -3$$
per $x > -2/3$.

21. Dire quali valori reali di x risolvono la seguente equazione:
$$\log_2(3x+1) = -1\ .$$

22. Determinare i valori di x che soddisfano l'equazione
$$e^x = 3^{4x+1}$$
(esprimere il risultato con 3 cifre decimali).

23. Risolvere l'equazione logaritmica $\log_3(1+3x^2) = 2$. (Scrivere le soluzioni con tre cifre decimali).

24. Dire quali valori reali di x soddisfano la disequazione
$$16^{3x+2} \geq 4^x\ .$$

25. Risolvere la seguente equazione
$$\log_3(x^2+1) = 1.$$

26. Risolvere la seguente equazione
$$\ln 3 = \log_{10} 3x$$
(scrivere il risultato con 3 cifre decimali).

27. Dire quali valori di $x \in \mathbb{R}$ soddisfano la disequazione
$$\log_4\left(\frac{5}{12}x^2 + \frac{1}{3}\right) < \frac{1}{2}\ .$$

28. Dire quali valori di $x \in \mathbb{R}$ soddisfano la disequazione
$$2^{x^2-8} \leq 4^x\ .$$

29. Dire quali valori reali di x soddisfano la seguente disequazione:
$$\ln\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) < 0\ .$$

30. Dire quali valori reali di x soddisfano la seguente equazione:
$$\ln|x + \frac{1}{2}| = 0\ .$$

31. Dire quali valori reali di x soddisfano la seguente equazione:

$$4^x = 16^{2x-5} \, .$$

32. Dire quali valori di $x \in \mathbb{R}$ soddisfano la disequazione

$$e^{2x^2-3x} < \frac{1}{e} \, .$$

33. Dire quali valori di $x \in \mathbb{R}$ soddisfano la disequazione

$$\log_4 \left(\frac{16}{3} x^2 + 1 \right) > \frac{1}{2} \, .$$

34. Risolvere l'equazione logaritmica $\log_3(1 + 5x^2) = 2$.

Derivate

1. Sia $f(t) = \dfrac{15\,t}{e^t + 4}$, per ogni $t \in \mathbf{R}$. Calcolare $f'(0)$.
2. Si consideri la funzione $f(x) = x^2 + 5\,x + 1$, per $x > -1$. Calcolare $5\,(f^{-1})'(1)$.
3. Qual è la funzione $f(x)$ che passa per il punto di coordinate $(0, 1)$ e la cui tangente ha pendenza $\dfrac{24\,x^3}{x^4 + e}$?
4. Data la funzione $f(x) = \ln{(x^2 + 1)}$, con $x \geq 0$, calcolare la derivata della sua inversa $f^{-1}(x)$ nel punto $x = 1$.
5. Qual è la funzione $f(x)$ che passa per il punto di coordinate $(0, 3)$ e la cui tangente ha pendenza $\dfrac{x}{x^2 + e}$, per ogni x numero reale ?
6. Sia $f(t) = \dfrac{12\,t}{e^t + 2}$, per ogni $t \in \mathbf{R}$. Calcolare $f'(0)$.
7. Sia $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{3x}$, per ogni $x \neq 0$. Calcolare $f'(1)$.
8. Si consideri la funzione $f(x) = x^2 + 4\,x + 1$, per $x > -2$. Calcolare $(f^{-1})'(1)$.
9. Date le funzioni
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \sqrt{x},$$
calcolare la derivata della funzione composta $h(x) = g\big(f(x)\big)$ nel punto $x = 4$.
10. Sia $f(x) = e^{13x+3}$. Calcolare la derivata dell'inversa $f^{-1}(x)$ nel punto $x = 1$.
11. Sia $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.
Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel suo punto di ascissa $x = 1$.
12. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\cos x} + e^{3x^6}$.
13. Calcolare l'equazione della retta tangente alla curva $y = \dfrac{3 + x}{x^2}$ nel suo punto di ascissa $x = 1$.
14. Data la funzione $f(x) = \ln{(x^2 + 1)}$, con $x \geq 0$, calcolare la derivata della sua inversa $f^{-1}(x)$ nel punto $x = 1$.
15. Data la funzione $f(x) = \dfrac{e^{3x} + 4}{5x}$, calcolare $f'(1)$.
16. Sia $f(x) = e^{4x} + 1$. Calcolare la derivata dell'inversa $f^{-1}(x)$ nel punto $x = 2$.
17. Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva
$$y = \frac{2x + 1}{e^{2x} + 2}$$
nel suo punto di ascissa 0.

18. Sia $f(x) = e^{2x+1} - 1$. Calcolare la derivata dell'inversa $f^{-1}(x)$ nel punto $x = 0$.

19. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{2 + x^2}{x}$$

nel suo punto di ascissa $x = 1$.

20. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x} + x$$

nel suo punto di ascissa $x = 1$.

21. Sia $f(t) = \dfrac{2e^t + 5}{3t}$, per ogni $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$. Calcolare $f'(1)$.

22. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$y = \frac{e^{3x+1}}{x^2 + 2}$$

nel suo punto di ascissa 1.

23. Sia $f(x) = x^3 + 8$. Calcolare la derivata dell'inversa $f^{-1}(x)$ nel punto $x = 0$.

24. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = e^{(1/x)}$$

nel suo punto di ascissa $\dfrac{1}{2}$ (scrivere il risultato nella forma $y = mx + q$).

25. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \ln(2x + 1)$$

nel suo punto di ascissa $x_0 = 0$.

26. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = e^{2x}$$

nel suo punto di ascissa 3 (scrivere il risultato nella forma $y = mx + q$).

27. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \ln(2x)$$

nel suo punto di ascissa 3 (scrivere il risultato nella forma $y = mx + q$).

28. Data la funzione $f(x) = \cos(2x)$, calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel suo punto di ascissa $\dfrac{\pi}{4}$.

29. Siano $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = g(f(x))$. Calcolare la derivata di h nel punto $x_0 = \pi/4$.

30. Determinare l'equazione della retta tangente alla curva
$$y = \frac{x}{x^2+1}$$
nel suo punto di ascissa $x_0 = \sqrt{2}$.

31. Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva
$$y = e^{(x^2+2)}$$
nel suo punto di ascissa $x = 1$.

32. Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva
$$y = \ln(x+2)$$
nel suo punto di ascissa $x_0 = -1$.

33. Sia
$$f(x) = \frac{2x-12}{e^{x-4}}\ .$$
Determinare l'equazione della retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa $x = 4$.

34. Scrivere nella forma $y = ax + b$ l'equazione della retta tangente al grafico della funzione
$$f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$$
nel suo punto di ascissa 1.

35. Data la funzione
$$f(x) = x^3 + 8\ ,$$
scrivere (nella forma $y = ax + b$) l'equazione della retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa $x_0 = 2$.

36. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione
$$f(x) = 2x + \ln(3x-5)\ ,$$
nel suo punto di ascissa $x_0 = 2$ (scrivere il risultato nella forma $y = ax + b$).

37. Sia
$$f(x) = 2(x+1)e^{2x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$
Calcolare $(f^{-1})'(0)$.

38. Sia
$$f(x) = \frac{3x^2-10}{e^{x-3}}\ .$$
Determinare l'equazione della retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa $x = 3$ (scrivere il risultato nella forma $y = mx + q$).

39. Siano $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = g(f(x))$. Calcolare la derivata di h nel punto $x_0 = \pi/4$.

Leggi di Crescita e Decadimento

1. Calcolare il tasso di decadimento di una sostanza (si assume decadimento esponenziale) il cui tempo di dimezzamento è 3 465 anni.

2. Il numero di individui di una popolazione ha crescita esponenziale. Sapendo che tale numero è pari a 1 000 000 nel 2002 e raddoppia in 250 anni, quanto varrà nel 2012 ?

3. Il tempo di dimezzamento del Radio è 1620 anni. Calcolare la percentuale di Radio ancora presente dopo 100 anni.

4. Dopo 3 giorni, il 50% della quantità di radioattività prodotta da un'esplosione nucleare è scomparsa. Quanti giorni sono necessari affinchè scompaia il 99% ?

5. Calcolare il tasso di decadimento di una sostanza (si assume decadimento esponenziale) il cui tempo di dimezzamento è 2 000 anni.

6. La popolazione di batteri di una data coltura ha crescita esponenziale. All'istante $t = 0$, la popolazione ha 2 000 individui e all'istante $t = 3$ ne ha 4 000. A quale istante di tempo la popolazione raggiugerà le 48 000 unità ?

7. Il numero degli individui di una popolazione ha crescita esponenziale. Sapendo che tale popolazione raddoppia in 200 anni, e che il numero degli individui nel 2003 è pari a 1 000 000, calcolare il numero degli individui nel 1993.

8. Le popolazioni A e B hanno crescita esponenziale. La popolazione A raddoppia in 400 anni a la popolazione B raddoppia in 300 anni. Si indichi con A_0 e B_0 il numero degli individui al tempo $t = 0$ delle popolazioni A e B, rispettivamente.

   a) Scrivere le formule che esprimono il numero degli individui delle due popolazioni al generico istante t.
   b) Supponendo che $A_0 = 2B_0$, dire in quale istante $\bar{t}$ si avrà che le due popolazioni hanno lo stesso numero di individui.

9. Una popolazione ha crescita esponenziale. Sapendo che essa si dimezza in 10 anni e che il numero di individui dopo 20 anni è di 3 000 000 di unità, calcolare il numero di individui all'istante iniziale.

10. Una popolazione ha crescita esponenziale. Sapendo che essa si riduce ad 1/4 in 5 anni e che il numero di individui all'istante iniziale era di 128 000 unità, calcolare il numero di individui dopo 15 anni.

11. Il tempo di dimezzamento di una certa sostanza radioattiva è 1800 anni. Calcolare la percentuale di tale sostanza ancora presente dopo 100 anni.

12. La popolazione di batteri di una data coltura ha crescita esponenziale. All'istante $t = 0$, la popolazione ha 2 000 individui e all'istante $t = 3$ ne ha 4 000. A quale istante di tempo la popolazione raggiugerà le 48 000 unità ?

13. Calcolare il tasso di decadimento di una sostanza radioattiva (si assume decadimento esponenziale) il cui tempo di dimezzamento è 700 anni.

14. Calcolare il tasso di decadimento di una sostanza (si assume decadimento esponenziale) il cui tempo di dimezzamento è 4 326 anni.

15. Il numero degli individui di una popolazione ha crescita esponenziale. Sapendo che tale popolazione raddoppia in 300 anni, e che il numero degli individui nel 2004 è pari a 2 000 000, calcolare il numero degli individui nel 2034.

16. Il Carbonio 14 ha un tempo di dimezzamento di 5760 anni. In quanti anni una data quantità di Carbonio 14 si riduce del 20%?

17. Una popolazione ha crescita esponenziale. Calcolarne il tasso di crescita, sapendo che si triplica in 200 anni.

18. Una popolazione ha crescita esponenziale. Sapendo che essa raddoppia in 150 anni e che il numero di individui dopo 450 anni è di 2 400 000 unità, calcolare il numero di individui all'istante iniziale.

19. Il numero degli individui di una popolazione ha crescita esponenziale. Sapendo che la popolazione triplica in 1 000 anni e che il numero degli individui nel 2005 è pari a 1 000 000, calcolare qual era il numero degli individui nel 1947.

20. Il tempo di dimezzamento di una sostanza radioattiva è 6210 anni. Qual è il suo tasso di decadimento?

21. Il Carbonio 14 ha un tempo di dimezzamento di 5760 anni. In quanti anni una data quantità di Carbonio 14 si riduce del 25%?

22. Una popolazione, con legge di crescita esponenziale, ha inizialmente 15000 individui. Dopo 20 anni, la popolazione ha 35000 individui.
a) Calcolare il tasso di crescita.
b) Dopo quanti anni la popolazione risulta quadruplicata?

23. Di una sostanza chimica si sa che decade con legge esponenziale e che impiega 2530 anni per ridurre la sua massa del 30% (cioè dopo 2530 anni la sua massa è il 30% in meno della massa iniziale).

    a) Qual è il tasso di decadimento?

    a) Se inizialmente la massa è di $150g$, quanto tempo deve trascorrere perchè la massa si riduca a $60g$?

24. Una popolazione, con legge di crescita esponenziale, raddoppia in 80 anni.

    a) Calcolare il tasso di crescita.

    b) Dire quanti individui aveva inizialmente se, a distanza di 20 anni, la popolazione ha 35000 individui.

25. L'einsteinio è un elemento chimico artificiale (transuranico). Il suo isotopo ^{254}Es ha tempo di dimezzamento di 276 giorni.

    a) Calcolare il tasso di decadimento.

    a) Se inizialmente la massa è M quanto tempo deve trascorrere perchè si riduca ad $M/3$?

26. Una popolazione decresce con legge esponenziale. Il numero degli individui al tempo $t_1 = 1$ è pari a 80 000 e al tempo $t_3 = 3$ è pari a 16 000.
a) Calcolare il tasso di decadimento.
b) Calcolare il numero di individui al tempo $t_0 = 0$.

27. Una popolazione decresce con legge esponenziale. Il numero degli individui al tempo $t_1 = 1$ è pari a 40 000 e al tempo $t_2 = 3$ è pari a 8 000.
a) Calcolare il tasso di decadimento.
b) Calcolare il numero di individui al tempo $t_0 = 0$.

28. Una popolazione decresce con legge esponenziale. Il numero degli individui al tempo $t_0 = 0$ è pari a 80 000 e al tempo $t_1 = 3$ è pari a 8 000.
a) Calcolare il tasso di decadimento.
b) Calcolare il numero di individui al tempo $t_2 = 6$.

29. Una sostanza chimica decade con legge esponenziale e impiega 850 anni per ridurre la sua massa del 18% (cioè dopo 850 anni la sua massa è il 18% in meno della sua massa iniziale).
a) Calcolare il tasso di decadimento.
b) Dopo quanti anni la massa si dimezza?

30. Una popolazione ha legge di decadimento esponenziale. All'istante iniziale, la popolazione conta 1 000 000 di individui e, dopo 10 anni, 700 000.

    i) Dire qual è il tasso di decadimento.
    ii) Dire dopo quanti anni la popolazione avrà un numero di individui pari a 500 000.

31. Una popolazione cresce con legge esponenziale di tasso 0.001 ed ha attualmente (anno 2009) 100 000 individui.

    i) Dire da quanti individui era composta nel 1999.
    ii) Dire da quanti individui sarà composta nel 2019.

32. Una sostanza radioattiva ha decadimento esponenziale e il suo tempo di dimezzamento è 1 600 anni. Calcolare la percentuale di sostanza ancora presente dopo 150 anni.

33. Nel periodo $1900 - 1950$ la popolazione di Lampedusa e Linosa è cresciuta esponenzialmente. Sapendo che gli abitanti erano 2204 nel 1900 e 4458 nel 1950 calcolare il numero di abitanti nel 1925.

34. Una popolazione ha crescita esponenziale. Sapendo che essa aumenta di $1/3$ in 3 anni e che il numero dei suoi individui all'istante iniziale è 600 000, calcolare il numero dei suoi individui dopo 5 anni.

35. Una popolazione decresce esponenzialmente, riducendosi del 10% in 5 anni. Sapendo che gli individui al tempo iniziale sono 400 000, calcolare il numero di individui dopo 10 anni.

36. Il Carbonio 14 ha un tempo di dimezzamento di 5760 anni. In quanti anni una data quantità si riduce del 35%?

37. Una popolazione, con legge di crescita esponenziale, raddoppia in 115 anni. Calcolare il numero degli individui a un istante iniziale sapendo che il numero di individui dopo 100 anni è di 10 000 unità.

38. Una sostanza radioattiva ha decadimento esponenziale e il suo tempo di dimezzamento è 2 310 anni. Calcolare la percentuale di sostanza ancora presente dopo 1 540 anni.

39. Una popolazione, con legge di crescita esponenziale, ha inizialmente 15000 individui. Dopo 60 anni, la popolazione ha 35000 individui. Dopo quanti anni la popolazione risulta quadruplicata?

40. Una sostanza decade con legge esponenziale e impiega 350 anni per ridurre la sua massa del 15% (cioè dopo 350 anni la sua massa è il 15% in meno della massa iniziale). Calcolarne il tempo di dimezzamento.

41. Una popolazione con legge di crescita esponenziale raddoppia in 30 anni. Sapendo che il numero degli individui nel 2010 è pari a 100 000, calcolare qual era il numero degli individui nel 1977.

42. In 10 anni una popolazione aumenta del 15%. Sapendo che la crescita è esponenziale, calcolare il numero degli individui a un istante iniziale sapendo che il numero di individui dopo 100 anni è di 10 000 unità.

43. Una popolazione, con legge di crescita esponenziale, aumenta del 30% in 230 anni. Calcolare il numero degli individui a un istante iniziale sapendo che il numero di individui dopo 100 anni è di 10 000 unità.

44. Un reperto contiene una sostanza radioattiva con decadimento esponenziale e tempo di dimezzamento di 1600 anni. Calcolare quanto tempo impiega la sostanza a ridursi al 94% della quantità iniziale.

Grafici in Scala Logaritmica

1. Disegnare in scala semilogy (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = 10^x \qquad y = 10^{6x} \qquad y = 5 \cdot 10^{6x}.$$

2. Qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala log (in base 10) è la retta $z = -2x + 1$?

3. Disegnare in scala semilogy (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = 10^x \qquad y = 10^{4x} \qquad y = 3 \cdot 10^{4x}.$$

4. Disegnare in scala semilogy (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = 10^x \qquad y = 10^{5x} \qquad y = 2 \cdot 10^{5x}.$$

5. Disegnare in scala $\log\log$ (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = x^2, \qquad y = 5x^2;$$

dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala $\log\log$ (in base 10) è la retta $z = 8w + 3$.

6. Disegnare in scala semilogy (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = 10^{2x}, \qquad y = 5 \cdot 10^{2x};$$

dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala semilogy (in base 10) è la retta $z = 8x + 3$.

7. Disegnare in scala loglog (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = x^4, \qquad y = 3x^4;$$

dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala loglog (in base 10) è la retta $z = 3w - 2$.

8. Rappresentare in scala loglog (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni

$$y = x^3 \qquad y = 4x^3 \qquad y = \frac{1}{9}x^4$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala loglog (in base 10) è la retta $z = -2w + 3$.

9. Rappresentare in scala semilogaritmica (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni

$$y = 3^{2x-1} \qquad y = 9\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala semilogaritmica (in base 10) è la retta $z = -3x + \log_{10} 2$.

10. Rappresentare in scala loglog (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni

$$y = 2x^4 \qquad y = 3x^4 \qquad y = 3x^5$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala loglog (in base 10) è la retta $z = -4w + 2$.

11. Rappresentare in scala loglog (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni

$$y = x^2 \qquad y = 1/x^2 \qquad y = 2x\,.$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala loglog (in base 10) è la retta $z = 3w - 1$.

12. Rappresentare in scala semilogaritmica (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni

$$y = 10^{2x+1} \qquad y = 4 \cdot 10^{2x+1} \qquad y = 4^{2x}$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala semilogaritmica (in base 10) è la retta $z = 3x + 2$.

13. Rappresentare in scala loglog (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = x^3 \qquad y = \frac{1}{5}x^3.$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala loglog (in base 10) è la retta $z = -5w + 2$.

14. Rappresentare in scala loglog (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = x^4 \qquad y = \frac{1}{5}x^4.$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala loglog (in base 10) è la retta $z = -3w + 1$.

15. Rappresentare in scala semilogaritmica (in base 2) i grafici delle seguenti funzioni

$$y = 2^{2x+4} \qquad y = 2^{4x-4} \qquad y = 16\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala semilogaritmica (in base 10) è la retta $z = -x + 2$.

16. Rappresentare in scala loglog (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni

$$y = x^3 \qquad y = x^4 \qquad y = 5\,x^4\,.$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala loglog (in base 10) è la retta $z = 3w - 3$.

17. Rappresentare in scala semilogy (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni

$$y = 10^{3x} \qquad y = 10^{4x} \qquad y = 3 \cdot 10^{4x}$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala semilogy (in base 10) è la retta $z = 3x + 2$.

18. Rappresentare in scala semilogy (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = 10^{4x} \qquad y = 100 \cdot 10^{4x}.$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala semilogy (in base 10) è la retta $z = -5x + 2$.

19. Rappresentare in scala loglog (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni

$$y = 3x^2 \qquad y = 9x^4 .$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala loglog (in base 10) è la retta $z = 3w - 2$.

20. Rappresentare in scala semilogy (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni

$$y = 2 \cdot 10^{3x} \qquad y = 3 \cdot 10^{6x} .$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala semilogy (in base 10) è la retta $z = 5x - 1$.

21. Rappresentare in scala semilogy (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni

$$y = 10^{x+1}, \qquad y = 2^{x+1} .$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala semilogy (in base 10) è la retta $z = 2x - 2$.

22. Rappresentare in scala semilogy (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni

$$y = 10^{2x+1}, \qquad y = 4^{2x+1} .$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala semilogy (in base 10) è la retta $z = -2x + 2$.

23. Rappresentare in scala loglog (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = 5x^2 \qquad y = 2x^5.$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala loglog (in base 10) è la retta $z = -3w + 4$.

24. Rappresentare in scala semilogy (in base 10) i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = 10^{2x} \qquad y = 10 \cdot 10^{2x}.$$

Dire inoltre qual è la funzione $y = f(x)$ il cui grafico in scala semilogy (in base 10) è la retta $z = 2 - 4x$.

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} 5y'(x) - 2y(x) + 1 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} 2y'(x) - 3y(x) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'(x) = 3y(x) + 1 \\ y(2) = 4 \end{cases}$$

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'(x) = 3 \\ y(2) = 4 \end{cases}$$

5. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = 0 \\ y(2) = 0 \\ y'(2) = 1 \end{cases}$$

6. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y''(x) + 2y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

7. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y''(x) = 0 \\ y(3) = 1 \\ y'(3) = 2 \end{cases}$$

8. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

9. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

10. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

11. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) - 2y(x) + 10 = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

12. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) - 4y(x) = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

13. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

14. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2y' - y = 1 \\ y(1) = 2\,. \end{cases}$$

15. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

16. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = -3y(x) \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

17. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = -2y(x) \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

18. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x) + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

19. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

20. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{2}{3}y(x) - 1 \\ y(3) = 2e^2 + \dfrac{3}{2}\,. \end{cases}$$

21. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x) - 10 \\ y(2) = 3. \end{cases}$$

22. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 10\,. \end{cases}$$

23. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' + 5y = 3 \\ y(2) = 1\,. \end{cases}$$

24. Risolvere il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 12. \end{cases}$$

25. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} 5y' - 2y = 1 \\ y(1) = 3\,. \end{cases}$$

26. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'' - 8y' + 16y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 6\ . \end{cases}$$

27. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' - 10y + 15 = 0 \\ y(2) = 4\ . \end{cases}$$

28. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'' - 16y = 0 \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = 8\ . \end{cases}$$

29. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'' - 4y' = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = e^4\ . \end{cases}$$

30. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} 2y'(x) + y(x) + 1 = 0 \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

Studi di Funzione

1. Si consideri la funzione
$$f(x) = 2\,x^3 - 12\,x^2 + 1.$$
   a) Dire dove $f(x)$ è crescente e dove è decrescente.
   b) Dire dove $f(x)$ ha concavità verso l'alto e dove verso il basso.
   c) Calcolare massimo e minimo assoluti di $f(x)$ nell'intervallo $[2, 6]$.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 2\,\ln(1 + x).$$
   a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.
   b) Dire dove $f(x)$ è crescente e dove è decrescente e precisare le coordinate degli eventuali punti di massimo e minimo realtivo.
   c) Dire dove $f(x)$ ha concavità verso l'alto e dove verso il basso e precisare le coordinate degli eventuali punti di flesso.
   d) Tracciare il grafico di $f(x)$.

3. Si consideri la funzione
$$f(x) = \ln\,\left[(1 - x^2)^2\right].$$
   a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.
   b) Precisare le coordinate degli eventuali punti di massimo e minimo relativo e degli eventuali punti di flesso.
   c) Tracciare il grafico di $f(x)$.
   d) Calcolare i punti di estremo assoluto di $f(x)$ nell'intervallo chiuso e limitato $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

4. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{\ln(x - 3) + 5}{3 - x}.$$
   a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.
   b) Tracciare il grafico di $f(x)$, precisando le coordinate degli eventuali punti di massimo e minimo relativo e degli eventuali punti di flesso.
   c) Calcolare gli estremi assoluti di $f(x)$ nell'intervallo $[3 + e^{-5}, 3 + e^{-1}]$.

5. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{2}{3}\,x^3 - 18\,x + 6.$$
   a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.
   b) Precisare le coordinate degli eventuali punti di massimo e minimo relativo e degli eventuali punti di flesso.
   c) Tracciare il grafico di $f(x)$.
   d) Calcolare i punti di estremo assoluto di $f(x)$ nell'intervallo chiuso e limitato $[0, 4]$.

6. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}.$$
   a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.
   b) Precisare le coordinate degli eventuali punti di massimo e minimo relativo e degli eventuali punti di flesso.
   c) Dire dove la funzione è crescente e decrescente, e dove ha la convavità è rivolta verso l'alto e verso il basso.
   d) Tracciare il grafico di $f(x)$.

7. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{\sqrt{x - 4}}.$$
   a) Precisare il dominio e i limiti agli estremi del dominio.
   b) Dire dove $f(x)$ è crescente e dove è decrescente e calcolare le coordinate degli eventuali punti di estremo relativo.
   c) Calcolare massimo e minimo assoluti di $f(x)$ nell'intervallo $[5, 8]$.

8. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{8x^2 - 8}.$$
   a) Precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio.
   b) Dire dove $f(x)$ è crescente e dove è decrescente.
   c) Calcolare $\lim_{x \to -5} f(x)$.

9. Si consideri la funzione
$$f(x) = (x - 3)^3 + 5.$$
   a) Studiare $f(x)$ (dominio, limiti agli estremi del dominio, crescenza/descrescenza, estremi relativi, concavitá, flessi).
   b) Calcolare massimo e minimo assoluto di $f(x)$ in $[2, 4]$.

10. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{-15 - 5\,x^2}{1 - x}.$$
   a) Precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio.
   b) Determinarne gli eventuali asintoti.
   c) Dire dove $f(x)$ è crescente e dove è decrescente.
   d) Dire dove $f(x)$ ha concavità verso l'alto e e dove ha concavità verso il basso.

11. Tracciare il grafico della funzione
$$f(x) = |x^3 + 1| + 2.$$

12. Tenendo conto che la funzione
$$f(x) = \frac{x^3}{8 - 2\,x^2}$$
è dispari,

a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio,

b) determinarne gli eventuali asintoti,

c) dire dove $f(x)$ è crescente e dove è decrescente,

d) dire dove $f(x)$ ha concavità verso l'alto e e dove ha concavità verso il basso.

13. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = 3 + |x^2 - 1|.$$

14. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{4}.$$

a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.

b) Precisare le coordinate degli eventuali punti di massimo e minimo relativo e degli eventuali punti di flesso.

c) Dire dove la funzione è crescente e decrescente, dove la concavità è rivolta verso l'alto e verso il basso.

d) Tracciare il grafico di $f(x)$.

15. Si consideri la funzione

$$f(x) = x + \ln(x - 3).$$

a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.

b) Dire dove la funzione è crescente e decrescente, e dove la concavità è rivolta verso l'alto e verso il basso.

c) Ci sono estremi relativi? Ci sono punti di flesso?

d) Tracciare il grafico di $f(x)$.

16. Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln\left[(1 - x^2)^2\right].$$

a) Specificare il dominio di $f(x)$ e i limiti agli estremi del dominio.

b) Precisare le coordinate degli eventuali punti di massimo e minimo relativo e degli eventuali punti di flesso.

c) Tracciare il grafico di $f(x)$.

d) Calcolare i punti di estremo assoluto di $f(x)$ nell'intervallo chiuso e limitato $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

17. Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{3x+4}{x}},$$

a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;

b) calcolarne gli eventuali asintoti;

c) dire in quali intervalli è crescente e decrescente;

d) dire in quali intervalli è concava e convessa e calcolarne gli eventuali punti di flesso;

e) tracciarne il grafico.

18. Data la funzione
$$f(x) = x + \ln \frac{1}{2x+4},$$
   a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;
   b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente;
   c) calcolarne gli eventuali punti di estremo relativo;
   d) dire in quali intervalli è concava e convessa;
   e) calcolarne il massimo e minimo assoluti nell'intervallo $[0, 3]$.

19. Data la funzione
$$f(x) = \frac{e^{8x+3}}{e^{x^2}},$$
   a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;
   b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente;
   c) calcolarne gli eventuali punti di estremo relativo;
   d) calcolarne gli eventuali punti di flesso;
   e) dire in quali intervalli è concava e convessa.

20. Data la funzione
$$f(x) = \ln\left(\frac{3}{1+x^2}\right),$$
   a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;
   b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolare le coordinate degli eventuali punti di estremo relativo;
   c) dire in quali intervalli è concava e convessa e calcolare le coordinate degli eventuali punti di flesso;
   d) calcolare le ascisse dei punti in cui $f(x)$ si annulla;
   e) tracciarne il grafico.

21. Data la funzione
$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2},$$
   a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;
   b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolare le coordinate degli eventuali punti di estremo relativo;
   c) dire in quali intervalli è concava e convessa e calcolare le coordinate degli eventuali punti di flesso.

22. Data la funzione
$$f(x) = \frac{x}{e^{2x}},$$
   a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;
   b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;
   c) dire in quali intervalli è concava e convessa e calcolarne gli eventuali punti di flesso;
   d) tracciarne il grafico;

e) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico nel suo punto di ascissa $x = 1$.

23. Data la funzione

$$f(x) = \frac{3-5x}{x^2},$$

a) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;

b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;

c) dire in quali intervalli è concava e convessa e calcolarne gli eventuali punti di flesso;

d) tracciarne il grafico.

24. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{x+1},$$

a) dire se è pari, dispari o né pari né dispari;

b) precisarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio;

c) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;

d) usando i dati a disposizione, tracciarne un possibile grafico;

e) calcolare $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

25. Data la funzione

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2+x+2}$$

a) precisare il dominio e discutere il segno;

b) dire se è pari, dispari e calcolare i limiti agli estremi del dominio;

c) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;

d) dire in quali intervalli è concava e convessa (concavità verso il basso o verso l'alto), specificando gli eventuali punti di flesso;

e) tracciarne il grafico.

26. Data la funzione

$$f(x) = x\ln(x)$$

a) precisare il dominio, discutere il segno e calcolare i limiti agli estremi del dominio;

b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi (sia le ascisse che le ordinate);

c) dire in quali intervalli è concava e convessa, specificando gli eventuali punti di flesso;

d) tracciarne il grafico.

27. Data la funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

a) precisare il dominio, discutere il segno e calcolare i limiti agli estremi del dominio;

b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi (sia le ascisse che le ordinate);

c) dire in quali intervalli è concava e convessa, specificando gli eventuali punti di flesso;

d) tracciarne il grafico.

28. Data la funzione

$$f(x) = x\,e^{-x}$$

a) precisare il dominio, discutere il segno e calcolare i limiti agli estremi del dominio;

b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi (sia le ascisse che le ordinate);

c) dire in quali intervalli è concava e convessa, specificando gli eventuali punti di flesso;

d) tracciarne il grafico.

29. Data la funzione

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}\,,$$

a) precisare il dominio, discutere il segno e calcolare i limiti agli estremi del dominio;

b) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi (sia le ascisse che le ordinate);

c) dire in quali intervalli è concava e convessa, specificando gli eventuali punti di flesso;

d) tracciarne il grafico.

30. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

a) precisare il dominio e discutere il segno;
b) calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) studiare crescenza, decrescenzaed estremi relativi;
d) studiare concavità, covessità e flessi;
e) tracciarne il grafico.

31. Data la funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

a) precisare il dominio;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio;

c) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;

d) dire in quali intervalli è concava e convessa (concavità verso il basso o verso l'alto), specificando gli eventuali punti di flesso;

e) tracciarne il grafico.

32. Data la funzione

$$f(x) = \ln\left[x(x-1)\right]$$

a) precisare il dominio e discutere il segno;

b) dire se è pari, dispari e calcolare i limiti agli estremi del dominio;

c) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;

d) dire in quali intervalli è concava e convessa (concavità verso il basso o verso l'alto), specificando gli eventuali punti di flesso;

e) tracciarne il grafico.

33. Data la funzione
$$f(x) = \frac{e^{2x}}{2x-1}$$
a) precisare il dominio e discutere il segno;
b) calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) studiare crescenza, decrescenza ed estremi relativi;
d) studiare concavità, convessità e flessi;
e) tracciarne il grafico.

34. Data la funzione
$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)$$
a) precisare il dominio e discutere il segno;
b) dire se è pari, dispari e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;
d) dire in quali intervalli è concava e convessa (concavità verso il basso o verso l'alto), specificando gli eventuali punti di flesso;
e) tracciarne il grafico.

35. Data la funzione
$$f(x) = x\,e^{-(2x+1)}$$
a) precisare il dominio e discutere il segno;
b) dire se è pari, dispari e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;
d) dire in quali intervalli è concava e convessa (concavità verso il basso o verso l'alto), specificando gli eventuali punti di flesso;
e) tracciarne il grafico.

36. Data la funzione
$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$
a) precisare il dominio e discutere il segno;
b) dire se è pari, dispari e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;
d) dire in quali intervalli è concava e convessa (concavità verso il basso o verso l'alto), specificando gli eventuali punti di flesso;
e) tracciarne il grafico.

37. Data la funzione
$$f(x) = e^{\frac{2x+1}{x}}$$
a) precisare il dominio e discutere il segno;
b) dire se è pari, dispari e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) dire in quali intervalli è crescente e decrescente e calcolarne gli eventuali estremi relativi;

d) dire in quali intervalli è concava e convessa (concavità verso il basso o verso l'alto), specificando gli eventuali punti di flesso;

e) tracciarne il grafico.

38. Data la funzione
$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + 4\right) + x \ ,$$
a) precisare il dominio massimale e discutere il segno;
b) dire se è pari o dispari e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) studiare crescenza, decrescenza ed estremi relativi;
d) studiare concavità, convessità e flessi;
e) tracciarne il grafico.

39. Data la funzione
$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} \ ,$$
a) precisare il dominio massimale e discutere il segno;
b) dire se è pari o dispari e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) studiare crescenza, decrescenza ed estremi relativi;
d) sapendo che f'' ha lo stesso dominio di f' e che f'' è sempre positiva nel suo dominio, tracciare il grafico $y = f(x)$.

40. Data la funzione
$$f(x) = \ln(x^2 - 1)^3 \ ,$$
a) precisare il dominio massimale e dire se è pari o dispari;
b) discutere il segno (precisando gli eventuali zeri) e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) studiare crescenza, decrescenza ed estremi relativi;
d) sapendo che
$$f''(x) = -\frac{6(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \ ,$$
tracciare il grafico $y = f(x)$.

41. Data la funzione
$$f(x) = |x^3 - 6x| \ ,$$
a) precisare il dominio massimale e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
b) dire se è pari o dispari e discutere il segno (precisando gli eventuali zeri);
c) studiare crescenza, decrescenza ed estremi relativi;
d) studiare concavità, convessità e flessi;
e) tracciarne il grafico.

42. Data la funzione
$$f(x) = \ln\left(\frac{4+3x^2}{4-3x^2}\right) \ ,$$
a) precisare il dominio massimale e discutere il segno;
b) dire se è pari o dispari e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) studiare crescenza, decrescenza ed estremi relativi;
d) studiare concavità, convessità e flessi;
e) tracciarne il grafico.

43. Data la funzione
$$f(x) = x^2 e^{-x} ,$$
a) precisare il dominio massimale e discutere il segno;
b) dire se è pari o dispari e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) studiare crescenza, decrescenza ed estremi relativi;
d) studiare concavità, convessità e flessi;
e) tracciarne il grafico.

44. Data la funzione
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} ,$$
a) precisare il dominio massimale e discutere il segno;
b) dire se è pari o dispari e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) studiare crescenza, decrescenza ed estremi relativi;
d) studiare concavità, convessità e flessi;
e) tracciarne il grafico.

45. Data la funzione
$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) ,$$
a) precisare il dominio massimale e discutere il segno;
b) dire se è pari o dispari e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) studiare crescenza, decrescenza ed estremi relativi;
d) studiare concavità, convessità e flessi;
e) tracciarne il grafico.

46. Data la funzione
$$f(x) = \frac{3x-x^2-2}{x^2} ,$$
a) precisare il dominio massimale e discutere il segno;
b) dire se è pari o dispari e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
c) studiare crescenza, decrescenza ed estremi relativi;
d) studiare concavità, convessità e flessi;
e) tracciarne il grafico.

1. Sia $p_2(x)$ il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = e^{3x}$$
intorno al punto $x_0 = 0$. Calcolare $p_2(2)$.

2. Sia $p_2(x)$ il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = x + e^x$$
intorno al punto $x_0 = 0$. Calcolare $p_2(3)$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = x^3 + 2x + 1$$
intorno al punto $x_0 = 0$.

4. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = \cos(2x)$$
intorno al punto $x_0 = 0$.

5. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = 3 \ln x$$
intorno al punto $x_0 = 3$.

6. Sia $p_2(x)$ il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = \ln(2x + 3)$$
intorno al punto $x_0 = 0$. Calcolare $p_2(6)$.

7. Sia $p_2(x)$ il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = e^{2x}$$
intorno al punto $x_0 = 0$. Calcolare $p_2(3)$.

8. Sia $p_2(x)$ il polinomio di Taylor di grado 2 per
$$f(x) = \ln(2x)$$
intorno al punto $x_0 = 1$. Calcolare $p_2(2)$.

9. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di
$$f(x) = x + \ln(4x - 7)$$
intorno al punto $x_0 = 2$.

10. Data la funzione
$$f(x) = (x+1)^3 \ln(x+1) \ ,$$
scrivere il suo polinomio di Taylor di grado 2 intorno al punto $x_0 = 0$.

11. Data la funzione
$$f(x) = \frac{3}{1-x} \ ,$$
scrivere il suo polinomio di Taylor di grado 2 intorno al punto $x_0 = 0$.

12. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di
$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{7}{2} + \ln(2x)$$
intorno al punto $x_0 = 3$ (scrivere la risposta nella forma $p_2(x) = ax^2 + bx + c$).

13. Detto $p_2(x)$ il polinomio di Taylor di grado 2 di
$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \sin(x^2) + \ln(1+2x)$$
intorno al punto $x_0 = 0$, si ha

a $p_2(1) = 2$ **b** $\int_0^1 p_2(x)dx = \frac{1}{6}$
c $p_2(2) = 1$ **d** $\int_0^1 p_2(x)dx = \frac{5}{6}$

14. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di
$$f(x) = x + \ln(2x-7)$$
intorno al punto $x_0 = 4$ (dare il risultato nella forma $ax^2 + bx + c$).

15. Sia $p_2(x)$ il polinomio di Taylor di grado 2 di
$$f(x) = x^2 + \cos x$$
intorno al punto $x_0 = 0$. Allora

a $p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ **b** $p_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$
c $p_2(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}$ **d** $p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Integrali

1. Calcolare l'area della regione di piano compresa fra l'asse x, le rette $x = 0$ e $x = 1$ e il grafico della funzione $f(x) = x\, e^{x^2+3}$.

2. Dire se il seguente integrale converge o diverge e, se converge, calcolarne il valore:
$$\int_0^1 x \ln x^6 \, dx$$
(giustificare il passaggio al limite necessario a risolvere l'esercizio).

3. Dire se il seguente integrale improprio esiste e, se esiste, calcolarne il valore:
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2^x} \, dx.$$

4. Calcolare
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \, dx.$$

5. Calcolare l'area della regione del semipiano $x \geq 0$ compresa fra l'asse x, la retta $3x - y = 0$ e la parabola $y = -x^2 + 4$.

6. Calcolare
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + e} \, dx.$$

7. Calcolare l'integrale
$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} \, dx.$$
Dire se l'integrale
$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} \, dx$$
converge o diverge e, se converge, calcolarne il valore.

8. Sapendo che $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 1$, calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-\frac{x^2}{2}} 3x^2 \, dx$.

9. Calcolare i seguenti integrali:
$$\int_1^2 \frac{12\, x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx \qquad \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$$

10. Calcolare i seguenti integrali:
$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \qquad 4 \int_1^2 x \ln x \, dx$$

11. Dire se il seguente integrale improprio esiste e, se esiste, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{3^x}\, dx.$$

12. Calcolare, se esiste, il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{6x+3}{e^{x^2+x}}\, dx.$$

13. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 (6x+3)\, e^x\, dx$.

14. Calcolare, se esiste, il seguente integrale:

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx.$$

15. Qual è la funzione $f(x)$ il cui grafico passa per il punto di coordinate $(0,1)$ e la cui derivata è $\dfrac{6x}{3x^2+1}$?

16. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^e x^2 \ln x\, dx.$$

17. Si calcoli il valore del seguente integrale

$$\int_1^{+\infty} 11e^{-x} x\, dx$$

18. Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^2 2e^{\sqrt{x^3+1}} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\, dx\,.$$

19. Calcolare l'area della regione di piano compresa fra la parabola di equazione $y = -x^2 + 2x$ e la retta di equazione $y = \frac{1}{2}x$.

20. Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_2^4 [\ln(x^3) + x]\, dx\,.$$

21. Calcolare il valore dei seguenti integrali:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \qquad\qquad \int_2^4 \ln(2x)\, dx.$$

22. Sia f integrabile su (a,b). Allora $\displaystyle\int_a^b [-2f(x) - 1]\, dx = -2\int_a^b f(x)\, dx - (b-a)\,.$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$

23. Calcolare l'area di piano compresa fra l'asse x e la curva di equazione $y = -x^2 + 9$.

24. Calcolare la primitiva della funzione

$$f(x) = 1 + xe^{1-x^2}$$

che vale $3/2$ in $x = 1$.

25. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_2^3 \ln \frac{1}{x}\, dx \qquad \int_0^1 \frac{8x}{3x^2+4}\, dx.$$

26. Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continua. Per ogni $x \in [a, b]$, si definisca la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Allora F è
a continua ma non derivabile in (a, b) **b** derivabile ma non continua in (a, b)
c continua e derivabile in (a, b) **d** né continua né derivabile in (a, b).

27. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 (xe^{x^2+1} - 3)\, dx.$$

28. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x}{3x^2+1}\, dx.$$

29. Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^3 \left(\frac{4}{x} + 2\right) dx.$$

30. Calcolare la primitiva della funzione

$$f(x) = e^{2x} + 1$$

che, per $x = 0$, vale 1.

31. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx.$$

32. Calcolare il seguente integrale (esprimere il risultato con 3 cifre decimali):

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+2}\, dx.$$

33. Calcolare il seguente integrale (esprimere il risultato con 3 cifre decimali):

$$\int_0^{\sqrt{2}} xe^{x^2}\, dx.$$

34. Sia f una funzione integrabile su $[-1,1]$. Allora

a se f è pari, $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^1 f(x)\,dx$
b se f è dispari, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$
c se f è pari, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$
d se f è dispari, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

35. Stabilire la risposta corretta

$$\int_1^2 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} 2(\ln 5 - \ln 2) & \boxed{\mathbf{a}} \\ \ln 5 & \boxed{\mathbf{b}} \\ \ln(5/2) & \boxed{\mathbf{c}} \\ \ln(2/5) & \boxed{\mathbf{d}} \end{cases}$$

36. Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 \frac{3}{x+1}\,dx$$

37. Calcolare la primitiva (antiderivata) della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}, \qquad x > 0$$

che vale 2 in $x = 4$.

38. Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^3 \frac{1}{x+1}\,dx\,.$$

39. Calcolare la primitiva della funzione

$$f(x) = 2e^{3x} + 1$$

che, per $x = 0$ vale 2.

40. L'integrale

$$\int_a^b f(x+3)\,dx$$

vale

a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + f(3)(b-a)$ **b** $\displaystyle\int_{a+3}^{b+3} f(x)\,dx$
c $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **d** $f(b+3) - f(a+3)$.

41. L'integrale definito $\displaystyle\int_0^1 f(3x)\,dx$ è uguale a

a $\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,dt$ **b** $\int_0^1 f(t)\,dt$ **c** $3\int_0^1 f(t)\,dt$
d nessuna delle espressioni precedenti.

42. L'integrale indefinito $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/2}}\,dx$

$\boxed{\mathbf{a}}$ è uguale a 1 $\boxed{\mathbf{b}}$ è uguale a 2 $\boxed{\mathbf{c}}$ diverge
$\boxed{\mathbf{d}}$ nessuna delle precedenti.

43. Calcolare l'area compresa tra il grafico della retta $y = 3$ e il grafico della parabola $y = -x^2+4$.

44. L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$ vale

$\boxed{\mathbf{a}}$ $3/2$ $\boxed{\mathbf{b}}$ 2 $\boxed{\mathbf{c}}$ $+\infty$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $-\infty$.

45. L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$

$\boxed{\mathbf{a}}$ diverge $\boxed{\mathbf{b}}$ vale $\ln 2$ $\boxed{\mathbf{c}}$ vale $1/2$
$\boxed{\mathbf{d}}$ nessuna delle precedenti.

46. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_2^3 x\,e^{x^2}\,dx\ .$$

47. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^2 \frac{x}{2x^2+15}\,dx\ .$$

48. Posto $I = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$. Allora $2eI+1$ è uguale a

$\boxed{\mathbf{a}}$ $\frac{e}{2}$ $\boxed{\mathbf{b}}$ e $\boxed{\mathbf{c}}$ $2e$ $\boxed{\mathbf{d}}$ nessuna delle precedenti.

49. Calcolare la primitiva della funzione

$$f(x) = e^{3x} + \frac{1}{x+1}$$

che vale 1 in $x = 0$.

50. L'integrale

$$\int_{-1}^0 \frac{1-x}{1-x^2}\,dx$$

$\boxed{\mathbf{a}}$ converge $\boxed{\mathbf{b}}$ diverge
$\boxed{\mathbf{c}}$ vale 1 $\boxed{\mathbf{d}}$ vale $\ln 2$.

51. L'integrale

$$\int_{-1/3}^0 e^{3x+1}\,dx$$

vale

$\boxed{\mathbf{a}}$ $\frac{1}{3}(e-1)$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $3(e-1)$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $e-1$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $3e+1$.

Domande Teoriche sulle Funzioni

1. Sia $f : [0,5] \to \mathbf{R}$ continua e invertibile e tale che $f(2) = 0$. Allora

   $\boxed{\textbf{a}}$ $f(0)f(5) = 0$ $\boxed{\textbf{b}}$ $f(0)/f(5) > 0$ $\boxed{\textbf{c}}$ $f(0)f(5) < 0$ $\boxed{\textbf{d}}$ $f(0)/f(5) = 1$.

2. Sia $f : [0,5] \to \mathbf{R}$ continua. Allora f è integrabile su $(0,5)$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

3. Sia f una funzione tale che
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)} = 3.$$
   Allora

   $\boxed{\textbf{a}}$ f è continua in $x = 2$ $\boxed{\textbf{b}}$ non esiste $\lim_{x\to 2} f(x)$
   $\boxed{\textbf{c}}$ non esiste $\lim_{x\to 2^+} 1/f(x)$ $\boxed{\textbf{d}}$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$.

4. f dispari implica f^3 dispari. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

5. Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ e derivabile nell'intervallo (a,b). Allora
   $\boxed{\textbf{a}}$ $\exists c \in [a,b]$ t.c. $f(c) = \dfrac{f'(b) - f'(a)}{b-a}$;
   $\boxed{\textbf{b}}$ $\exists c \in [a,b]$ t.c. $f'(c) = 0$;
   $\boxed{\textbf{c}}$ f non può essere costante in $[a,b]$;
   $\boxed{\textbf{d}}$ f ammette massimo assoluto in $[a,b]$.

6. Se f è integrabile in (a,b), allora f è continua in (a,b). $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

7. Sia $f(x) = |(x-1)^2 - 1|$. Allora f è

   $\boxed{\textbf{a}}$ continua $\boxed{\textbf{b}}$ discontinua $\boxed{\textbf{c}}$ derivabile $\boxed{\textbf{d}}$ pari

8. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile e crescente. Sia $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione integrale
$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx\,.$$
   Allora F è

   $\boxed{\textbf{a}}$ dispari $\boxed{\textbf{b}}$ convessa $\boxed{\textbf{c}}$ concava $\boxed{\textbf{d}}$ pari

9. Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ non-decrescente. Se $x = 0$ è un punto di massimo assoluto allora f è costante. $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$

10. Sia $f : (0,1] \to \mathbf{R}$ continua. Allora
    $\boxed{\textbf{a}}$ f è derivabile in $(0, \frac{1}{2})$. $\boxed{\textbf{b}}$ f è integrabile in $(\frac{1}{2}, 1)$.
    $\boxed{\textbf{c}}$ f è integrabile in $(0, \frac{1}{2})$. $\boxed{\textbf{d}}$ f è derivabile in $(\frac{1}{2}, 1)$.

11. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ crescente. Allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$

12. Sia $f(x) = |x+1| - 1$. Allora

$\boxed{\mathbf{a}}$ f è continua e invertibile. $\boxed{\mathbf{b}}$ f è discontinua e non invertibile.

$\boxed{\mathbf{c}}$ f è continua e non invertibile. $\boxed{\mathbf{d}}$ f è discontinua e invertibile.

13. Sia $f(x) = x^{1.54}$. Allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$

14. Sia f una funzione continua in $(0, +\infty)$. Allora

$\boxed{\mathbf{a}}$ f è integrabile in $(0,1)$. $\boxed{\mathbf{b}}$ f è derivabile in $(0,1)$. $\boxed{\mathbf{c}}$ f è derivabile in $[1,10]$. $\boxed{\mathbf{d}}$ f è limitata in $[1,10]$.

15. Sia $f : (-\infty, 0) \to \mathbf{R}$ crescente. Allora $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$. $\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$

16. Sia f una funzione continua in $[1,2]$ e derivabile in $(1,2)$ con $f' > 0$. Allora f

$\boxed{\mathbf{a}}$ ha min in $x = 2$ $\boxed{\mathbf{b}}$ non ha min
$\boxed{\mathbf{c}}$ ha max in $x = 2$ $\boxed{\mathbf{d}}$ non ha max

17. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Se $f' = 0$ allora $f = 0$. $\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$

18. Sia f una funzione continua in $[0, +\infty)$ e derivabile in $(0, +\infty)$ con $f' > 0$. Allora

$\boxed{\mathbf{a}}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
$\boxed{\mathbf{c}}$ f ha un minimo $\boxed{\mathbf{d}}$ f ha un massimo

19. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e derivabile, tale che $f(x) > 0$ in $(-\infty, 0)$ e $f(x) < 0$ in $(0, +\infty)$. Allora $\boxed{\mathbf{a}}$ $f(0) \geq 0$ e $f'(0) \leq 0$
$\boxed{\mathbf{b}}$ $f(0) \geq 0$ e $f'(0) \geq 0$
$\boxed{\mathbf{c}}$ $f(0) \leq 0$ e $f'(0) > 0$
$\boxed{\mathbf{d}}$ $f(0) < 0$ e $f'(0) < 0$

20. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pari e derivabile. Allora f' è

$\boxed{\mathbf{a}}$ pari $\boxed{\mathbf{b}}$ dispari $\boxed{\mathbf{c}}$ crescente $\boxed{\mathbf{d}}$ decrescente

21. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = |x^2 - 1| \, .$$

Allora

$\boxed{\mathbf{a}}$ esiste $x_m \in \mathbb{R}$ tale che f ha minimo assoluto in x_m
$\boxed{\mathbf{b}}$ se f ha minimo assoluto in x_m, allora $f'(x_m) = 0$
$\boxed{\mathbf{c}}$ non esiste $x_m \in \mathbb{R}$ tale che f ha minimo assoluto in x_m
$\boxed{\mathbf{d}}$ non esiste $x_m \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_m) = 0$.

22. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente crescente. Allora

$\boxed{\mathbf{a}}$ f^2 è strettamente crescente $\boxed{\mathbf{b}}$ f non può essere pari

$\boxed{\mathbf{c}}$ f è derivabile $\boxed{\mathbf{d}}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

23. Sia $f(x) = x^2$ e sia F una primitiva di f. Allora

$\boxed{\textbf{a}}$ $F(0) = 0$ $\boxed{\textbf{b}}$ F è continua

$\boxed{\textbf{c}}$ F è decrescente $\boxed{\textbf{d}}$ F è pari.

24. Sia

$$f(x) = \frac{x^{2\lambda} + x + 1}{x^6 + 2},$$

dove λ è un numero naturale. Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, allora

$\boxed{\textbf{a}}$ $\lambda = 3$ $\boxed{\textbf{b}}$ $\lambda \geq 3$ $\boxed{\textbf{c}}$ $\lambda < 3$ $\boxed{\textbf{d}}$ $\lambda > 3$.

25. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 2^{\lambda x} & \text{se } x \leq 1 \\ 3 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Per quale valore di $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua?

$\boxed{\textbf{a}}$ $\lambda = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ $\boxed{\textbf{b}}$ $\lambda = \log_3 2$ $\boxed{\textbf{c}}$ $\lambda = \ln 3$ $\boxed{\textbf{d}}$ $\lambda = 3$.

26. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Barrare l'affermazione corretta.

$\boxed{\textbf{a}}$ f integrabile in $(a, b) \Rightarrow f$ limitata in (a, b)
$\boxed{\textbf{b}}$ f limitata in $(a, b) \Rightarrow f$ integrabile in (a, b)
$\boxed{\textbf{c}}$ f continua in $[a, b] \Rightarrow f$ integrabile in (a, b)
$\boxed{\textbf{d}}$ f integrabile in $(a, b) \Rightarrow f$ continua in (a, b).

27. Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è continua, allora f ammette massimo in

$\boxed{\textbf{a}}$ (a,b) $\boxed{\textbf{b}}$ [a,b) $\boxed{\textbf{c}}$ (a,b] $\boxed{\textbf{d}}$ [a,b] .

28. Se la funzione f è dispari allora $|f|$ è

$\boxed{\textbf{a}}$ dispari $\boxed{\textbf{b}}$ crescente $\boxed{\textbf{c}}$ pari $\boxed{\textbf{d}}$ decrescente.

29. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione data da $f(x) = \big||x - 1| - 1\big|$. Allora

$\boxed{\textbf{a}}$ f ha un solo minimo assoluto
$\boxed{\textbf{b}}$ f non ha massimo assoluto
$\boxed{\textbf{c}}$ f non ha massimo relativo
$\boxed{\textbf{d}}$ f non ha minimo relativo .

30. Siano $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 3x^2 + 2$. Allora $g(f(x))$ è la funzione

$\boxed{\textbf{a}}$ $3(x^2 + 1)$
$\boxed{\textbf{b}}$ $3x^3 + 3x^2 + 2x + 2$
$\boxed{\textbf{c}}$ $3x^2 + 6x + 5$
$\boxed{\textbf{d}}$ $3x^2 + 1$.

31. Sia f una funzione reale continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) tale che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora

$\boxed{\textbf{a}}$ $|f|$ è derivabile in (a, b)
$\boxed{\textbf{b}}$ $|f|$ ammette minimo in (a, b)
$\boxed{\textbf{c}}$ esiste un unico $c \in (a, b)$ in cui $|f|$ si annulla
$\boxed{\textbf{d}}$ esiste $c \in (a, b)$ in cui la derivata prima di $|f|$ si annulla.

32. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione reale continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) tale che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora

$\boxed{\textbf{a}}$ f' è sempre positiva
$\boxed{\textbf{b}}$ esiste $c \in [a, b]$ tale che $f'(c) = 0$
$\boxed{\textbf{c}}$ ha minimo assoluto in $x = a$ e massimo assoluto in $x = b$
$\boxed{\textbf{d}}$ nessuna delle precedenti.

33. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La funzione

$$g(x) = f(x) - f(-x)$$

$\boxed{\textbf{a}}$ è sempre nulla $\boxed{\textbf{b}}$ è sempre pari $\boxed{\textbf{c}}$ è sempre dispari
$\boxed{\textbf{d}}$ nessuna delle precedenti.

34. Sia $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Allora

$\boxed{\textbf{a}}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$
$\boxed{\textbf{b}}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$
$\boxed{\textbf{c}}$ $f(x)$ ammette limite finito per $x \to 1$
$\boxed{\textbf{d}}$ $f(x)$ non ammette limite finito per $x \to 1$.

35. Sia $f(x) = |x^3|$. Allora

$\boxed{\textbf{a}}$ f è pari $\boxed{\textbf{b}}$ f è dispari $\boxed{\textbf{c}}$ f è crescente
$\boxed{\textbf{d}}$ nessuna delle precedenti.

36. Sia $f(x) = |x + 1|$. Allora f

$\boxed{\textbf{a}}$ è derivabile in $\mathbb{R}$ $\boxed{\textbf{b}}$ non ha minimo in $\mathbb{R}$
$\boxed{\textbf{c}}$ ha massimo in $\mathbb{R}$ $\boxed{\textbf{d}}$ è continua in $\mathbb{R}$.

37. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Dire quali delle seguenti affermazioni è <u>falsa</u>:

$\boxed{\textbf{a}}$ se f è pari, allora $f'(0) = 0$
$\boxed{\textbf{b}}$ se f è dispari, allora $f(0) = 0$
$\boxed{\textbf{c}}$ se f è pari, allora f' è pari
$\boxed{\textbf{d}}$ se f è dispari, allora f' è pari.

38. Si consideri la funzione $f(x) = \log_a x$ con dominio $(0, +\infty)$. Allora

$\boxed{\mathbf{a}}$ se $lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ allora $a > 1$
$\boxed{\mathbf{b}}$ se $lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ allora $0 < a < 1$
$\boxed{\mathbf{c}}$ se $lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ allora $a > 1$
$\boxed{\mathbf{d}}$ se $lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ allora $0 < a < 1$.

39. Si consideri la funzione $f(x) = |x^2 - 1|$ con dominio $\mathbb{R}$. Allora

$\boxed{\mathbf{a}}$ f è derivabile
$\boxed{\mathbf{b}}$ f non è continua
$\boxed{\mathbf{c}}$ f è limitata
$\boxed{\mathbf{d}}$ f ha un massimo relativo.

40. Sia f una funzione derivabile due volte che ha in π un punto di massimo assoluto. Allora

$\boxed{\mathbf{a}}$ $f''(\pi) \geq 0$ $\boxed{\mathbf{b}}$ $f''(\pi) \leq 0$ $\boxed{\mathbf{c}}$ $f'(\pi) > 0$ $\boxed{\mathbf{d}}$ $f''(\pi) = 0$.

41. Sia f una funzione reale continua in $[0, +\infty)$. Allora

$\boxed{\mathbf{a}}$ f ha minimo
$\boxed{\mathbf{b}}$ f è derivabile
$\boxed{\mathbf{c}}$ f è integrabile in $(99, 1000)$
$\boxed{\mathbf{d}}$ f è limitata in $[99, \infty)$.

42. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\mathbf{a}}$ f limitata in $[0, 1] \Rightarrow f$ integrabile in $[0, 1]$
$\boxed{\mathbf{b}}$ f continua in $[0, 1] \Rightarrow f$ integrabile in $(0, 1)$
$\boxed{\mathbf{c}}$ f continua in $(0, 1) \Rightarrow f$ integrabile in $[0, 1]$
$\boxed{\mathbf{d}}$ f integrabile in $[0, 1] \Rightarrow f$ continua in $[0, 1]$

43. Sia $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora

$\boxed{\mathbf{a}}$ f è limitata in $(0, 1)$
$\boxed{\mathbf{b}}$ f è integrabile in $[\frac{1}{10}, \frac{9}{10}]$
$\boxed{\mathbf{c}}$ f ha massimo e minimo in $(0, 1)$
$\boxed{\mathbf{d}}$ f è derivabile in $(0, 1)$.

1. Dire se il sistema lineare
$$\begin{cases} 8\,x + 2\,y = 2 \\ 12\,x + 3\,y = 3 \end{cases}$$
ammette un'unica soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione.

2. Dire se il sistema lineare
$$\begin{cases} 6\,x - 3\,y = 2 \\ -8\,x + 4\,y = -3 \end{cases}$$
ammette un'unica soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione.

3. Dire se il sistema lineare
$$\begin{cases} 6\,x + 3\,y = 9 \\ 8\,x + 4\,y = 12 \end{cases}$$
ammette un'unica soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione.

4. Dire se il seguente sistema lineare ammette un'unica soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione (nel primo caso, calcolare la soluzione):
$$\begin{cases} x + 2\,y = \ln 18 \\ y = \ln 3 \end{cases}$$

5. Dire se il seguente sistema lineare ammette un'unica soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione (nel primo caso, calcolare la soluzione):
$$\begin{cases} 3\,x + 15\,y = 0 \\ 2\,x + 10\,y = 1 \end{cases}$$

6. Dire se il sistema lineare
$$\begin{cases} 6\,x - 3\,y = 2 \\ -8\,x + 4\,y = -8/3 \end{cases}$$
ammette un'unica soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione.

7. Dire se il sistema lineare
$$\begin{cases} 6x - 3y = 8 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$$
ammette un'unica soluzione, infinite soluzioni o nesuna soluzione.

8. Dire se il seguente sistema lineare ammette un'unica soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione (nel primo caso, calcolare la soluzione):
$$\begin{cases} x + z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + 4z = 4. \end{cases}$$

9. Dire se il seguente sistema lineare ammette un'unica soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione (nel primo caso, calcolare la soluzione):
$$\begin{cases} 6x - 9y = -15 \\ -4x + 6y = 10. \end{cases}$$

10. Dire se il seguente sistema lineare ammette un'unica soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione (nel primo caso, calcolare la soluzione):

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2y + 4z = 8 \\ 3x + 2y - z = -5. \end{cases}$$

11. Dire se il sistema lineare

$$\begin{cases} -6x + 3y = 1 \\ 8x - 4y = 2 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione.

12. Dire se il sistema lineare

$$\begin{cases} 6x - 3y = 8 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione.

13. Dire se il seguente sistema linare ammette un'unica soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione (nel primo caso, calcolare la soluzione):

$$\begin{cases} 6x - 4y = 6 \\ 9x + 6y = -27. \end{cases}$$

14. Dire se il seguente sistema lineare ammette un'unica soluzione, nessuna soluzione o infinite soluzioni (nel caso in cui ammetta un'unica soluzione, calcolarla):

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 4y = 6 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

15. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y/2 = 3 \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

Allora

$\boxed{\mathbf{a}}$ esistono infinite soluzioni.

$\boxed{\mathbf{b}}$ esiste un'unica soluzione.

$\boxed{\mathbf{c}}$ esistono due soluzioni.

$\boxed{\mathbf{d}}$ il sistema è impossibile.

16. Dire se il seguente sistema lineare ammette un'unica soluzione, nessuna soluzione o infinite soluzioni (nel primo caso, calcolare la soluzione):

$$\begin{cases} 6x + 2y = -1 \\ 2x + y = 3. \end{cases}$$

17. Dire se il seguente sistema lineare ammette un'unica soluzione, nessuna soluzione o infinite soluzioni (nel primo caso, calcolare la soluzione):

$$\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 2x + 2y = 2. \end{cases}$$

18. Il sistema lineare $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ -x - y - z = 1 \end{cases}$ ha

a una e una sola soluzione data da $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

b infinite soluzioni **c** nessuna soluzione

d una e una sola soluzione data da $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$.

Problemi Elementari

1. Si vogliono ottenere 15 litri di una miscela di due sostanze A e B, dove la quantità di A è pari a 3 volte la quantità di B. Quanti litri di sostanza A occorrono ?

2. Si ha a disposizione un budget di 160 euro e si vogliono comprare due prodotti, A e B, in modo che la quntità di A sia il doppio della quantità di B. Il costo unitario di A è di 1 euro e quello di B è di 2 euro. Quante unità di A si possono comprare ?

3. Si vogliono ottenere 12 litri di una miscela di due sostanze A e B, dove la quantità di B è pari a 4 volte la quantità di A. Quanti litri di sostanza A occorrono ?

4. Si vuole comporre una dieta da 1375 Kcal con due alimenti, A e B, im modo che la quantità di B sia pari a tre volte quella di A. Il contenuto calorico di 100 grammi di A è 450 Kcal e quello di 100 grammi di B è 400 Kcal. Quanti grammi di B andranno utilizzati ?

5. Si ha a disposizione un budget di 140 euro e si vogliono comprare due prodotti, A e B, in modo che la quantità di A sia il doppio della quantità di B. Il costo unitario di A è di 2 euro e quello di B è di 3 euro. Quante unità di A si possono comprare ?

6. Si vogliono ottenere 6 chilogrammi di una composto costituito da due sostanze A e B, mescolando una quantità di B pari a 4 volte la quantità di A. Quanti chilogrammi di sostanza A entreranno nel composto ?

7. Si hanno 40 chilogrammi di una miscela costituita per il 25% dalla sostanza A e per il restante 75% dalla sostanza B. Quanti chilogrammi di A bisogna aggiungere se si vuole che la miscela finale sia costituita per il 35% dalla sostanza A ?

8. Si hanno 120 grammi complessivi di due sostanze, il 30% dei quali è costituito dalla sostanza A. Vogliamo formare una miscela di A e B, formata per il 25% di A e contenente tutta la B che si ha a disposizione. Quanti grammi di A avanzeranno ?

9. La popolazione A ha un numero di individui pari al 30% del numero degli individui della popolazione B. Al termine di un certo intervallo di tempo, la popolazione B è aumentata del 20% e la popolazione A è rimasta invariata. Calcolare la percentuale di A rispetto a B.

10. La popolazione A ha un numero di individui pari al 30% del numero degli individui della popolazione B. Al termine di un certo intervallo di tempo, la popolazione B è diminuita del 10% e la popolazione A è rimasta invariata. Calcolare la percentuale di A rispetto a B.

11. Si vogliono comporre 150 kilogrammi di una miscela di due sostanze, A e B, in modo che il volume di A sia il doppio del volume di B. Il peso per unità di volume di A è di $1\,[Kg/dm^3]$ (1 kilogrammo al decimetro cubo) e quello di B è di $3\,[Kg/dm^3]$ (3 kilogrammi al decimetro cubo). Quanti decimetri cubi di A si devono utilizzare ?

12. Si hanno a disposizione 1375 euro e si vogliono comprare due sostanze, A e B, in modo che la quantità di B sia pari a tre volte quella di A. Il prezzo di 100 grammi di A è 45 euro e quello di 100 grammi di B è 40 euro. Quante grammi di B si possono comprare ?

13. La popolazione A ha un numero di individui pari al 40% della popolazione B. Al termine di un certo intervallo di tempo, la popolazione B è aumentata del 60% e la popolazione A è rimasta invariata. Calcolare la percentuale di A rispetto a B.

14. Un titolo aumenta il suo valore del 10% nel corso del 2002 ma perde il 10% nel corso del 2003. All'inizio del 2002 è stato investito in questo titolo un capitale C. Determinare la perdita di valore del capitale alla fine del 2003 (esprimere il risultato in percentuale).

15. Il 40% degli individui della popolazione T è nato prima del 1990. Tra questi, 1/5 è nato dopo il 1980. Determinare la percentuale dei nati tra il 1980 e il 1990 e la percentuale dei nati dopo il 1980 rispetto all'intera popolazione T.

16. Una coltura batterica è costituita dai batteri A e B. All'istante t_0, i batteri A sono il doppio dei batteri B. All'istante t_1, i batteri A sono aumentati del 20% e i batteri B sono diminuiti del 20%. Calcolare la percentuale dei batteri B rispetto ai batteri A all'istante t_1.

17. Le sostanze A e B formano una miscela di 2 300 cl., in cui il volume di A è pari al 15% di quello di B. Calcolare quanti cl. di A e di B sono presenti nella miscela.

18. Inizialmente, la popolazione A ha un numero di individui pari al 40% della popolazione B. Al termine di un certo intervallo di tempo, la popolazione B è aumentata del 60% e la popolazione A è rimasta invariata. Calcolare la nuova percentuale di A rispetto a B.

19. Tutti gli abitanti di X hanno almeno un telefono, fisso o cellulare. Sapendo che l'80% degli abitanti possiede un telefono cellulare e che il 90% degli abitanti possiede un telefono fisso, calcolare la percentuale degli abitanti che possiede sia un telefono cellulare che un telefono fisso.

20. Si ha 1 litro di una miscela di acqua e etanolo al 7% (cioè in cui il volume di etanolo è il 7% del volume totale). Dopo aver calcolato il volume di etanolo presente nella miscela, dire quanti litri di acqua bisogna aggiungere per ottenere una miscela al 3% (si sta supponendo che nella reazione solvente-soluto si conservino tutti i volumi).

21. Si hanno 240 grammi complessivi di due sostanze A e B, il 20% dei quali è cosituito da A. Vogliamo formare una miscela di A e B, formata per il 4% di A e contenene tutta la B a disposizione. Quanti grammi di A avanzeranno?

22. Si vuole ottenere una miscela di A e B, in cui il volume di B sia $750\,ml$ e il volume di A sia pari al 5 % del volume complessivo. Supponendo che nella miscela si conservino i volumi, calcolare il volume di A.

23. In una popolazione P il 33% ha più di 50 anni, il 25% ha più di 55 anni. Le persone di età compresa tra 50 e 55 anni sono 64.000. Calcolare il numero di individui della popolazione P.

24. Abbiamo 5 litri di soluzione al 25% e 5 litri di soluzione al 50%. Usando tutta la prima e aggiungendo una parte della seconda si vuole ottenere una soluzione al 30%. Quanti litri di soluzione al 50% sono necessari?

25. Un litro di soluzione A contiene $10gr$ di sodio. Un litro di soluzione B contiene $100gr$ di sodio. Come si devono mescolare A e B per ottenere un litro di soluzione che contiene $40gr$ di sodio?

26. Nel corso del 2001 (i.e. dal 01/01/01 al 31/12/01) il prezzo di un grammo d'oro è aumentato del $5,2\%$. Nel corso del 2002 è aumentato dell'$8,4\%$. Calcolare la variazione percentuale nel corso del biennio $2002 - 2003$.

27. Si vogliono ottenere 18 litri di una miscela di A e B, in cui il volume di A sia 3 volte il volume di B. Quanti litri di sostanza A occorrono? (Si suppone che nella reazione solvente-soluto si conservino tutti i volumi)

28. Si vogliono ottenere 10 litri di una miscela di A e B, in cui il volume di A sia 4 volte il volume di B. Quanti litri di sostanza A occorrono? (Si suppone che nella reazione solvente-soluto si conservino tutti i volumi)

29. Si hanno a disposizione due soluzioni, A e B. Unendo 3 lirti di A e 4 litri di B si ottiene una soluzione al 24%. Sapendo che la concentrazione di A è pari al 20% (in altre parole, A è una soluzione al 20%), dire qual è la concentrazione di B.

30. Avendo a disposizione 5 litri di soluto e 5 litri di solvente si preparano 5 litri di soluzione al 25%. Quanti litri di soluto avanzano? (Si suppone che si conservino i volumi).

31. Si acquista a 51 euro un costume da bagno in saldo con sconto del 15%. Dire qual era il suo prezzo originale.

32. Si investe un capitale in un titolo il cui valore aumenta del 20% nel corso del primo anno e poi diminuisce del 20% nel corso del secondo anno. Calcolare il capitale iniziale, sapendo che il capitale alla fine del secondo anno è di 288 000 euro.

33. Abbiamo 3 litri di soluzione al 15% e vogliamo diluirla al 10%. Quanto solvente dobbiamo aggiungere? (Si consideri il caso in cui si conservino tutti i volumi).

34. Una popolazione è composta per il 55% da donne e per il 45% da uomini. Il 17% delle donne e il 30% degli uomini sono fumatori. Calcolare la percentuale di fumatori rispetto al totale della popolazione.

35. Un paio di scarponi da trekking, scontati del 12%, costa $101,20$ euro. Calcolare il prezzo intero.

36. Si vogliono ottenere 24 litri di una miscela di due sostanze A e B, dove la quantità di B è pari a 3 volte la quantità di A. Quanti litri di sostanza B occorrono?

37. Due gruppi A e B formano una popolazione in cui gli individui del gruppo B sono la metà degli individui del gruppo A (cioè la percentuale degli individui del gruppo B rispetto agli individui del gruppo A è il 50%). Dopo un determinato intervallo di tempo, il gruppo A è aumentato del 30% e il gruppo B è diminuito del 48%. Calcolare la percentuale degli individui del gruppo B rispetto agli individui del gruppo A al tempo finale.

38. Siano A una soluzione all'8% e B una soluzione al 15%. Qual è il rapporto fra il numero ℓ_A di litri di A e il numero ℓ_B di litri di B che si devono mescolare per ottenere una soluzione al 10%? (cioè: calcolare $k = \ell_A/\ell_B$)

39. La metà degli individui di una popolazione P ha più di 40 anni. Sapendo che il numero delle persone di età superiore a 50 anni è 1 950 e la percentuale di persone con età compresa tra 40 e 50 anni è il 20% della popolazione totale, calcolare il numero degli individui di P.

40. Acquistando un libro con il 20 % di sconto si risparmiano 6.80 euro sul prezzo di copertina. Qual è il prezzo di copertina?

41. Il 1^o gennaio 2010 si è acquistato un titolo il cui valore, nel corso del 2010, è diminuito del 20%. Di quanto dovrebbe aumentare (in percentuale) nel corso del 2011 affinchè il 31 dicembre 2011 il titolo valga quanto il 1^o gennaio 2010?

42. Si investe un capitale in un titolo il cui valore aumenta del 10% nel corso del primo anno e poi diminuisce del 10% nel corso del secondo anno. Calcolare il capitale iniziale, sapendo che il capitale alla fine del secondo anno è di 198 000 euro.

43. Abbiamo 3 litri di soluzione al 25% (si suppone che nella reazione solvente-soluto si conservino tutti i volumi). Quanto solvente dobbiamo aggiungere per ottenere una soluzione al 10%?