

Complementi di Matematica

L.D. Marini
Università di Pavia

Ingegneria per l'ambiente e il territorio
Ingegneria civile

22 settembre 2022

Capitolo 1

Equazioni differenziali alle derivate parziali

Le equazioni differenziali sono equazioni nelle quali 1) l'incognita è una funzione, e 2) nella equazione compaiono anche alcune *derivate* della funzione incognita.

Si dice che un'equazione differenziale ha ordine m se la derivata di ordine massimo che compare nella equazione è una derivata di ordine m .

Se la funzione incognita è una funzione di una sola variabile, le sue derivate saranno derivate ordinarie e si parlerà di *equazione differenziale ordinaria*. Se invece la funzione incognita è una funzione di più variabili, le sue derivate saranno derivate parziali e si parlerà di *equazione differenziale alle derivate parziali*.

Esempio.

$$u''(x) + 5u(x) = g(x)$$

(dove g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione differenziale ordinaria di ordine 2.

Esempio.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = g(x, t)$$

(dove ancora g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione alle derivate parziali del primo ordine (infatti nella equazione compaiono solo derivate prime). La stessa equazione può essere scritta in altri modi:

$u_t + u_x = g$ in cui ovviamente $u_t = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, oppure $u_{/t} + u_{/x} = g$, oppure $u_{,t} + u_{,x} = g$ tutte con lo stesso significato.

Esempio.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = g(x, t)$$

(dove ancora g è una funzione nota e u è la funzione incognita) è una equazione alle derivate parziali del secondo ordine (infatti nella equazione compare una derivata seconda).

La forma generale di un'equazione differenziale di ordine 2 può essere scritta come :

$$F(\mathbf{x}, u, \nabla u, D_2 u) = 0$$

in cui:

- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ è la variabile indipendente
- u è la funzione incognita
- ∇u è il vettore delle derivate prime di u
- $D_2 u$ è la matrice delle derivate seconde di u
- $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$

A volte la dipendenza di F da \mathbf{x} e dalle derivate di u viene sottintesa e si scrive semplicemente

$$F(u) = 0.$$

1.1 Equazioni differenziali lineari

Le equazioni differenziali lineari sono equazioni che possono essere scritte nella forma

$$F(u) = g$$

dove g è una funzione nota, e F verifica

$$F(\alpha u + \beta w) = \alpha F(u) + \beta F(w)$$

per ogni coppia di funzioni u e w e per ogni coppia di numeri reali α e β . Se $g = 0$ l'equazione è detta essere *omogenea*.

Esempio. $u_t + u_x = 0$,

è una equazione alle derivate parziali del primo ordine lineare ed omogenea.

Ma anche la

$$a(\mathbf{x})u_t + b(\mathbf{x})u_x = 0$$

con $a(\mathbf{x})$ e $b(\mathbf{x})$ funzioni note è una equazione alle derivate parziali del primo ordine lineare ed omogenea. Volendo indicare la differenza tra le due si dirà che la prima è anche *a coefficienti costanti* e la seconda *a coefficienti variabili*. Per contro l'equazione

$$a u_t + b u_x = g,$$

dove g è una funzione nota (e non identicamente nulla), sarà una equazione alle derivate parziali del primo ordine lineare *non omogenea*: a coefficienti costanti se a e b sono costanti (altrimenti, a coefficienti variabili).

1.2 Equazioni differenziali non lineari

Basta che un ingrediente dell'equazione non sia lineare, per esempio al quadrato, che l'equazione viene detta *non lineare*.

Esempio.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = g.$$

Tra queste vengono spesso distinte dalle altre le equazioni *quasi-lineari* e quelle *semi-lineari*.

Le equazioni **quasi-lineari** sono quelle in cui il coefficiente della derivata di ordine massimo dipende (o può dipendere) dalla funzione stessa (u) e dalle derivate di ordine inferiore.

Esempio.

- $u_t + uu_x = g$
- $\operatorname{div}(k(u)\nabla u) + uu_x = g \quad \Rightarrow \quad \nabla k(u) \cdot \nabla u + k(u)\Delta u + uu_x = g.$

Quello che conta è il coefficiente della derivata di ordine massimo (nel primo caso u davanti a u_x e nel secondo caso $k(u)$ davanti a Δu)

Invece la

- $u_t + (u_x)^2 = g$ non è quasi-lineare.

Nelle equazioni **semi-lineari** il coefficiente della derivata di ordine massimo può dipendere dalla variabile indipendente, ma **non** dipende dalla funzione incognita né dalle sue derivate di ordine inferiore.

- $(1 + |x|^2)\Delta u + u^2 = g$ è semilineare,
- $|u|^2\Delta u = g$ non è semilineare.

1.3 Problema ben posto

Il problema si dice *ben posto* se:

1. ammette una soluzione
2. la soluzione è unica
3. vale la dipendenza continua dai dati (detta anche **Stabilità** del problema), cioè

$$\text{se } dist(f, g) \rightarrow 0 \text{ allora } dist(u^f, u^g) \rightarrow 0$$

L'ultima condizione significa che se f e g sono i dati del problema (proprietà del materiale, carico applicato, ecc) e sono "vicini", allora le due soluzioni u^f, u^g (cioè la soluzione unica del problema con dato f e con dato g) sono "vicine".

Vediamo meglio cosa vuol dire "vicini": bisogna introdurre una misura della distanza tra due oggetti (altrimenti detta **norma** della differenza)

- se i dati sono due vettori: $\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ e $\underline{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ possiamo valutare la loro distanza $dist(\underline{f}, \underline{g})$ in vari modi. Ad esempio:

$$dist(\underline{f}, \underline{g}) := \max_{1 \leq i \leq n} |f_i - g_i| = \| \underline{f} - \underline{g} \|_\infty \quad \text{norma del massimo}$$

$$dist(\underline{f}, \underline{g}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i - g_i)^2} \quad \text{norma euclidea}$$

- se i dati sono due funzioni: $f(x), g(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$dist(f, g) := \max_{x \in I} |f(x) - g(x)|$$

$$dist(f, g) := \sqrt{\int_I (f(x) - g(x))^2}$$

Dunque la terza condizione perché il problema possa definirsi ben posto può essere riscritta nel seguente modo:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che: se } dist(f, g) \leq \delta \text{ allora } dist(u^f, u^g) \leq \varepsilon$$

In pratica però (come faremo noi qui) si preferisce verificare la condizione (leggermente più stringente):

$$\text{esiste una costante } C > 0 \text{ tale che: se } dist(f, g) \leq \varepsilon \text{ allora } dist(u^f, u^g) \leq C\varepsilon$$

Esempio di problema ben posto. Consideriamo il problema seguente, con a, b, f, α, β dati e $a < b$.

$$(P) \quad \begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall x \in [a, b] \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

Dobbiamo verificare le condizioni 1-2-3.

- Esistenza di una soluzione: dipende dalla regolarità del dato f . Se, ad esempio, f è una funzione continua, l'equazione $-u''(x) = f(x)$ assicura che la derivata seconda di u è continua nell'intervallo $[a, b]$. Quindi la soluzione esiste nello spazio delle funzioni C^2 (cioè continua con la derivata prima e la derivata seconda).
- Unicità della soluzione. Il problema è lineare quindi l'unicità può essere dimostrata per contraddizione: supponiamo che (P) abbia due soluzioni diverse $u_1 \neq u_2$; ciò significa che:

$$\begin{cases} -u_1''(x) = f(x) & \text{in } [a, b] \\ u_1(a) = \alpha \\ u_1(b) = \beta \end{cases} \quad \begin{cases} -u_2''(x) = f(x) & \text{in } [a, b] \\ u_2(a) = \alpha \\ u_2(b) = \beta \end{cases}$$

Adesso eseguendo la differenza membro a membro tra le equazioni, e ponendo $w := u_1 - u_2$: si ha che la funzione $w(x)$ risolve il problema:

$$\begin{cases} w''(x) = 0 & \text{in } [a, b] \\ w(a) = 0 \\ w(b) = 0. \end{cases}$$

Ora $w''(x) = 0$ implica che $w(x)$ deve essere un polinomio di primo grado, cioè una retta $w(x) = C_1x + C_2$, che, imponendo le condizioni ai limiti, deve

annullarsi nei due punti (distinti) $x = a$ e $x = b$. Ne consegue che necessariamente $w = 0$ e quindi $u_1 = u_2$.

• Dipendenza continua dai dati: immaginiamo di perturbare il dato f facendolo diventare $g = f + \varepsilon$ (per semplicità supporremo che la perturbazione ε sia una costante positiva, ma il risultato vale ovviamente più in generale). In particolare avremo che $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Risolviamo ora il problema:

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} -w''(x) = g(x) = f(x) + \varepsilon \\ w(a) = \alpha \\ w(b) = \beta \end{cases}$$

Si vuole valutare l'errore tra la soluzione u di (P) e la soluzione w del problema perturbato (P_ε) . Facendo la differenza $(P) - (P_\varepsilon)$ si vede che la funzione differenza $v(x) = u(x) - w(x)$ risolve

$$\begin{cases} -u''(x) - (-w''(x)) = f - (f + \varepsilon) = -\varepsilon \Rightarrow u''(x) - w''(x) = \varepsilon \Rightarrow v''(x) = \varepsilon, \\ u(a) - w(a) = 0 \Rightarrow v(a) = 0, \\ u(b) - w(b) = 0 \Rightarrow v(b) = 0. \end{cases}$$

La derivata seconda di v è una costante ($v''(x) = \varepsilon$) e dunque v sarà un polinomio di secondo grado: $v(x) = \frac{\varepsilon}{2}x^2 + C_1x + C_2$. Imponendo le condizioni ai limiti si ha

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{2}a^2 + C_1a + C_2 = 0 \\ \frac{\varepsilon}{2}b^2 + C_1b + C_2 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni si ha immediatamente $C_1(a - b) = -\frac{\varepsilon(a^2 - b^2)}{2}$ da cui banalmente $C_1 = -\frac{\varepsilon(a+b)}{2}$. Inserendo questo valore nella somma delle equazioni si ha allora $-2C_2 = \frac{\varepsilon[(a^2 + b^2) - (a+b)^2]}{2} = -\varepsilon ab$ da cui $C_2 = \frac{\varepsilon ab}{2}$ e quindi $v(x) = \frac{\varepsilon}{2}(x^2 - (a+b)x + ab)$. Notiamo che la v è una parabola che si annulla in a e in b . Quindi il suo valore assoluto, nell'intervallo (a, b) , avrà il suo massimo nel punto di mezzo dell'intervallo (a, b) , cioè per $x = (a+b)/2$ (fate un disegno se avete dei dubbi). Quindi in (a, b) il massimo di $|v|$ vale

$$|v((a+b)/2)| = \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a+b)^2}{2} + ab \right| = \frac{(a-b)^2}{8} \varepsilon$$

cioè una quantità fissa $C(a, b)$ volte ε .

Ricordando che $v(x)$ è la differenza tra la soluzione vera u e la soluzione perturbata w , si è trovato che

$$\|u - w\|_\infty \leq C(a, b) \|f - g\|_\infty$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, cioè quando l'errore sui dati va a 0, anche l'errore sui risultati tenderà a zero. La conclusione è che il problema è **ben posto**.

Capitolo 2

Equazione di trasporto

L'equazione di trasporto è un'equazione differenziale del primo ordine, che nella forma più semplice è del tipo:

$$u_t + cu_x = f(x, t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

dove t è il tempo, x lo spazio (e l'incognita è dunque una funzione dello spazio e del tempo: $u = u(x, t)$) e c è una costante che ha le dimensioni di una velocità. Infatti, svolgendo l'analisi dimensionale si vede che:

$$u_t : [u] \cdot [t^{-1}], \quad u_x : [u] \cdot [\ell^{-1}], \quad \longrightarrow \quad c : [\ell \cdot t^{-1}]$$

Infine, $f(x, t)$ è una funzione data dello spazio e del tempo.

La condizione da aggiungere all'equazione differenziale per avere una soluzione unica è il valore della u al tempo 0:

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

2.1 Il problema omogeneo

Come primo passo (secondo una procedura classica nello studio delle equazioni differenziali lineari), ci occuperemo del problema omogeneo (che corrisponde quindi alla scelta $f(x, t) = 0$).

Quindi cercheremo di risolvere il problema di Cauchy omogeneo:

$$\begin{cases} (i) \quad u_t + cu_x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ (ii) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.1)$$

2.1.1 Le linee caratteristiche

Si vuole sapere come si propaga nello spazio e nel tempo il dato iniziale $u_0(x)$. In particolare cerchiamo (se ce ne sono!) delle linee $x = x(t)$ nel piano (x, t) (che chiameremo *linee caratteristiche*) tali che il valore della soluzione u lungo tali linee si mantenga costante (e come vedremo, ce ne sono tantissime)

Chiaramente, per qualunque scelta della funzione $x(t)$, il valore della soluzione u nel punto $(x(t), t)$ sarà dato dalla funzione (della sola t !)

$$v(t) = u(x(t), t).$$

Dire che la soluzione u si mantiene costante lungo la curva $x = x(t)$ (cioè dire che $x(t)$ è una linea caratteristica) equivale a dire che la funzione $v(t)$ si mantiene costantemente uguale al valore $v(0) = u(x(0), 0)$ che la u assume alla intersezione tra l'asse $t = 0$ e la curva $x = x(t)$. Prendendo un'altra curva caratteristica $x = x(t)$ (abbiamo detto che ce ne sono tante!) cambierà la v e cambierà il valore costante che la u assume sulla curva. Calcoliamo adesso la derivata prima di $v(t)$ (totale perché v dipende solo da t):

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_t. \quad (2.2)$$

Confrontando l'equazione (2.2) con quella del problema di Cauchy (2.1) - (i), ci accorgiamo che: se scegliamo la $x(t)$ in modo che $\frac{dx}{dt}$ sia proprio uguale alla velocità c che compare in (2.1) si ha (usando la (2.2) e poi la (2.1)-(i)):

$$\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow \frac{dv}{dt} = c u_x + u_t = 0.$$

Quindi su ogni linea $\frac{dx}{dt} = c$ si ha che $\frac{dv}{dt} = 0$ cioè $v = \text{costante} = v(0) = u(x(0), 0)$. Naturalmente, le linee $\frac{dx}{dt} = c$ sono tutte le rette $x = ct + x_0$ al variare del valore iniziale $x_0 = x(0)$.

Notiamo che, in particolare, per ogni punto (x^*, t^*) esiste una e una sola retta del tipo $x = ct + x_0$ che passa per il punto: in altre parole, esiste un unico x_0 tale che $x^* = ct^* + x_0$ e tale valore è dato da $x_0 = x^* - ct^*$. Quindi nel punto (x^*, t^*) il valore di u sarà uguale al suo valore in x_0 cioè uguale a $u_0(x^* - ct^*)$. Visto che questo si verifica per **ogni** punto (x^*, t^*) , possiamo concludere che la soluzione del problema di Cauchy è data esattamente da

$$u(x, t) = u_0(x - ct) \quad (2.3)$$

Controprova: prendiamo l'espressione in (2.3) e vediamo che soddisfa il problema (2.1). Intanto, per $t = 0$ è ovvio che la u in (2.3) vale $u_0(x)$, come richiesto in (2.1)-(ii). Poi calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_0(x - ct)) + c \frac{\partial}{\partial x}(u_0(x - ct)) = u_0'(x - ct)(-c) + c u_0'(x - ct) = 0$$

e l'equazione in (2.1)-(i) è anch'essa verificata.

Riassumendo: il valore della soluzione in un generico punto (x, t) è pari al valore del dato iniziale u_0 nel punto x_0 di intersezione tra l'asse delle x (cioè $t = 0$) e la retta con pendenza $1/c$ passante per (x, t) , cioè la retta $x = ct + x_0$ (che nel piano (x, t) si scrive più comunemente come $t = (1/c)(x - x_0)$).

Questo **metodo** è detto **metodo delle caratteristiche**. L'analisi appena fatta ci dice che l'onda iniziale viene trasportata lungo le linee caratteristiche e spostata con pendenza $1/c$. Conseguentemente, più alta è la velocità c , più velocemente l'onda iniziale si propaga (come intuitivamente ci si aspetta).

Nelle figure seguenti si rappresenta l'andamento della soluzione in corrispondenza allo stesso dato iniziale $u_0(x)$ e per diversi valori della velocità.

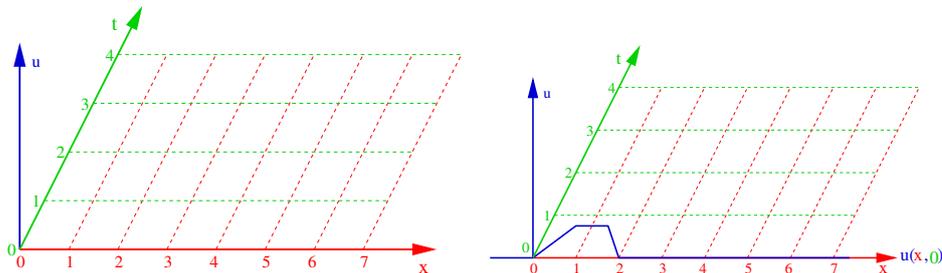


Figura 2.1: A sinistra: rette parallele agli assi nel piano (x, t) . A destra il dato iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$

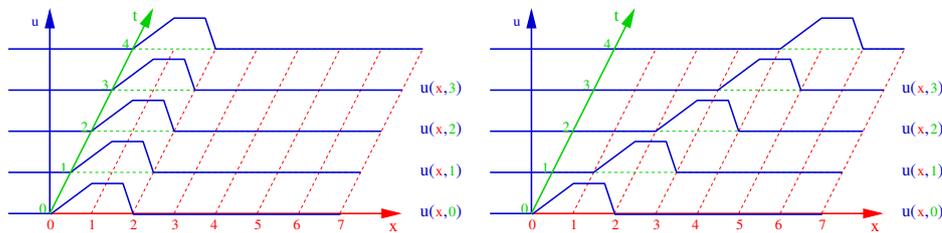


Figura 2.2: A sinistra: velocità $c = 0$ ($u_t = 0$) $\Rightarrow u(x, t) \equiv u_0(x) \forall t$. A destra la soluzione $u(x, t)$ corrispondente a $c = 1$ ($u_t + u_x = 0$)

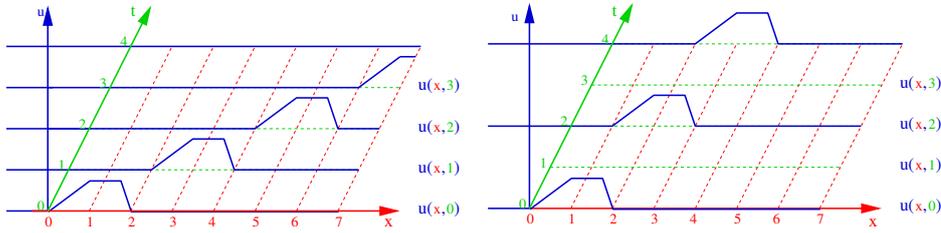


Figura 2.3: Andamento della soluzione $u(x, t)$ in corrispondenza della velocità: $c = 2$ (a sinistra), $c = 1/2$ (a destra).

Esempio.

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Sappiamo che la soluzione è $u_0(x - ct)$, quindi:

$$u(x, t) = \sin[\pi(x - ct)]$$

sarà la soluzione del problema omogeneo nel generico punto dello spazio (x, t) .

2.2 Problemi non omogenei

La trattazione di problemi *non omogenei* si farà generalizzando le idee applicate finora, e in particolare utilizzerà esplicitamente le soluzioni del problema omogeneo corrispondente (in cui si pone il valore della *forzante* f uguale a zero).

Per comodità di notazioni chiamiamo allora $\tilde{u}(x, t)$ la soluzione del problema omogeneo appena trattato, cioè:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t + c\tilde{u}_x = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \tilde{u}(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

da cui (come abbiamo già visto):

$$\boxed{\tilde{u}(x, t) = u_0(x - ct) \quad \forall x, t}$$

2.2.1 Il caso di una forzante costante

Adesso consideriamo l'equazione di trasporto con una forzante costante (che, per semplicità, poniamo in un primo momento uguale a 1). Consideriamo

quindi il problema:

$$\begin{cases} (i) u_t + cu_x = 1 & \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ (ii) u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.4)$$

Cerchiamo la soluzione come somma della soluzione omogenea con un'altra funzione: $u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + w(x, t)$, dove la funzione w dovrà quindi verificare

$$\begin{cases} (i) w_t + cw_x = 1 & \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ (ii) w(x, 0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Verifichiamo che se w risolve il problema (2.5) allora la funzione somma di \tilde{u} e di w risolve il problema (2.4). Quindi verifichiamo che la $u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + w(x, t)$ rispetta l'equazione differenziale e il dato iniziale:

- $u_t + cu_x = \tilde{u}_t + w_t + c(\tilde{u}_x + w_x) = (\tilde{u}_t + c\tilde{u}_x) + (w_t + cw_x) = 0 + 1 = 1.$
- $u(x, 0) = \tilde{u}(x, 0) + w(x, 0) = u_0(x) + 0 = u_0(x)$

Quindi si deve trovare la $w(x, t)$ che verifica (2.5). Per questo si introduce $v(t) := w(x(t), t)$ e quindi, usando il metodo delle caratteristiche e svolgendo gli stessi passaggi svolti nel caso del problema omogeneo si ottiene

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c \\ \frac{dv}{dt} = 1 \end{cases}$$

Ciò significa che sulle linee caratteristiche $x = x(t) = ct + x_0$ la $\frac{dv}{dt}$ deve essere uguale a 1; integrando si ottiene:

$$\int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t 1 ds \Rightarrow v(t) - v(0) = t$$

La condizione iniziale (2.5)-(ii) implica che $v(0) = w(x(0), 0) = 0$. Ne segue che $v(t) = t$, cioè $v(t) = w(x(t), t) = t$. Notiamo anche che, a posteriori, si verifica facilmente che la funzione $w(x, t) = t$ risolve il problema (2.5). La soluzione del problema (2.4) sarà dunque:

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + w(x, t) = u_0(x - ct) + t$$

Se in (2.4), al posto di avere come costante 1, si ha una generica costante k , cioè se dobbiamo risolvere il problema:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = k & \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

si troverà come soluzione:

$$u(x, t) = u_0(x - ct) + kt$$

Esempio.

$$\begin{cases} u_t + cu_x = k & \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.6)$$

La soluzione $u(x, t)$ sarà data da:

$$u(x, t) = \sin(\pi(x - ct)) + kt$$

Per capire se la soluzione trovata è corretta, bisogna verificare se $u(x, t)$ rispetta le condizioni del problema (2.6):

- $u_t + cu_x = \cos(\pi(x - ct))(-\pi c) + k + c[\cos(\pi(x - ct))(\pi) + 0] = -(\pi c) \cos(\pi(x - ct)) + k + (\pi c) \cos(\pi(x - ct)) = k,$
- $u(x, 0) = \sin(\pi(x - 0)) + k \cdot 0 = \sin(\pi x).$

Poiché entrambe le condizioni sono rispettate, la $u(x, t)$ è la soluzione corretta.

2.2.2 Il caso di una forzante che dipende solo da t

Modifichiamo ulteriormente il problema di trasporto:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(t) & \forall x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Si cerca sempre una soluzione $u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + w(x, t)$ in cui $\tilde{u}(x, t)$ è la soluzione del problema omogeneo e $w(x, t)$ è la soluzione di

$$\begin{cases} w_t + cw_x = f(t) & \forall x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ w(x, 0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Procedendo come prima, si introduce $v(t) := w(x(t), t)$ funzione solo del tempo, e derivando si ottiene:

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t.$$

Sulle linee $\frac{dx}{dt} = c$ si ha $\frac{dv}{dt} = f(t)$, e ciò significa dire che, sulle linee caratteristiche, la derivata di v rispetto al tempo è uguale a $f(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c \rightarrow x = x(t) = ct + x_0 \\ \frac{dv}{dt} = f(t) \rightarrow \int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t f(s) ds \Rightarrow v(t) - v(0) = \int_0^t f(s) ds \end{cases}$$

Per definizione: $v(0) = w(x(0), 0) = w(x_0, 0) = 0$, quindi la soluzione del problema sarà:

$$u(x, t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(s) ds.$$

Verifichiamo se questa è la soluzione corretta di (2.7):

- $u_t + cu_x = u'_0(x - ct)(-c) + f(t) + c[u'_0(x - ct) + 0] = f(t)$
- $u(x, 0) = u_0(x) + \int_0^0 f(s) ds = u_0(x) + 0 = u_0(x)$

La verifica è soddisfatta.

2.2.3 Il caso di una forzante che dipende solo da x

Modifichiamo ulteriormente il problema di trasporto, nel caso di una forzante che sia funzione della sola x :

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.8)$$

Si cerca sempre una soluzione $u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + w(x, t)$ in cui $\tilde{u}(x, t)$ è la soluzione del problema omogeneo e $w(x, t)$ è la soluzione particolare. In questo caso la $w(x, t)$ dovrà rispettare:

$$\begin{cases} w_t + cw_x = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ w(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Come prima, si introduce la funzione (solo del tempo) $v(t) := w(x(t), t)$. Derivando si ottiene:

$$\frac{dv}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_t$$

Sulle linee $\frac{dx}{dt} = c$ si ha $\frac{dv}{dt} = f(x)$, e ciò significa dire che sulle linee caratteristiche la derivata di v rispetto al tempo è uguale a $f(x)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c \rightarrow x = x(t) = ct + x_0 \\ \frac{dv}{dt} = f(x) \rightarrow \int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t f(x(s)) ds \end{cases}$$

e quindi

$$v(t) = \int_0^t \frac{dv(s)}{dt} ds = \int_0^t f(x(s)) ds = \int_0^t f(cs + x_0) ds.$$

Usando la sostituzione $z = cs + x_0$ si ha immediatamente che

$$ds = \frac{1}{c} dz \quad s = 0 \rightarrow z = x_0 \quad s = t \rightarrow z = ct + x_0$$

da cui

$$\int_0^t f(cs + x_0) ds = \frac{1}{c} \int_{x_0}^{ct+x_0} f(z) dz = \frac{1}{c} [F(ct + x_0) - F(x_0)]$$

(dove F è una primitiva di f , cioè $F' = f$), che fornisce quindi:

$$w(x, t) = \frac{1}{c} [F(x) - F(x - ct)]$$

Quindi la soluzione di (2.8) è:

$$u(x, t) = u_0(x - ct) + \frac{1}{c} [F(x) - F(x - ct)]$$

Verifichiamo come al solito che questa sia effettivamente la soluzione corretta di (2.8):

- $u_t + cu_x = u'_0(x - ct)(-c) + \frac{1}{c} [0 - (-c)f(x - ct)] + c \left[u'_0(x - ct) + \frac{1}{c} [f(x) - f(x - ct)] \right] = f(x)$
- $u(x, 0) = u_0(x - 0) + \frac{1}{c} [F(x) - F(x - 0)] = u_0(x)$

La verifica è soddisfatta.

Esercizio. Prendiamo $f(x) = \sin(x)$, con $u_0(x) = \cos(x)$ e $c = 10$. Il problema diventa

$$\begin{cases} u_t + 10u_x = \sin(x) & \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = \cos(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.9)$$

Procedendo come sopra avremo che $u_0(x - ct)$ sarà data da

$$u_0(x - ct) = \cos(x - 10t),$$

che la primitiva di $f(x) = \sin(x)$ sarà data da

$$F(x) = -\cos(x)$$

e quindi la nostra formula risolutiva fornisce

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(x - 10t) + \frac{1}{10}[F(x) - F(x - 10t)] \\ &= \cos(x - 10t) + \frac{1}{10}[\cos(x - 10t) - \cos(x)] \\ &= \frac{11}{10} \cos(x - 10t) - \frac{1}{10} \cos(x). \end{aligned}$$

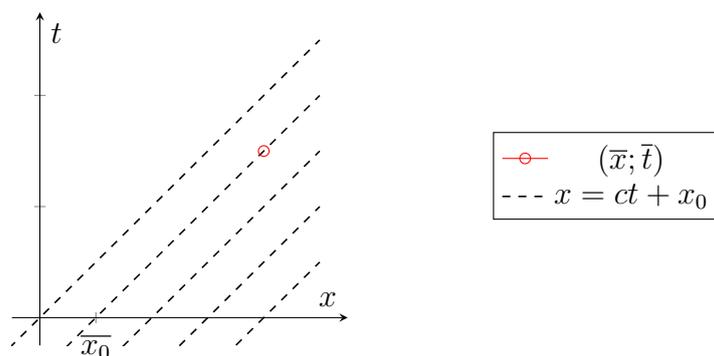
Adesso bisogna verificare se $u(x, t)$ è la soluzione corretta; essa deve rispettare entrambe le condizioni del problema (2.9):

- $u_t + cu_x = \frac{11}{10}(-10)(-\sin(x - 10t)) + 10\left[-\frac{11}{10}\sin(x - 10t) + \frac{1}{10}\sin(x)\right] = 11\sin(x - 10t) - 11\sin(x - 10t) + \sin(x) = \sin(x)$
- $u(x, 0) = \frac{11}{10}\cos(x) - \frac{1}{10}\cos(x) = \cos(x)$

2.3 Considerazioni finali

Riassumendo: Il metodo delle caratteristiche permette di lavorare solo sui punti delle rette caratteristiche date da $x = ct + x_0$ in cui x_0 è l'intersezione tra $x = x(t)$ e $t = 0$. Il valore della soluzione in x_0 viene trasportato lungo la linea caratteristica. Nel caso del problema omogeneo ($f = 0$) per trovare il valore della soluzione in un punto generico (\bar{x}, \bar{t}) , si deve:

1. scrivere l'equazione della retta caratteristica passante per quel punto (parallela alla generica retta $x = ct$). Tale retta ha equazione $x - \bar{x} = c(t - \bar{t})$.



2. trovare la sua intersezione con $t = 0$, che chiamiamo \bar{x}_0 . Risulta $\bar{x}_0 = \bar{x} - c\bar{t}$
3. dopodiché si ha $u(\bar{x}, \bar{t}) = u(\bar{x}_0, 0) = u_0(\bar{x}_0)$, cioè pari al dato iniziale in \bar{x}_0

Questo procedimento si può usare per un qualsiasi punto (x, t) del piano (vedere la figura)

Se $f \neq 0$, il valore iniziale sarà comunque trasportato lungo le caratteristiche e sarà perturbato in funzione di f .

2.4 Il caso di c non costante

Finora si è visto solo il caso di $c = \text{costante}$. In molti problemi reali la velocità del trasporto può variare.

Il caso in cui la velocità sia una funzione assegnata (e ragionevolmente regolare) di x e/o di t non presenta grosse difficoltà concettuali, anche se i conti saranno, in generale, più complicati. In particolare, esisteranno ancora le linee caratteristiche, che saranno soluzioni $x = x(t)$ della equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = c(x, t)$$

per diversi valori del dato iniziale

$$x(0) = x_0$$

(per ogni x_0 avremo una linea diversa).

Purtroppo, in una grandissima varietà di applicazioni di grande interesse pratico la velocità dipende anche dalla soluzione stessa. Si ha cioè $c = c(x, t, u)$. Questo rende il problema *molto* più complicato, sia dal punto di vista teorico (esistenza, unicità e regolarità delle soluzioni) che dal punto di

vista numerico (algoritmi e codici per il calcolo approssimato della soluzione). Anche il caso più semplice

$$u_t + u u_x = 0,$$

detta *equazione di Burgers inviscida*, e che in realtà, per motivi difficili da spiegare qui, andrebbe scritta $2u_t + (u^2)_x = 0$, pur con dati iniziali $u_0(x)$ molto regolari (ad esempio: derivabili infinite volte) può essere una sorgente di notevoli difficoltà (necessità di definire soluzioni in senso generalizzato, mancanza di unicità, mancanza di regolarità, e risoluzione numerica parecchio più complessa).

L'equazione di Burgers, sfortunatamente, è un caso ipersemplificato delle equazioni che descrivono il moto dei fluidi (equazioni di Eulero e di Navier-Stokes), e che entrano in una grandissima varietà di importanti applicazioni.

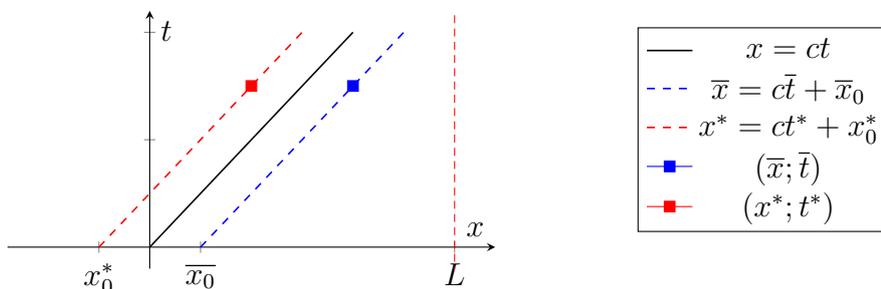
2.5 Problema ai limiti per l'equazione del trasporto

Finora è stato considerato il problema di trasporto, omogeneo e non omogeneo, su tutta la retta reale, cioè per tutti gli $x \in \mathbb{R}$. In particolare è sufficiente conoscere il valore iniziale della soluzione, per conoscerla ovunque. Il problema studiato è quindi un cosiddetto *problema ai valori iniziali* e quindi fa parte dei *problemi di Cauchy*.

Ora ci occuperemo di un problema alle derivate parziali di tipo più classico. In particolare, consideriamo un problema di trasporto *su un intervallo finito* $(0, L)$ di \mathbb{R} . Il problema diventa:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & 0 \leq x \leq L \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

con c costante che, per fissare le idee, supponiamo positiva ($c > 0$).



Cominciamo col procedere come prima col metodo delle caratteristiche. Essendo c costante le caratteristiche saranno ancora delle rette nel piano

(x, t) con pendenza $1/c$. In particolare, la caratteristica passante per il punto (x_1, t_1) avrà equazione $x - x_1 = c(t - t_1)$ e incontrerà l'asse delle x (cioè $t = 0$) nel punto $x_0 = x_1 - ct_1$. Se tale punto appartiene all'intervallo $[0, L]$ (come per il caso $(x_1, t_1) = (\bar{x}, \bar{t})$ nella figura) avremo $u(x_1, t_1) = u_0(x_0) = u_0(x_1 - ct_1)$. Se invece il punto x_0 non cade nell'intervallo $[0, L]$ il valore iniziale non esiste (infatti $u_0(x)$ è assegnata solo per $x \in [0, L]$).

Con riferimento alla nostra figura, se si prende un punto (x^*, t^*) che sta sopra la caratteristica che passa per 0, e si traccia la linea caratteristica passante per (x^*, t^*) , ci si accorge che l'intersezione con l'asse x sta fuori dall'intervallo $[0, L]$ e quindi non si hanno informazioni da trasmettere lungo la linea caratteristica. È necessario avere un'altra condizione, questa volta ai limiti, ossia serve avere un dato assegnato dove le caratteristiche entrano (in questo caso, poiché $c > 0$, per $x = 0$). Aggiungendo un *dato al bordo* per $x = 0$ il problema diventa:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & 0 \leq x \leq L \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = g^S(t) & \forall t > 0 \end{cases}$$

Naturalmente i dati dovranno soddisfare la condizione di continuità in $(0, 0)$ che nel nostro caso si traducono nella richiesta che $u_0(0) = g^S(0)$.

Per trovare la soluzione in un generico punto come (x_1, t_1) si opera in maniera molto simile a quella di prima: si calcola la linea caratteristica passante per quel punto: come abbiamo già visto: $(x - x_1) = c(t - t_1)$; si determina poi l'intersezione con l'asse delle x cioè con $t = 0$: $x_0 = x_1 - ct_1$. A questo punto si osserva *dove cade* l'intersezione x_0 così trovata:

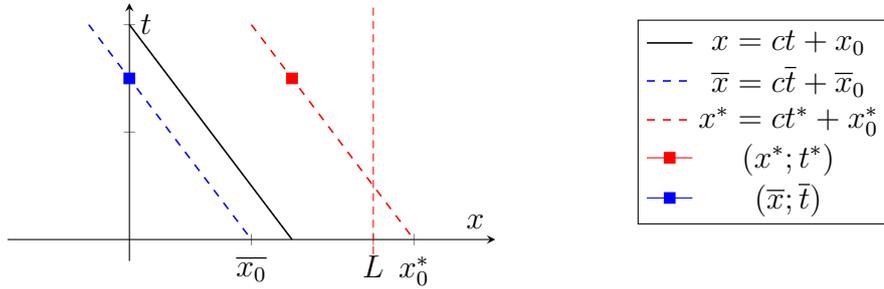
- se $x_0 \in [0, L] \rightarrow u(x_1, t_1) = u_0(x_1 - ct_1)$
- se $x_0 \notin [0, L]$ si calcola l'intersezione con l'asse $t \rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - x_1 = c(t - t_1) \end{cases} \Rightarrow t_0 = -\frac{x_1}{c} + t_1$$

e sapendo che sulla linea caratteristica la u deve essere costante si pone

$$u(x_1, t_1) = g^S(t_0)$$

Si ragiona esattamente allo stesso modo se $c < 0$ (vedi figura):



Questa volta bisogna dare una condizione ai limiti per $x = L$ (nel secondo estremo).

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & 0 \leq x \leq L \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & 0 \leq x \leq L \\ u(L, t) = g^D(t) & \forall t > 0 \end{cases}$$

Naturalmente in questo caso i dati dovranno soddisfare la condizione di continuità in $(L, 0)$ che ora si traducono nella richiesta che $u_0(L) = g^D(0)$.

Quindi nel generico punto (x_1, t_1) , posto $x_0 = x_1 - ct_1$, si controlla se $x_0 \leq L$ oppure $x_0 > L$. Nel primo caso, si ha

$$u(x_1, t_1) = u_0(x_0)$$

Altrimenti (se $x_0 > L$) si determina l'intersezione con $x = L$ e si trova $t_0 = t_1 + (L - x_1)/c$; la soluzione sarà

$$u(x_1, t_1) = g^D(t_0)$$

La differenza sostanziale tra un problema di trasporto su tutta la retta reale o solo su un intervallo è che la condizione iniziale non basta, ma serve anche una condizione sul bordo. Tale condizione aggiuntiva deve essere imposta sul bordo destro se le linee caratteristiche hanno pendenza negativa, e sul bordo sinistro se la pendenza delle linee caratteristiche è positiva. Si riassumono i due casi dicendo che la condizione va imposta all'*inflow* cioè sul lato in cui le linee caratteristiche *entrano* (naturalmente, il "movimento" delle caratteristiche va sempre inteso nella direzione dei *tempi crescenti*). La condizione viene scritta con $u(\cdot, t)$ in cui il punto identifica il bordo sinistro o destro in base all'inflow. In generale in problema è scritto così

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & 0 \leq x \leq L \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & 0 \leq x \leq L \\ u(\cdot, t) = g(t) & \forall t > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

La soluzione $u(x, t)$ vale:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - ct) & \text{se } x_0 = x - ct \in [0, L] \\ g(\bar{t}) & \text{se } x_0 = x - ct \notin [0, L] \end{cases}$$

$g(\bar{t})$ è il valore del dato all'inflow nel punto di intersezione \bar{t} della caratteristica con l'inflow.

Come esercizio, verifichiamo se il problema è ben posto:

1. *Esiste una soluzione?* Sì perché abbiamo scritto esplicitamente l'espressione analitica della soluzione.
2. *La soluzione è unica?* Il problema è lineare quindi l'unicità viene dimostrata per contraddizione. Infatti si supponga, per contraddizione, che il problema (2.10) abbia due soluzioni diverse: $u^{(1)} \neq u^{(2)}$. Valgono allora i seguenti:

$$\begin{cases} u_t^{(1)} + cu_x^{(1)} = 0 & x \in [0, L], t > 0 \\ u^{(1)}(x, 0) = u_0(x) & x \in [0, L] \\ u^{(1)}(\cdot, t) = g(t) & \forall t > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_t^{(2)} + cu_x^{(2)} = 0 & x \in [0, L], t > 0 \\ u^{(2)}(x, 0) = u_0(x) & x \in [0, L] \\ u^{(2)}(\cdot, t) = g(t) & \forall t > 0 \end{cases}$$

Facendo la differenza tra le equazioni, si ottiene:

$$\begin{cases} u_t^{(1)} - u_t^{(2)} + c(u_x^{(1)} - u_x^{(2)}) = 0 & x \in [0, L], t > 0 \\ u^{(1)}(x, 0) - u^{(2)}(x, 0) = u_0(x) - u_0(x) = 0 & x \in [0, L] \\ u^{(1)}(\cdot, t) - u^{(2)}(\cdot, t) = g(t) - g(t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

Chiamando $w(x, t)$ la differenza tra $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$, si trova che $w(x, t)$ risolve il problema

$$\begin{cases} w_t + cw_x = 0 & x \in [0, L], t > 0 \\ w(x, 0) = 0 & x \in [0, L] \\ w(\cdot, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

ossia un problema di trasporto con dati tutti nulli. Sapendo che il problema ammette almeno una soluzione e che questa ha valore pari al dato iniziale oppure alla condizione all'inflow in base a dove cade x_0 si deduce che $w(x, t) = 0 \Rightarrow u^{(1)} - u^{(2)} = 0 \Rightarrow u^{(1)}(x, t) = u^{(2)}(x, t)$ che rappresenta una contraddizione perché inizialmente era stato ipotizzato che le due soluzioni $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ fossero diverse. Quindi la soluzione è *unica*.

3. Si ha la dipendenza continua dai dati? (cioè: il problema è **stabile**?)

Considerando per semplicità il problema omogeneo, e velocità c costante, immaginiamo di avere oltre alla soluzione u (con dati $u_0(x)$ e $g(t)$, rispettivamente per $t = 0$ e per x uguale all'estremo inflow) una soluzione \tilde{u} con dati perturbati (rispettivamente $\tilde{u}_0(x)$ e $\tilde{g}(t)$ in modo tale che

$$\|u_0 - \tilde{u}_0\|_\infty \leq |\varepsilon| \quad \text{e} \quad \|g - \tilde{g}\|_\infty \leq |\varepsilon|$$

La differenza $w := u - \tilde{u}$ verificherà anch'essa l'equazione omogenea, e i suoi valori al bordo saranno sempre, in modulo, minori di $|\varepsilon|$. Ma i valori di w in un qualunque punto del dominio $(0, L) \times (0, +\infty)$, saranno, seguendo le caratteristiche, uguali al valore di w in qualche punto del segmento $(0, L)$ oppure in qualche punto del lato di inflow, e quindi, in ogni punto del dominio si avrà comunque

$$|w(x, t)| \leq |\varepsilon|.$$

Guardando le formule risolutive per i casi di equazioni non omogenee si vede facilmente che comunque il valore di w in un punto qualsiasi sarà uguale al valore di w al bordo, corretto con l'integrale di una funzione ($f - \tilde{f}$, in modulo minore di $|\varepsilon|$) su un intervallo di lunghezza limitata (dipendente da L e da $|c|$), e quindi si avrà ancora

$$|w(x, t)| \leq C(L, |c|)|\varepsilon|.$$

Esercizio.

$$\begin{cases} u_t + 3u_x = 0 \text{ con } x \in [0, L] \text{ e } 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \cos x \text{ con } x \in [0, L] \\ u(0, t) = 1 \text{ con } 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Dalle precedenti conclusioni si ottiene:

$$\forall (x, t) \in [0, L] \times [0, T]$$

$$u(x, t) = \begin{cases} \cos(x - 3t) \text{ per } x_0 = x - 3t \in [0, L] \\ 1 \text{ per } x_0 = x - 3t \notin [0, L] \end{cases}$$

Ad esempio, per il punto $(x, t) = (1, 4)$ la caratteristica è: $x - 1 = 3(t - 4) \rightarrow x = 3t - 11$, e facendo l'intersezione con l'asse x si ha

$$\begin{cases} x = 3t - 11 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 < 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow u(1, 4) = 1$$

Se $u(0, t)$ non fosse costante, si dovrebbe trovare il suo valore facendo l'intersezione con l'asse t .

$$\begin{cases} x = 3t - 11 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ t = \frac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow u(1, 4) = g(11/3)$$

Invece per il punto $(4, 1)$ la caratteristica è:

$x - 4 = 3(t - 1) \rightarrow x = 3t + 1$, e facendo l'intersezione con l'asse x si ha

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 1 \in [0, L] \Rightarrow u(4, 1) = \cos 1.$$

Capitolo 3

Equazioni alle derivate parziali del secondo ordine

Ci occuperemo di equazioni differenziali del secondo ordine lineari e a coefficienti costanti. Indicando con x e y le variabili indipendenti, la scrittura generale è

$$\underbrace{au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}}_{\text{parte principale}} + \dots = 0$$

dove a, b, c sono i coefficienti, e nella parte “...” ci sono termini che coinvolgono derivate di u di ordine inferiore.

Queste equazioni sono di tre tipi: *ellittiche, paraboliche e iperboliche*. La classificazione viene fatta guardando il comportamento della parte principale nel modo seguente: convertendo (per esempio pensando di usare la trasformata di Fourier) le derivate in variabili elevate al grado della derivata, cioè

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow x^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rightarrow y^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \rightarrow xy,$$

si ottiene l'equazione di una conica (anche se degenera):

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$$

Il tipo di curva è dato dal discriminante:

- Se $b^2 - ac < 0$ si ha un'ellisse \rightarrow equazione ellittica
- Se $b^2 - ac = 0$ si ha una parabola \rightarrow equazione parabolica
- Se $b^2 - ac > 0$ si ha un'iperbole \rightarrow equazione iperbolica

Una delle variabili indipendenti può essere il tempo t , nel qual caso la soluzione u dipende sia dallo spazio x che dal tempo: $u = u(x, t)$ e l'equazione si dice *evolutiva*. Nelle equazioni *stazionarie* invece non c'è dipendenza dal tempo e la soluzione sarà $u = u(x)$ (o $u = u(x, y)$ in 2 dimensioni, o $u = u(x, y, z)$ in 3 dimensioni).

Esempio 1. Prototipo di equazione ellittica, problema di Poisson

$$-\Delta u = f$$

dove Δ è l'operatore di Laplace (o Laplaciano) dato da

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{xx} + u_{yy}$$

Questa equazione rientra nella scrittura generale con $a = -1, b = 0, c = -1$, il discriminante è -1 , e dunque l'equazione di Laplace è ellittica e stazionaria. ($x^2 + y^2 = 0$ è l'equazione di un'ellisse degenera: un punto isolato).

Esempio 2. Prototipo di equazione iperbolica, equazione delle onde

$$u_{tt} - u_{xx} = f$$

Questa equazione rientra nella scrittura generale con $a = 1, b = 0, c = -1$, il discriminante è $+1$, e dunque l'equazione delle onde è iperbolica e ovviamente evolutiva. ($t^2 - x^2 = 0$ è l'equazione di un'iperbole degenera: due rette distinte).

Esempio 3. Prototipo di equazione parabolica, equazione del calore

$$u_t - u_{xx} = f$$

Questa equazione rientra nella scrittura generale con $a = -1, b = 0, c = 0$, il discriminante è 0 , e dunque l'equazione del calore è parabolica e ovviamente evolutiva. ($x^2 = 0$ è l'equazione di una parabola degenera: una retta doppia).

N.B. Per gli studenti NON abituati alle coniche degeneri sarà sufficiente considerare delle coniche classiche nelle quali *la parte principale* è appunto data, rispettivamente, da $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$ e x^2 : ad esempio (sempre rispettivamente) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (cerchio unitario), $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (iperbole equilatera), e $x^2 - y = 0$ (parabola).

Capitolo 4

Equazione delle onde, o di D'Alembert

L'equazione delle onde

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad t > 0$$

fu introdotta da D'Alembert (1746) per studiare la propagazione delle onde in una corda elastica infinita (una corda molto lunga con la dimensione della sezione molto piccola e trascurabile rispetto alla lunghezza). c è una costante fissata che ha le dimensioni di una velocità. Infatti, facendo un'analisi dimensionale si ha

$$[u_{tt}] : [u] [t]^{-2} \quad [u_{xx}] : [u] [l]^{-2},$$

quindi, affinché l'equazione abbia senso c deve avere le dimensioni di una velocità:

$$[c]^2 : [l]^2 [t]^{-2}.$$

All'equazione appena scritta bisogna aggiungere due condizioni iniziali che assegnano ampiezza e velocità iniziali dell'onda (sulla x non ci sono limiti perché $x \in (-\infty, \infty)$). Quindi si considera il problema di Cauchy per l'equazione delle onde :

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.1)$$

Sapendo che $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b) = (a + b)(a - b)$, si può usare questa espressione sull'equazione differenziale:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0. \quad (4.2)$$

Osserviamo che l'equazione (4.2) può anche essere scritta come

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,$$

e quindi ogni funzione v che risolve l'equazione di trasporto:

$$v_t - cv_x = 0 \tag{4.3}$$

risolverà anche l'equazione (4.2). Le linee caratteristiche di (4.3) sono:

$$\frac{dx}{dt} = -c \Rightarrow x = x(t) = -ct + x_0$$

in cui x_0 è il punto di intersezione con l'asse delle x . Quindi per avere la (4.3) basterà che $v(x, t)$ sia costante lungo le caratteristiche e pari al suo valore all'istante iniziale: $v(x, t) = \varphi(x_0) = \varphi(x + ct)$, dove φ è una funzione da trovare imponendo le altre condizioni.

In particolare abbiamo trovato che: per ogni funzione φ di una variabile, abbastanza regolare, la scelta $u := \varphi(x + ct)$ fornisce una soluzione della equazione delle onde (4.2) (cosa che peraltro, a posteriori, è anche facile da controllare).

Osserviamo però che l'equazione (4.2) può anche essere scritta come

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,$$

e quindi ogni funzione w che risolve l'equazione di trasporto:

$$w_t + cw_x = 0 \tag{4.4}$$

risolverà anche l'equazione (4.2). Le linee caratteristiche di (4.4) sono:

$$\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow x = x(t) = ct + x_0$$

in cui x_0 è il punto di intersezione con l'asse delle x . Quindi per avere la (4.4) basterà che $w(x, t)$ sia costante lungo le caratteristiche $x = x_0 + ct$, e pari al suo valore all'istante iniziale: $w(x, t) = \psi(x_0) = \psi(x - ct)$, dove ψ è una funzione da trovare imponendo le altre condizioni.

In particolare abbiamo trovato che: per ogni funzione ψ di una variabile, abbastanza regolare, la scelta $u := \psi(x - ct)$ fornisce una soluzione della equazione delle onde (4.2).

Quindi possiamo cercare la soluzione del problema delle onde come sovrapposizione delle due onde $u(x, t) = \varphi(x + ct)$ e $u(x, t) = \psi(x - ct)$:

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct) \tag{4.5}$$

Per trovare φ e ψ sfruttiamo le condizioni iniziali:

1. $u(x, 0) = u_0(x) \rightarrow \varphi(x) + \psi(x) = u_0(x)$
2. $u_t(x, 0) = u_1(x) \rightarrow c\varphi'(x) + (-c)\psi'(x) = u_1(x),$

ottenendo un sistema di due equazioni in due incognite (φ e ψ):

$$\begin{cases} \varphi(x) = u_0(x) - \psi(x) \\ c[u_0'(x) - \psi'(x) - \psi'(x)] = u_1(x) \rightarrow c[u_0'(x) - 2\psi'(x)] = u_1(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \varphi(x) = u_0(x) - \psi(x) \\ \psi'(x) = \frac{1}{2}u_0'(x) - \frac{1}{2c}u_1(x) \end{cases}$$

Integrando tra x_0 e x la seconda equazione si ha

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \frac{1}{2}[u_0(x) - u_0(x_0)] - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x u_1(s) ds$$

da cui si ottiene

$$\psi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x u_1(s) ds + k, \quad (4.6)$$

avendo posto $k = \psi(x_0) - \frac{1}{2}u_0(x_0)$ (che dipende solo da x_0). Dalla prima equazione si ricava la $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x u_1(s) ds - k. \quad (4.7)$$

Sostituendo nella (4.5) si deduce

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi(x + ct) + \psi(x - ct) \\ &= \frac{1}{2}u_0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x+ct} u_1(s) ds - k \\ &\quad + \frac{1}{2}u_0(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x-ct} u_1(s) ds + k. \end{aligned}$$

Quindi la soluzione $u(x, t)$ dell'equazione delle onde (4.1) è:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x + ct) + u_0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds$$

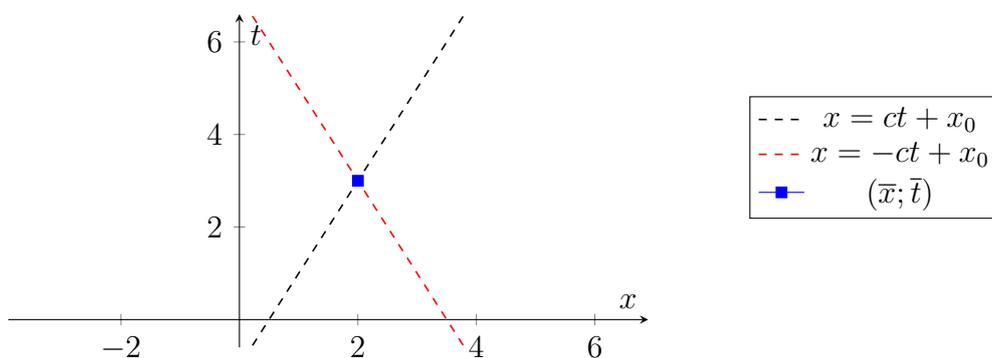
chiamata *FORMULA DI D'ALEMBERT*.

Se indichiamo con U_1 una qualunque primitiva di u_1 possiamo anche scrivere la formula precedente come

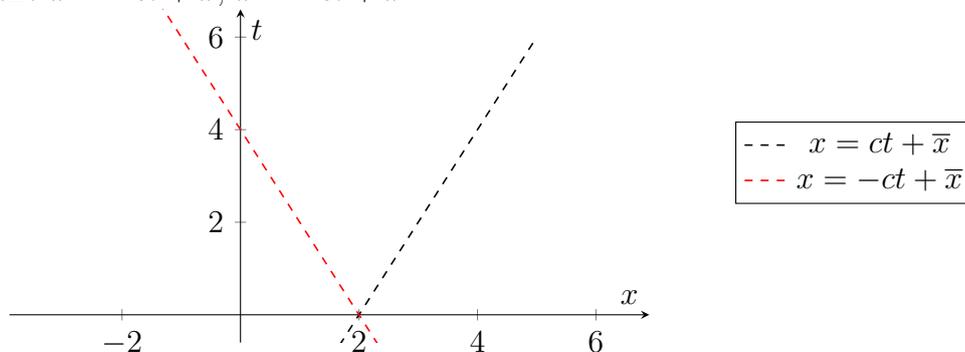
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2c} [cu_0(x + ct) + cu_0(x - ct) + U_1(x + ct) - U_1(x - ct)] \\ &= \frac{1}{2c} [(cu_0 + U_1)(x + ct) + (cu_0 - U_1)(x - ct)]. \end{aligned}$$

4.1 Dominio di dipendenza e dominio di influenza

Guardando la formula di D'Alembert, ci si accorge che la soluzione in un punto (\bar{x}, \bar{t}) dipende dai valori del dato u_0 nelle due intersezioni, con l'asse delle x , delle due caratteristiche passanti per (\bar{x}, \bar{t}) , e dipende anche dai valori della velocità iniziale in tutto l'intervallo $[\bar{x} - c\bar{t}, \bar{x} + c\bar{t}]$. Il triangolo compreso tra le due caratteristiche appena disegnate e l'asse delle x è costituito da tutti i punti che rappresentano il **dominio di dipendenza**: in tutto l'insieme di quei punti, la soluzione $u(x, t)$ dipende dai valori di u_0 e di u_1 nell'intervallo $[\bar{x} - c\bar{t}, \bar{x} + c\bar{t}]$.



Se invece ci si mette in punto \bar{x} sull'asse x da cui partono due caratteristiche $x = -ct + \bar{x}$, $x = ct + \bar{x}$:



si vede che $u_0(\bar{x})$ e $u_1(\bar{x})$ influenzano i valori di $u(x, t)$ in tutto lo spazio compreso tra le due caratteristiche uscenti da \bar{x} ; l'insieme di tutti quei punti viene chiamato **dominio di influenza**.

Una perturbazione in \bar{x} , come si propaga? Dopo quanto tempo la si avverte? La perturbazione si propaga lungo le due caratteristiche con velocità c . Essa sarà avvertita nella posizione x^* dopo un tempo t^* dato da :

$$t^* = \frac{|x^* - \bar{x}|}{c}$$

da cui si evince che se c è grande, il tempo in cui si avverte la perturbazione è piccolo; viceversa se c è piccolo, il tempo in cui verrà avvertita la perturbazione sarà grande.

4.2 Soluzione fondamentale dell'equazione delle onde

Studiamo ora il caso della cosiddetta *Soluzione Fondamentale*, che è definita come la soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} & t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & \forall x \\ u_t(x, 0) = \delta_0(x) & \forall x \end{cases} \quad (4.8)$$

dove $\delta_0(x)$ rappresenta la massa di Dirac o impulso di Dirac centrato in 0. Il pedice della δ indica dove è applicata la massa.

Per gli studenti che non hanno familiarità con la delta di Dirac è opportuno aprire una parentesi con qualche breve richiamo.

Richiami sulla delta di Dirac

In Fisica: $\delta_p(x)$ viene usata, ad esempio, per rappresentare la *densità* di un corpo puntiforme (oppure la *densità di carica* di una carica puntiforme, oppure la *pressione* di un carico concentrato, etc...) collocato nella posizione p .

Poiché $\rho = \frac{m}{V}$ (massa diviso volume), al tendere a zero (attorno al punto p) del volume V su cui la massa è distribuita, la densità tenderà ad infinito. Considerando per semplicità il caso di una sola dimensione (e quindi

considerando, in realtà, una *densità lineare*, ovvero una massa per unità di lunghezza), avremo le seguenti proprietà:

$$\int_a^b \delta_p(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in [a, b] \\ 0 & \text{se } p \notin [a, b] \end{cases}$$

e in generale

$$\int_a^b \delta_p(x) f(x) dx = \begin{cases} f(p) & \text{se } p \in [a, b] \\ 0 & \text{se } p \notin [a, b] \end{cases}$$

In Matematica una delta di Dirac si può introdurre nel modo seguente.

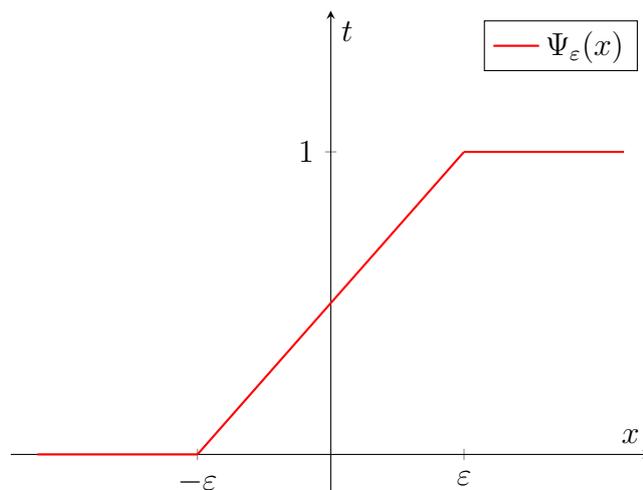
- Per $\varepsilon > 0$ (destinato a tendere a zero) consideriamo la funzione $\Psi_\varepsilon(x)$ definita da (si veda la figura seguente)

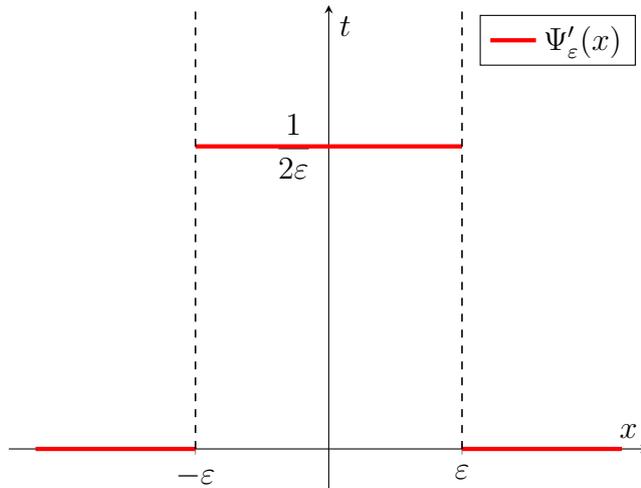
$$\Psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq -\varepsilon \\ \frac{x + \varepsilon}{2\varepsilon} & \text{per } -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 1 & \text{per } x \geq \varepsilon \end{cases}$$

Passando al limite, puntualmente, per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha

- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi_\varepsilon(x) = H(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1/2 & \text{per } x = 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$

in cui $H(x)$ è la funzione gradino (o di Heaviside).





La funzione $\Psi_\varepsilon(x)$ non è derivabile in $-\varepsilon$ e in ε ma si può derivare a tratti. Avremo:

$$\bullet \Psi'_\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} & \text{per } -\varepsilon < x < \varepsilon \\ 0 & \text{per } x > \varepsilon \end{cases}$$

e passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\bullet \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi'_\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{per } x \neq 0 \\ +\infty & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Quindi poniamo

$$\bullet \delta_0(x) = \text{“}H'(x)\text{”} = \begin{cases} 0 & \text{per } x \neq 0 \\ +\infty & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

(La funzione $H(x)$ non è derivabile in 0 quindi mettiamo la sua derivata tra virgolette).

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi'_\varepsilon(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dx = \frac{1}{2\varepsilon} (\varepsilon - (-\varepsilon)) = 1$$

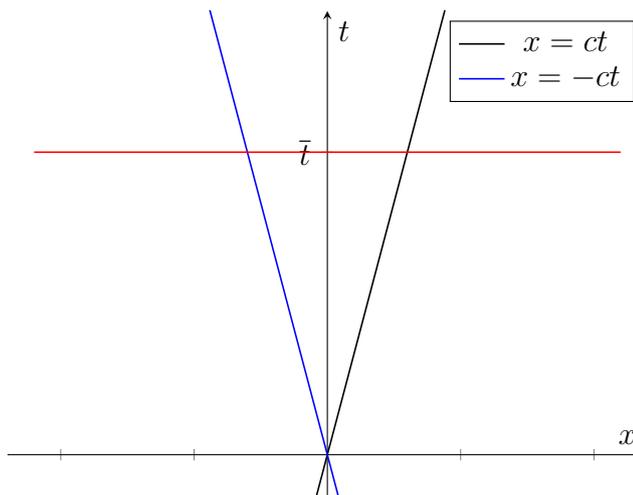
N.B. per $x < \varepsilon$ e per $x > \varepsilon$ la funzione $\Psi'_\varepsilon(x)$ è nulla quindi si considera solo il tratto compreso tra $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$. Più in generale

$$\int_a^b \delta_0(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Tornando al problema (4.8), la Formula di D'Alembert con i dati del problema considerato dà:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[0 + 0] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \delta_0(s) ds = \frac{1}{2c} [H(x+ct) - H(x-ct)]$$

Disegnata sarebbe:



La soluzione vale $\frac{1}{2c}$ in tutti i punti del piano compresi tra le due rette caratteristiche, ossia:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2c} & -ct \leq x \leq ct \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.9)$$

Notiamo che, per ogni \bar{t} fissato, l'area (nel piano (x, u)) dell'onda $u = u(x, \bar{t})$ data da (4.9) vale

$$Area = \int_{x-c\bar{t}}^{x+c\bar{t}} \frac{1}{2c} ds = \frac{1}{2c} (x + c\bar{t} - x + c\bar{t}) = \bar{t}$$

L'area dell'onda al tempo \bar{t} è pari a \bar{t} , quindi cresce al crescere di \bar{t} , ma *non dipende dalla velocità* c . Quando c va all'infinito, cioè più alta è la velocità di propagazione, più u tenderà a 0. Se c tende 0, cioè più bassa è la velocità di propagazione, più u tenderà a ∞ . Ma poiché l'area si mantiene costante, all'aumentare della velocità c il valore di u si abbassa e l'onda si allarga.

Analogamente se consideriamo, nello spazio tridimensionale (x, t, z) la funzione $z = u(x, t)$ dove u è data dalla soluzione (4.9) di (4.8), e fissiamo un

$\bar{t} > 0$, nella striscia $x \in \mathbb{R}$, $0 < t < \bar{t}$, troviamo un prisma di base triangolare (con vertici $(0, 0)$, $(-c\bar{t}, \bar{t})$ e $(c\bar{t}, \bar{t})$) e altezza $1/2c$ il cui volume vale $\bar{t}^2/2$, che, ancora, non dipende da c .

Riassumiamo quanto visto precedentemente per il problema (4.1). Abbiamo trovato l'espressione analitica della soluzione tramite la FORMULA DI D'ALEMBERT:

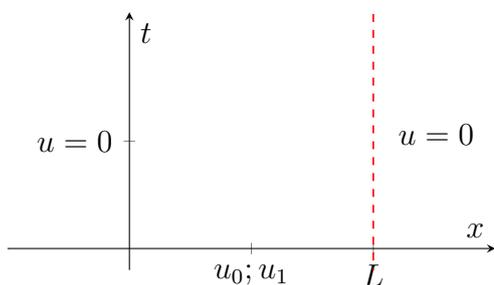
$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x + ct) + u_0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds$$

Questo ci permette di affermare che il problema considerato è ben posto. Infatti:

1. La soluzione esiste perché è stata ricavata una soluzione in forma analitica
2. La soluzione è unica perché il problema è lineare e l'unicità si dimostra per contraddizione: si suppone che esistano due soluzioni $u^{(1)} \neq u^{(2)}$ che verificano lo stesso problema (cioè con gli stessi dati iniziali), si fa la differenza tra i due problemi e si vede che la funzione differenza $w(x, t) = u^{(1)} - u^{(2)}$ risolve il problema delle onde con dati iniziali pari a 0. Dalla formula di D'Alembert si ha quindi $w(x, t) = u^{(1)} - u^{(2)} = 0$ che rappresenta la contraddizione (esattamente lo stesso procedimento usato finora negli altri casi).
3. La dipendenza continua dai dati è ancora conseguenza della formula di D'alembert: la soluzione è una funzione continua dei dati e quindi dipende in modo continuo dai dati.

4.3 Equazione delle onde per una corda di lunghezza finita (problema ai limiti)

Passiamo ora a considerare un problema ai limiti, cioè un problema in cui la corda ha una lunghezza finita L , per cui la presenza della derivata seconda rispetto a x impone di avere una ulteriore condizione (che per semplicità, qui assumeremo essere rappresentata da $u = 0$) in ciascuno dei due estremi dell'intervallo $(0, L)$.



Il problema diventa:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in [0; L] & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & u_t(x, 0) = u_1(x) & x \in [0; L] \\ u(0, t) = 0 & u(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

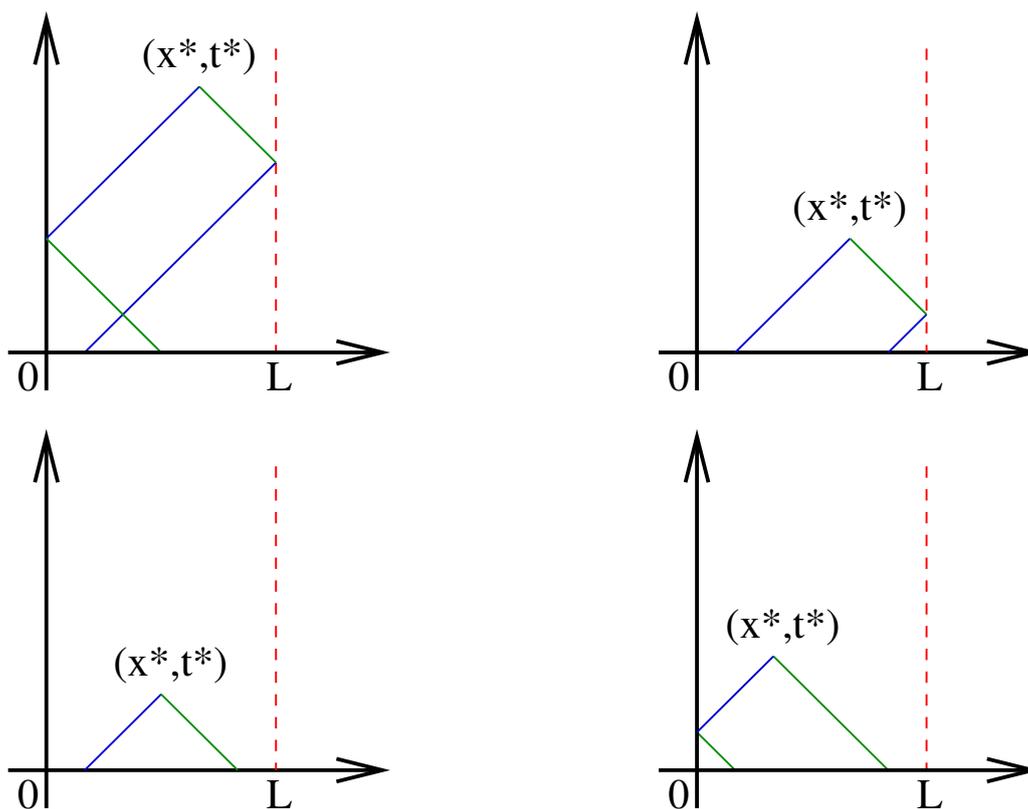


Figura 4.1: Caratteristiche: $\varphi(x + ct) = costante$, $\psi(x - ct) = costante$

Per mostrare l'esistenza della soluzione del problema (4.10) possiamo procedere combinando le strategie usate per l'equazione del trasporto su un dominio limitato e per l'equazione delle onde su tutto \mathbb{R} .

Osserviamo che, come abbiamo visto, nel caso della equazione delle onde, per ogni punto (x^*, t^*) passano *due* linee caratteristiche:

$$x - x^* = c(t - t^*) \quad \text{e} \quad x - x^* = -c(t - t^*) \quad (4.11)$$

(che nella Figura 4.1 appaiono di colore blu e verde, rispettivamente).

Osserviamo inoltre che, date $u_0(x)$ e $u_1(x)$ su $(0, L)$, procedendo come in (4.6) e (4.7), possiamo facilmente ricostruire, per $t = 0$, e per ogni $x_0 \in (0, L)$, le due funzioni φ e ψ che poi saranno costanti lungo le caratteristiche $x = x_0 + ct$ e $x = x_0 - ct$, rispettivamente.

Per ricostruire la u , nel caso più semplice di un punto (x^*, t^*) come nel disegno in basso a sinistra di Figura 4.1, conoscendo i valori su entrambe le due linee caratteristiche (verde e blu) per $t = 0$ abbiamo il loro valore anche nel punto (x^*, t^*) e quindi possiamo calcolare $u(x^*, t^*)$ come somma delle due (come in (4.5)). Negli altri tre casi della Figura 4.1, invece, una delle caratteristiche (o entrambe) incontrano una delle rette $x = 0$ oppure $x = L$. Ma possiamo osservare che, avendo posto $u = 0$ su tali linee, avremo che il valore lungo una delle due (φ o ψ) sarà opposto al valore sull'altra (visto che la somma, u , fa zero!). Quindi, se in un punto della $x = 0$ o della $x = L$ conosciamo uno dei due valori sapremo anche l'altro. Questo spiega perché, nella Figura 4.1, le caratteristiche cambiano colore (da verde a blu o viceversa) quando incontrano uno dei due bordi. Ma in tutti i casi, per ogni punto (x^*, t^*) , possiamo seguire le due caratteristiche di (4.11) passanti per tale punto, giù giù (eventualmente rimbalzando sui bordi laterali e cambiando colore) fino ad arrivare all'intervallo iniziale (guardate attentamente la figura per convincervi). E una volta giunti sull'intervallo iniziale il valore su di esse è noto.

Verifichiamo ora (per il caso del problema (4.10)), che la soluzione u dipende con continuità dai dati iniziali $u_0(x)$ e $u_1(x)$. Il risultato che otterremo permetterà di ricavare, al tempo stesso, l'unicità della soluzione e la "buona positura" del problema.

4.3.1 Stabilità

Si moltiplica l'equazione differenziale per u_t :

$$u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) = 0$$

e si integra tra 0 ed L :

$$\int_0^L u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx = 0.$$

Ricordando che $u_t u_{tt} = \frac{1}{2} \frac{\partial (u_t^2)}{\partial t}$, si può scrivere:

$$\int_0^L \left(\frac{1}{2} \frac{\partial (u_t^2)}{\partial t} - c^2 u_t u_{xx} \right) dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L u_t^2(x, t) dx - c^2 \int_0^L u_t(x, t) u_{xx}(x, t) dx = 0$$

Concentrandosi solo sul secondo integrale e svolgendolo per parti si ottiene:

$$\int_0^L u_t(x, t) u_{xx}(x, t) dx = - \int_0^L u_{tx}(x, t) u_x(x, t) dx + \left[u_t(x, t) u_x(x, t) \right]_{x=0}^{x=L}$$

Notiamo ora che, essendo $u(0, t) = u(L, t) = 0$ per ogni t , si avrà anche che $u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0$ e quindi il termine tra parentesi quadra nell'ultima equazione è uguale a zero (sempre per ogni t). Ricordando ora che

$$u_x(x, t) u_{xt}(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial (u_x)^2}{\partial t},$$

si ottiene:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_0^L ((u_t(x, t))^2 + c^2 (u_x(x, t))^2) dx}_{} = 0$$

Il risultato dell'integrale in dx di oggetti che sono funzione di x e di t sarà una funzione solo di t . Tale funzione è chiamata con $E(t)$ e (a meno del fattore ρ , che rappresenta la densità lineare della corda, che abbiamo supposto costante e semplificato dalla equazione) rappresenta un'energia, data da:

$$E(t) := \int_0^L ((u_t(x, t))^2 + c^2 (u_x(x, t))^2) dx.$$

Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t} (E(t)) = 0 \Rightarrow E'(t) = 0 \Rightarrow E(t) = \text{costante} = E(0),$$

cioè l'energia iniziale del sistema si conserva. Da qui deriva la denominazione di *equazioni conservative* con cui vengono denotate le equazioni di questo

tipo. Se i dati iniziali sono limitati, l'energia sarà limitata e per ogni istante t essa sarà uguale all'energia iniziale. Si ha quindi **la stabilità**:

$$\int_0^L [u_t^2(x, t) + c^2 u_x^2(x, t)] dx = E(t) = E(0) = \int_0^L [(u_1(x))^2 + c^2 (u_0'(x))^2] dx$$

In particolare vediamo che, se i dati iniziali $u_0(x)$ e $u_1(x)$ sono entrambi nulli, l'energia iniziale (cioè al tempo zero) sarà nulla, e tale sarà anche l'energia per ogni tempo t . Questo dimostra immediatamente anche **l'unicità** della soluzione. Infatti, per linearità, se avessimo due soluzioni $u^{(1)}(x, t)$ e $u^{(2)}(x, t)$ con gli stessi dati, la differenza w risolverebbe un problema con dati uguali a zero, e l'energia associata a w sarebbe nulla per ogni tempo t :

$$E_w(t) = \int_0^L [w_t^2 + c^2 w_x^2] dx = E_w(0) = 0.$$

Ma l'energia è l'integrale di una somma di quadrati, e quindi sarà nulla se e solo se entrambi i termini w_t e w_x sono identicamente nulli, che (tenendo conto dei dati iniziali e al contorno) ci dice che la w stessa è identicamente uguale a zero. Quindi $u^{(1)} = u^{(2)}$ e l'unicità è dimostrata.

Esercizio.

$$(P) \begin{cases} u_{tt} - 36u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \cos(\pi x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Trovare la soluzione: $u = u(x, t) = ?$

Sapendo che: $u_0(x) = \sin(\pi x)$, $u_1(x) = \cos(\pi x)$, $c^2 = 36$ e usando la formula di d'Alembert si ottiene:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x + ct) + u_0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds$$

in cui:

$$u_0(x + ct) = \sin(\pi(x + 6t))$$

$$u_0(x - ct) = \sin(\pi(x - 6t))$$

$$u_1(s) = \cos(\pi s) \rightarrow \int \cos(\pi s) ds = \frac{1}{\pi} \sin(\pi s) + \text{costante}$$

Da cui segue:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{2}[\sin(\pi(x + 6t)) + \sin(\pi(x - 6t))] + \frac{1}{12} \int_{x-6t}^{x+6t} \cos(\pi s) ds \\
 &= \frac{1}{2}[\sin(\pi(x + 6t)) + \sin(\pi(x - 6t))] \\
 &\quad + \frac{1}{12\pi}(\sin[\pi(x + 6t)] - \sin[\pi(x - 6t)]) \\
 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12\pi}\right) \sin[\pi(x + 6t)] + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12\pi}\right) \sin[\pi(x - 6t)]
 \end{aligned}$$

Verifica.

- $u(x, 0) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12\pi}\right) \sin[\pi(x)] + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12\pi}\right) \sin[\pi(x)] = \sin(\pi x)$
- $u_t = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12\pi}\right)(6\pi) \cos[\pi(x + 6t)] + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12\pi}\right)(-6\pi) \cos[\pi(x - 6t)]$
da cui:

$$\begin{aligned}
 u_t(x, 0) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12\pi}\right)(6\pi) \cos(\pi x) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12\pi}\right)(-6\pi) \cos(\pi x) = \\
 &= \frac{1}{2} \cos(\pi x) + \frac{1}{2} \cos(\pi x) = \cos(\pi x)
 \end{aligned}$$

Quindi le condizioni iniziali sono verificate. Resta da controllare che la soluzione trovata verifichi l'equazione differenziale. Questo è lasciato come esercizio a casa.

4.4 Estensione a più dimensioni: strumenti analitici

Prima di estendere il problema delle onde in più dimensioni spaziali ricordiamo alcune definizioni e proprietà utili per il seguito.

- **Operatore di Laplace (o Laplaciano):** $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ in $2D$
(somma delle derivate parziali seconde rispetto alle 2 variabili indipendenti. In 3 dimensioni spaziali sarebbe $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, ma qui considereremo solo problemi in 2 dimensioni spaziali).

- **Gradiente:** indicato con ∇ (si legge *nabla*), è un operatore differenziale che si applica ad una funzione, cioè ad una variabile scalare, e restituisce come risultato un vettore:

$$u = u(x, y) \rightarrow \nabla u(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

- **Divergenza:** è un operatore differenziale che si applica ad un vettore e restituisce uno scalare come risultato:

$$\underline{V} = (V_1, V_2) \Rightarrow \operatorname{div} \underline{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}$$

Se: $\underline{V} = (u_x, u_y) = \nabla u$ segue che:

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u$$

Teorema della divergenza di Gauss: dato un vettore \underline{V} definito in un dominio D , si ha:

$$\int_D \operatorname{div} \underline{V} dx dy = \int_{\partial D} \underline{V} \cdot \underline{n} ds$$

in cui $\underline{n} = (n_x, n_y)$ è il versore della normale uscente dal bordo.

Formula di Gauss–Green: è un'estensione (in pratica, un corollario) del Teorema della divergenza di Gauss. Dati un vettore \underline{V} , e una funzione φ , entrambi differenziabili, si ha:

$$\int_D \operatorname{div} \underline{V} \varphi dx dy = - \int_D \underline{V} \cdot \nabla \varphi dx dy + \int_{\partial D} \varphi \underline{V} \cdot \underline{n} ds \quad (4.12)$$

Dimostrazione. Applicando il teorema della divergenza di Gauss al vettore $\underline{V} \varphi$ si ha

$$\int_D \operatorname{div}(\underline{V} \varphi) dx dy = \int_{\partial D} \underline{V} \cdot \underline{n} \varphi ds.$$

D'altra parte, sviluppando $\operatorname{div}(\underline{V} \varphi)$ si ha

$$\operatorname{div}(\underline{V} \varphi) = (\operatorname{div} \underline{V}) \varphi + \underline{V} \cdot \nabla \varphi$$

che sostituito nell'integrale a sinistra porta a (4.12). ◇

Esercizio. La formula di Gauss–Green è una integrazione per parti: date due funzioni u e φ , poniamo $\underline{V} = (u, 0)$. Abbiamo, usando (4.12),

$$\begin{aligned} \int_D u_x \varphi \, dx dy &= \int_D \operatorname{div} \underline{V} \varphi \, dx dy = - \int_D \underline{V} \cdot \underline{\nabla} \varphi \, dx dy + \int_{\partial D} \underline{V} \cdot \underline{n} \varphi \, ds \\ &= - \int_D u \varphi_x \, dx dy + \int_{\partial D} u \cos(nx) \varphi \, ds \end{aligned}$$

e analogamente ponendo $\underline{V} = (0, v)$ avremmo

$$\int_D v_y \varphi \, dx dy = - \int_D v \varphi_y \, dx dy + \int_{\partial D} v \cos(ny) \varphi \, ds.$$

Reciprocamente, usando la formula di integrazione per parti (e percorrendo le uguaglianze in senso inverso) dimostreremo la formula di Gauss–Green con $\underline{V} = (u, v)$

$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{div} \underline{V} \varphi \, dx dy &= \int_D \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \varphi + \frac{\partial V_2}{\partial y} \varphi \right) dx dy \quad (\text{si integra per parti}) \\ &= - \int_D V_1 \varphi_x \, dx dy + \int_{\partial D} V_1 \varphi \cos(nx) \, ds - \int_D V_2 \varphi_y \, dx dy + \int_{\partial D} V_2 \varphi \cos(ny) \, ds \\ &= - \int_D (V_1 \varphi_x + V_2 \varphi_y) \, dx dy + \int_{\partial D} (V_1 \cos(nx) + V_2 \cos(ny)) \varphi \, ds \\ &= - \int_D \underline{V} \cdot \underline{\nabla} \varphi \, dx dy + \int_{\partial D} \varphi \underline{V} \cdot \underline{n} \, ds \end{aligned}$$

e otteniamo (4.12). ◇

Usando la formula di Gauss–Green si ottiene, in particolare,

$$\int_D \Delta u \, v \, dx dy = \int_D \operatorname{div}(\underline{\nabla} u) \, v \, dx dy = - \int_D \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, dx dy + \int_{\partial D} v \underline{\nabla} u \cdot \underline{n} \, ds$$

cioè:

$$\boxed{\int_D (\Delta u \, v + \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v) \, dx dy = \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds} \quad (GG)$$

avendo usato, nell'ultimo passaggio

$$\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(ny) = u_x n_x + u_y n_y = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

4.5 Equazione delle onde in 2 dimensioni spaziali

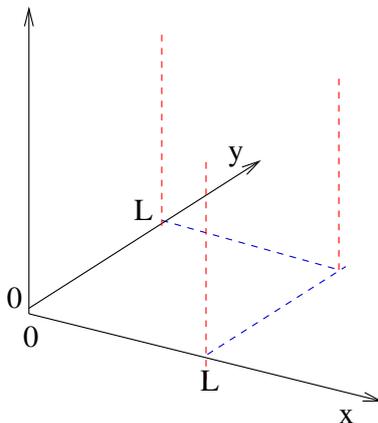
Sia Q il quadrato

$$Q = [0; L] \times [0; L].$$

Si cerca una funzione $u = u(x, y, t)$ soluzione del problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & (x, y) \in Q \quad t > 0 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad u_t(x, y, 0) = u_1(x, y) & \forall x, y \in Q \\ u(\cdot, t) = 0 \quad \text{su } \Gamma = \partial Q, \quad \forall t \end{cases} \quad (4.13)$$

in cui $\Gamma = \partial Q$ rappresenta il bordo del quadrato Q .



N.B. Come nel caso di una sola dimensione spaziale, anche qui per avere l'unicità della soluzione dell'equazione differenziale si ha bisogno di condizioni iniziali e di condizioni ai limiti.

Questo problema studia le vibrazioni in una membrana elastica che in questo caso è rappresentata dal quadrato Q . Adesso dovremmo studiare se il problema è ben posto, cioè studiare l'esistenza, l'unicità e la stabilità della soluzione. Dimostrare l'esistenza di una soluzione, però, non è facile: in casi semplici si può dedurre l'espressione analitica della soluzione per separazione di variabili, dimostrando così costruttivamente l'esistenza di una soluzione, ma in generale la dimostrazione della esistenza richiede strumenti matematici abbastanza raffinati. Qui ci limitiamo ad assumere che (4.13) abbia soluzioni, e a studiare la **stabilità** (da cui si determinerà anche l'unicità, come nel caso di una sola dimensione spaziale).

4.5.1 Stabilità

Si moltiplica l'equazione differenziale per u_t :

$$u_t(u_{tt} - c^2 \Delta u) = 0,$$

e, per ogni t , si integra rispetto a x e a y su tutto Q :

$$\int_Q u_t(u_{tt} - c^2 \Delta u) dx dy = 0$$

da cui:

$$\int_Q u_t \cdot u_{tt} dx dy - c^2 \int_Q u_t \Delta u dx dy = 0 \quad (4.14)$$

Si ha che:

1. $u_t u_{tt} = \frac{1}{2} \frac{\partial(u_t^2)}{\partial t} = 2u_t \frac{\partial u_t}{\partial t} \frac{1}{2}$
2. per trattare il secondo integrale di (4.14) bisogna integrare per parti; cioè, in più dimensioni, bisogna usare le formule di *Gauss–Green* (4.12):

$$\int_Q u_t \Delta u dx dy = - \int_Q \nabla u_t \cdot \nabla u dx dy + \int_{\partial Q} u_t \nabla u \cdot \underline{n} ds$$

dove l'ultimo integrale è nullo poiché su ∂Q si ha $u = 0$ per ogni t e quindi anche $u_t = 0$ per ogni t . Adesso ritornando a (4.14) si ottiene:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_Q (u_t)^2 dx dy + c^2 \int_Q \nabla u_t \cdot \nabla u dx dy = 0 \quad (4.15)$$

Sapendo che $\nabla u_t \cdot \nabla u = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^2$ e sostituendo in (4.15) si può scrivere:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_Q u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 dx dy = 0 \quad (4.16)$$

Come nel caso monodimensionale, chiamiamo l'integrale in (4.16) con $E(t)$ (perché dipende solo da t). Si avrà:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} E(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad E'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad E(t) = cost$$

uguale al valore per $t = 0$ che noi già conosciamo:

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_Q \left[u_t^2 + c^2 |\underline{\nabla} u|^2 \right] dx dy = \\ &= \int_Q \left[(u_t(x, y, 0))^2 + c^2 |\underline{\nabla} u(x, y, 0)|^2 \right] dx dy = \\ &= \int_Q \left[u_1^2(x, y) + c^2 |\underline{\nabla} u_0^2(x, y)| \right] dx dy \quad \forall t. \end{aligned}$$

Ciò equivale a dire che si ha la dipendenza continua dai dati della soluzione, cioè la cosiddetta **stabilità**.

4.5.2 Unicità

Vediamo ora come, in particolare, dai conti precedenti segua anche la **unicità** della soluzione di (4.13).

Infatti, come nei casi precedenti, se $u^{(1)}(x, y, t)$ e $u^{(2)}(x, y, t)$ sono due soluzioni di (4.13) con gli stessi dati iniziali, per linearità avremo che la loro differenza $w := u^{(1)} - u^{(2)}$ risolve il problema (4.13) con dati iniziali entrambi nulli.

Sapendo che il problema è stabile, cioè l'energia associata a w si mantiene costante, si può scrivere:

$$E_w(t) = E_w(0) = \int_Q \left[\frac{dw}{dt} [w(x, y, 0)]^2 + c^2 |\underline{\nabla} w(x, y, 0)|^2 \right] dx dy = 0$$

(essendo i dati iniziali di w entrambi nulli). Ne consegue che

$$\int_Q [w_t^2 + c^2 |\underline{\nabla} w|^2] dx dy = 0 \quad \forall t$$

Perché l'integrale sia nullo, bisogna che siano nulli gli integrandi:

$$\begin{cases} w_t(x, y, t) = 0 & \forall (x, y, t) \\ \underline{\nabla} w(x, y, t) = 0 & \forall (x, y, t) \end{cases}$$

da cui segue banalmente che w ha tutte e tre le derivate nulle e quindi è costante in tutto il prisma $Q \times [0, +\infty)$. Ma w è nulla sul bordo, e quindi è zero dappertutto. Ne consegue che $u^{(1)}(x, y, t) \equiv u^{(2)}(x, y, t)$ e l'unicità è dimostrata.

Capitolo 5

Formulazioni variazionali di problemi ellittici

Premessa. La trattazione matematicamente corretta della formulazione variazionale di problemi ai limiti per equazioni a derivate parziali richiederebbe strumenti teorici abbastanza complessi, che escono largamente dagli scopi di questo corso.

Ci accontenteremo pertanto, in un certo numero di punti, di una presentazione necessariamente vaga, con parecchie *trasgressioni* qua e là. Naturalmente, in questi punti, non verrà pretesa nessuna conoscenza rigorosa da parte degli alunni (che possono tranquillizzarsi). Spesso, in questi casi, aggiungeremo delle brevi osservazioni per segnalare, a grosse spanne, il motivo per cui siamo di fronte ad una trasgressione.

In ogni caso sarà opportuno cominciare con qualche breve richiamo su nozioni di algebra lineare. Tutto, o quasi tutto, dovrebbe già essere stato visto nei corsi della Laurea triennale, ma qualche richiamo per rinfrescare le idee e fissare le notazioni non farà certo male

5.1 Richiami di algebra lineare

5.1.1 Spazi vettoriali lineari su \mathbb{R}

Uno *spazio vettoriale lineare su \mathbb{R}* è un insieme V nel quale sono definite due operazioni: una *somma*, e un *prodotto per uno scalare*.

Alla **somma** (una operazione che ad ogni coppia di elementi di V associa un terzo elemento di V , e sarà indicata col solito segno “+”) si richiedono le proprietà

- la somma è commutativa ($u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$) e associativa ($(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V$).
- esiste in V un elemento (che indichiamo naturalmente con “0”) tale che $0 + v = v \quad \forall v \in V$
- per ogni $v \in V$ esiste in V il suo opposto (che indichiamo con “ $-v$ ”) cioè un elemento di V tale che $v + (-v) = 0$

Il **prodotto per uno scalare** è una applicazione che ad ogni coppia (α, v) con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ associa un altro elemento di V (di solito indicato con αv). Si richiede che

- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$
- $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall v, w \in V$
- $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$
- $1 v = v \quad \forall v \in V$

In questo corso non tratteremo spazi vettoriali lineari nei quali l’insieme degli scalari non sia uguale a \mathbb{R} . Quindi possiamo permetterci di parlare semplicemente di *spazi vettoriali lineari* (senza specificare *su* \mathbb{R}). A volte anche il termine *lineare* sarà sottinteso, quando questo non pregiudica la chiarezza..

Gli spazi \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , e in generale \mathbb{R}^n sono tutti esempi di spazi vettoriali. Dato un intervallo $[a, b]$ l’insieme $C^0([a, b])$ delle funzioni continue da $[a, b]$ in \mathbb{R} è anch’esso uno spazio vettoriale. Etc.

5.1.2 Applicazioni lineari e bilineari; funzionali

Sia V uno spazio vettoriale. Una applicazione ℓ da V in \mathbb{R} è detta essere *lineare* se

$$\forall u, v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{si ha } \ell(\alpha u + \beta v) = \alpha \ell(u) + \beta \ell(v).$$

Spesso, trattando gli spazi vettoriali che intervengono nello studio delle equazioni a derivate parziali, (spazi che quasi sempre sono *spazi di funzioni*) le applicazioni da tali spazi in \mathbb{R} vengono chiamate *funzionali*, e se sono lineari si parla di *funzionali lineari*.

Una applicazione a da $V \times V$ in \mathbb{R} è detta essere *bilineare* se

$$\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{si ha } a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w)$$

$$\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{si ha } a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w)$$

(cioè, in pratica, se è lineare in ciascuno dei suoi due argomenti).

5.1.3 Spazi vettoriali normati

Sia V uno spazio vettoriale. Una **norma** su V è una applicazione $V \rightarrow \mathbb{R}^+$ (indicata con $\|\cdot\|_V$) che ha le seguenti proprietà:

- $\|v\|_V \geq 0 \quad \|v\|_V = 0 \iff v = 0 \quad \forall v \in V$
- $\|\alpha v\|_V = |\alpha| \|v\|_V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$
- $\|v_1 + v_2\|_V \leq \|v_1\|_V + \|v_2\|_V \quad \forall v_1, v_2 \in V$

Esempi. In \mathbb{R}^n l'applicazione

$$\mathbf{x} \rightarrow \|\mathbf{x}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

è una norma, come pure ciascuna delle applicazioni

$$\mathbf{x} \rightarrow \|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p},$$

per ogni p con $1 \leq p < +\infty$, è una norma; inoltre è una norma anche la

$$\mathbf{x} \rightarrow \|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|,$$

(che, come si può dimostrare, è il limite per $p \rightarrow +\infty$ delle precedenti). Infine, nello spazio $C^0([a, b])$ sono norme le

$$f \rightarrow \|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

per ogni p con $1 \leq p < +\infty$, ed è una norma anche la

$$f \rightarrow \|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

5.1.4 Continuità di funzionali lineari e forme bilineari; norme duali

Sia V uno spazio vettoriale normato, e sia ℓ un funzionale lineare su V . Diciamo che ℓ è **continuo** da V in \mathbb{R} se

$$\exists M \text{ tale che } |\ell(v)| \leq M \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (5.1)$$

Potrebbe essere interessante notare che, sfruttando la linearità di ℓ (che implica, in particolare, che $\ell(0) = 0$), si vede subito che la (5.1) implica direttamente che ℓ è continuo in 0 nel vecchio senso della continuità della Analisi:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \|v - 0\|_V < \delta \Rightarrow |\ell(v) - \ell(0)| < \varepsilon$$

(basterà prendere $\delta = \varepsilon/M$). Poi, con facili passaggi si potrebbe sfruttare ancora la linearità di ℓ per mostrare che (5.1) implica la “continuità nel vecchio senso” anche in ogni $u_0 \in V$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall w \in V : \|w - u_0\|_V < \delta \Rightarrow |\ell(w) - \ell(u_0)| < \varepsilon$$

(infatti ponendo $v := w - u_0$ ci si riconduce al caso precedente).

Usando la (5.1) si può facilmente definire *la norma di un funzionale lineare e continuo* come

$$\|\ell\| := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|\ell(v)|}{\|v\|_V}. \quad (5.2)$$

In altri termini potremmo dire che “la norma di ℓ è uguale alla più piccola costante M che rende vera la (5.1)”, ma non vorremmo andare nel difficile...

Lo spazio dei funzionali lineari e continui su uno spazio vettoriale normato V può essere fornito in modo ovvio della definizione di *somma di funzionali* e di quelle di *prodotto di un funzionale per uno scalare* $\in \mathbb{R}$, che lo rendono esso stesso un spazio vettoriale chiamato **spazio duale di V** e indicato con V' . La norma introdotta in (5.2) viene detta *norma duale* e indicata con $\|\ell\|_{V'}$. Quindi, riassumendo:

$$\|\ell\|_{V'} := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|\ell(v)|}{\|v\|_V}. \quad (5.3)$$

Dato uno spazio vettoriale normato V e una forma a bilineare su V , diciamo che a è *continua* se

$$\exists M \text{ tale che } |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

In analogia con quanto fatto in (5.2) possiamo anche definire

$$\|a\| := \sup_{u, v \in V \setminus \{0\}} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_V \|v\|_V}.$$

che però non useremo molto spesso.

5.2 Introduzione alle formulazioni variazionali

5.2.1 Generalità

Poiché una parte ellittica è sempre presente nei problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali del secondo ordine (siano essi ellittici, parabolici o iperbolici), ci occuperemo ora di problemi ellittici, e introdurremo la loro formulazione variazione (detta anche *debole*).

Il tipico esempio di operatore alle derivate parziali di tipo ellittico è costituito dal Laplaciano Δ , e l'equazione corrispondente sarà del tipo: data f trovare u tale che $\Delta u = f$ in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

5.2.2 Condizioni ai limiti

All'equazione differenziale vanno aggiunte condizioni ai limiti sul bordo di Ω (cioè su $\Gamma = \partial\Omega$). Tipicamente, data una funzione g , definita su Γ , possiamo avere:

- $u = g$ su Γ , detta *Condizione ai limiti di Dirichlet* (omogenea se $g = 0$), in cui si assegna il valore che u deve avere su Γ .
- $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ su Γ , detta *Condizione ai limiti di Neumann* (omogenea se $g = 0$) in cui si assegna la derivata normale uscente che u deve avere su Γ (che, in molte applicazioni, avrà il significato di “assegnare il flusso uscente”: $\nabla u \cdot \underline{n} = g$)

Ma spesso la frontiera Γ viene suddivisa in due parti: $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ con $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ (in realtà l'intersezione sarà costituita da punti isolati: i bordi delle due zone) e si assegnano due funzioni g_D e g_N richiedendo che

- $u = g_D$ su Γ_D , e $\frac{\partial u}{\partial n} = g_N$ su Γ_N *Condizioni ai limiti miste Dirichlet/Neumann* (omogenee se $g_D = 0$ e $g_N = 0$).

Ecco quindi alcuni esempi di problemi ai limiti in cui si considerano, per semplicità, Condizioni ai Limiti omogenee.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{ES1})$$

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \Gamma \end{cases} \quad (\text{ES2})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \Gamma_N \end{array} \right. \quad (\text{ES3})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(k(\underline{x})\underline{\nabla}u) + \gamma(\underline{x})u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_D \\ k(\underline{x})\underline{\nabla}u \cdot \underline{n} = 0 & \text{su } \Gamma_N \end{array} \right. \quad (\text{ES4})$$

A partire dai problemi differenziali in *forma forte* (come quelli scritti qui sopra) deduciamo ora la *formulazione variazionale* (o *formulazione debole*) che sarà il punto di partenza per l'approssimazione numerica.

5.2.3 Condizioni naturali e condizioni forzate

Come vedremo, la formulazione variazionale (un derivato moderno del vecchio “principio dei lavori virtuali”) consiste nel costruire due spazi V_{trial} e V_{test} (che molto spesso coincidono) e due applicazioni:

- $a : V_{trial} \times V_{test} \rightarrow \mathbb{R}$, che nei nostri esempi sarà sempre *bilineare* e **non contiene** le informazioni sui *termini noti* f, g
- $\ell : V_{test} \rightarrow \mathbb{R}$, che nei nostri esempi sarà sempre *lineare*, e **contiene** le informazioni sui termini noti.

La formulazione variazionale che vogliamo costruire avrà poi una forma del tipo

$$(\mathbf{FV}) \quad \text{trovare } u \in V_{trial} \text{ tale che } a(u, v) = \ell(v) \text{ per ogni } v \in V_{test} \quad (5.4)$$

Nota. *Trial* sta per “tentativo” e V_{trial} è appunto lo spazio nel quale cerchiamo (e *tentiamo* di trovare!) la soluzione u . Invece *test* sta per “esperimento”, e V_{test} è lo spazio in cui si prendono le funzioni che usiamo per “saggiare” (o *testare*) se u è davvero la soluzione o no.

Le condizioni ai limiti per problemi ellittici vengono spesso suddivise in **condizioni naturali** e **condizioni forzate**. Le condizioni naturali (omogenee o non omogenee) non vengono introdotte negli spazi V_{trial} e V_{test} , ma solo nella applicazione $\ell(v)$, e dovranno uscire fuori in modo “naturale” dalla **FV**. Al contrario, le condizioni forzate devono essere introdotte nella definizione degli spazi, in generale sia in V_{trial} che in V_{test} , e, sempre in generale,

non appaiono nè nella $a(u, v)$ nè nella $\ell(v)$. In particolare, nei nostri esempi (ES1)–(ES4) le condizioni di Dirichlet (cioè su u) saranno sempre *forzate*, e quelle di Neumann (cioè su $\partial u/\partial n$) saranno sempre *naturali*.

Ma vediamo subito degli esempi che ci aiuteranno a chiarire la differenza, e a costruire la formulazione variazionale.

5.2.4 Formulazione variazionale del Problema ES1

Il procedimento (come vedremo) è sempre il seguente: si moltiplica l'equazione differenziale per una funzione test (che sceglieremo poi opportunamente) e si integra sul dominio Ω :

$$\int_{\Omega} -\Delta u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \text{ (funzione test "regolare")}$$

Poi si integra per parti il termine a sinistra usando le formule di Gauss–Green:

$$\int_{\Omega} -\Delta u v = \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \quad \text{sempre } \forall v \text{ "regolare"}.$$

La condizione ai limiti $u|_{\partial\Omega} = 0$ non dà alcuna informazione su $\frac{\partial u}{\partial n}$, e va imposta forzatamente. Inoltre è possibile annullare il fastidioso integrale di bordo scegliendo funzioni test che siano nulle sul bordo, cioè $v = 0$ su $\partial\Omega$, come la soluzione che cerchiamo. Quindi le condizioni $u = 0$ e $v = 0$ vengono imposte in modo “forzato” nella definizione sia dello spazio V_{trial} (dove cerchiamo la u) sia dello spazio V_{test} dove facciamo variare le v (e in questo esempio i due spazi saranno uguali). Si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trovare } u \text{ "regolare" con } u = 0 \text{ su } \partial\Omega \text{ tale che} \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \text{ "regolare" con } v = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (\text{PV1})$$

Il problema variazione (PV1) va completato specificando cosa si intende per u e v “regolari”. Notiamo fin d’ora che, se avessimo avuto una condizione di Dirichlet *non omogenea* (cioè $u = g$ su Γ , con $g \neq 0$), la condizione $u = g$ avrebbe dovuto essere imposta nella scelta dello spazio V_{trial} in cui cercare la u e i due spazi V_{trial} e V_{test} sarebbero stati diversi: le funzioni di V_{trial} avendo valore al bordo uguale a g , e le funzioni di V_{test} avendo valore al bordo uguale a zero.

Cosa serve come regolarità? *Grosso modo* serve che la soluzione u , le funzioni test v , e il dato f siano tali che i due integrali siano finiti. Serve

quindi che il prodotto fv sia integrabile, e che pure il prodotto $\underline{\nabla}u \cdot \underline{\nabla}v$ sia integrabile.

Ma per entrare un po' più nei dettagli servirà aprire una parentesi e fare qualche richiamo di Analisi Funzionale.

5.3 Richiami di analisi funzionale

5.3.1 Spazi pre-Hilbertiani

Uno *spazio pre-Hilbertiano* è uno spazio vettoriale in cui è definita una applicazione **bilineare** $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, detta **prodotto scalare** e indicato con $(\cdot, \cdot)_V$, con le seguenti proprietà:

- simmetria: $\forall v, w \in V \quad (v, w)_V = (w, v)_V$
- coercività: $(v, v)_V \geq 0 \quad \forall v \in V$ e $(v, v)_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Attenzione: Non bisogna confondere

- il *prodotto per uno scalare* in cui un vettore (ad esempio $(2, 3)$), moltiplicato per uno scalare (ad esempio 7) dà come risultato un vettore (nel nostro esempio: $(14, 21)$)
- e il *prodotto scalare* in cui due vettori (ad esempio $(1, 2)$ e $(-1, 2)$) vengono moltiplicati scalarmente tra loro, producendo un numero (nel nostro caso, per il prodotto scalare euclideo, $-1 + 4 = 3$).

Ogni spazio pre-Hilbertiano diventa subito uno spazio normato, definendo

$$\|v\|_V := \left((v, v)_V \right)^{1/2} \quad (5.5)$$

ma **non** è vero il viceversa. In generale, data una norma su uno spazio vettoriale V non esiste nessun prodotto scalare che renda vera la (5.5). In effetti, quando una norma deriva da un prodotto scalare come in (5.5) si ha, per ogni coppia di vettori u e v

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad (5.6)$$

(perché i doppi prodotti si elidono). Ma non tutte le norme (anzi, solo poche) verificano la (5.6). Ad esempio, in \mathbb{R}^2 , prendendo $\mathbf{x} = (0, 1)$ e $\mathbf{y} = (1, 0)$ si ha (con facili calcoli)

$$\|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{y}\|_p = 1 \quad \text{e} \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p = 2^{1/p}$$

Quindi la (5.6) è verificata solo se

$$(2^{1/p})^2 + (2^{1/p})^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2$$

cioè se $2 \cdot 2^{2/p} = 2 + 2 = 4$, quindi solo per $p = 2$.

5.3.2 Disuguaglianza di Cauchy–Schwarz

Sia V uno spazio vettoriale pre-Hilbertiano. Vale la seguente disuguaglianza:

$$|(v, w)_V| \leq \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V$$

Dimostrazione. Siano v, w due qualunque funzioni $\in V$ e sia $t \in \mathbb{R}$. Ovviamente si ha che $tv - w \in V$ e che

$$\|tv - w\|_V^2 \geq 0.$$

Sviluppando il quadrato si ha:

$$\underbrace{t^2\|v\|_V^2 - 2t(v, w)_V + \|w\|_V^2}_{g(t)} \geq 0$$

L'equazione (di secondo grado in t) $g(t) = 0$ non può avere radici reali distinte, quindi il discriminante è ≤ 0 :

$$4(v, w)_V^2 - 4\|v\|_V^2 \|w\|_V^2 \leq 0$$

da cui il risultato.

5.3.3 Spazi di Hilbert

Uno spazio vettoriale pre-Hilbertiano V è di Hilbert se è anche completo, cioè se ogni successione di Cauchy converge, cioè:

$$\{v_n\} \text{ successione di Cauchy} \Rightarrow \exists v \in V \text{ tale che } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$$

Ricordiamo che, in uno spazio normato, una successione $\{v_n\}$ è **di Cauchy** se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n, m \text{ interi } > n_\varepsilon \text{ si ha } \|v_n - v_m\|_V < \varepsilon.$$

Conoscendo la ben nota avversione della maggioranza degli studenti per le successioni di Cauchy, in questo corso non insisteremo troppo sulla differenza tra spazi pre-Hilbertiani e spazi di Hilbert. Questa è in effetti una *trasgressione grave* ma per gli scopi principali del nostro corso (la conoscenza dei metodi numerici da usare per approssimare la soluzione di problemi ai limiti per Equazioni a Derivate Parziali) la cosa non avrà effetti troppo deleteri.

5.3.4 Lo spazio $L^2(\Omega)$

Come abbiamo già osservato, le proprietà di regolarità che servono perché (PV1) abbia senso, non sono proprietà di continuità/derivabilità, ma proprietà di integrabilità.

Cominciamo quindi a richiamare alcuni classici spazi di funzioni la cui definizione è connessa alla *integrabilità*.

Uno spazio funzionale che useremo spesso è lo spazio:

$$L^2(\Omega) := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tali che } \int_{\Omega} v^2 d\Omega < +\infty\}.$$

Nota. Un docente (ad esempio) di “Istituzioni di Analisi Superiore” vi direbbe che gli elementi di L^2 sono in realtà delle *classi di funzioni* (definite a meno di insiemi con misura di Lebesgue uguale a zero) e che l’integrabilità va intesa nel senso di Lebesgue. In pratica, però, per la risoluzione numerica noi useremo solo delle funzioni polinomiali a tratti, e per queste funzioni le differenze a cui stiamo accennando sono del tutto irrilevanti.

L^2 è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare e norma dati da

$$(v, w)_{L^2} = \int_{\Omega} vw d\Omega \quad \|v\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} v^2 d\Omega.$$

Spesso il prodotto scalare in L^2 viene indicato con $(\cdot, \cdot)_0$ e la norma viene indicata come $\|\cdot\|_0$. Verifichiamo almeno che L^2 è uno spazio pre-Hilbertiano

1. Spazio vettoriale

- $\forall v_1, v_2 \in L^2$ si ha $v_1 + v_2 \in L^2$?

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_2\|_{L^2}^2 &= \|v_1\|_{L^2}^2 + \|v_2\|_{L^2}^2 + 2(v_1, v_2)_{L^2} \\ &\leq \underbrace{\|v_1\|_{L^2}^2 + \|v_2\|_{L^2}^2 + 2\|v_1\|_{L^2} \|v_2\|_{L^2}}_{\text{(Cauchy-Schwarz)}} \\ &= (\|v_1\|_{L^2} + \|v_2\|_{L^2})^2 < +\infty \end{aligned}$$

- $\alpha v \in L^2, \forall v \in L^2, \alpha \in \mathbb{R}$? Si perché $\|\alpha v\|_{L^2}^2 = \alpha^2 \|v\|_{L^2}^2$

2. $(u, v)_{L^2} = \int_{\Omega} uv d\Omega$ è un prodotto scalare?

- La simmetria e la bi-linearità sono ovvie.

- $(v, v)_{L^2} \geq 0$ è anch’esso ovvio.

- $(v, v)_{L^2} = 0 \Leftrightarrow v = 0$?

Se $v = 0 \Rightarrow (v, v)_{L^2} = 0$. E se $(v, v)_{L^2} = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} v^2 = 0 \Rightarrow v = 0$

La completezza è abbastanza difficile da dimostrare e non viene fatta.

5.3.5 Gli spazi H^1 e H_0^1

Torniamo a (PV1). Lo spazio L^2 , con le sue proprietà, permette di dare un senso all'integrale $\int_{\Omega} f v$. Infatti, dalla definizione di prodotto scalare in L^2 e usando la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz si ha:

$$\text{se } f \in L^2 \text{ e } v \in L^2, \quad \int_{\Omega} f v = (f, v)_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \quad (\text{finito}).$$

Per dare un senso a $\int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v$, non basta che u e v siano in L^2 ; serve che anche $\underline{\nabla} u$ e $\underline{\nabla} v$ siano in $[L^2]^2$, perché in tal modo si avrebbe:

$$\int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = (\underline{\nabla} u, \underline{\nabla} v)_{L^2} \leq \|\underline{\nabla} u\|_{L^2} \|\underline{\nabla} v\|_{L^2} \quad (\text{finito}).$$

Introduciamo quindi lo spazio:

$$H^1(\Omega) := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \int_{\Omega} v^2 < +\infty, \int_{\Omega} |\nabla v|^2 < +\infty\} \quad (5.7)$$

$$= \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } v \in L^2(\Omega), \underline{\nabla} v \in [L^2(\Omega)]^2\}. \quad (5.8)$$

La norma ragionevole da usare è:

$$\|v\|_{H^1}^2 := \|v\|_{L^2}^2 + \|\underline{\nabla} v\|_{L^2}^2$$

e il prodotto scalare associato

$$(v, w)_{H^1} = (v, w)_{L^2} + (\underline{\nabla} v, \underline{\nabla} w)_{L^2}.$$

Si può dimostrare (non lo faremo qui) che con questo prodotto scalare, H^1 è uno spazio di Hilbert.

Nota. Le derivate che compaiono in (5.7) e (5.8) sono *derivate deboli*. Esse coincidono con le derivate usuali quando, ad esempio, le funzioni sono continue e derivabili a tratti (sarà sempre il nostro caso!). Torneremo su questo tra breve.

Per comodità di scrittura introduciamo anche lo spazio

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H^1(\Omega) \quad (5.9)$$

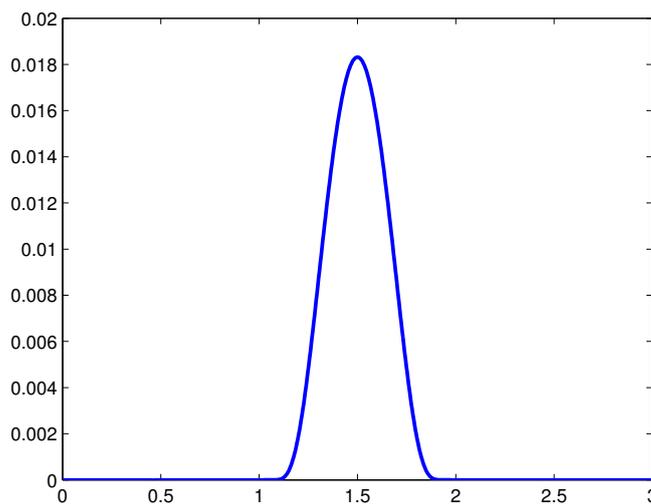
(sottospazio di $H^1(\Omega)$). Come sottospazio di H^1 , H_0^1 eredita la $\|\cdot\|_{H^1}$. Si può dimostrare che anche H_0^1 è uno spazio di Hilbert.

5.3.6 Definizione di derivata debole

Le derivate che intervengono nella definizione di H^1 non sono derivate in senso classico, ma derivate “*deboli*”. Vediamo più da vicino di cosa si tratta.

Come primo passo, richiamiamo la definizione dello spazio $C_0^\infty(]a, b[)$ dove $]a, b[$ è un intervallo della retta reale: $C_0^\infty(]a, b[)$ è lo spazio delle funzioni $]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, derivabili infinite volte, e identicamente nulle in un intorno destro di a e in un intorno sinistro di b . Un esempio, sull’intervallo $]0, 3[$ è dato dalla funzione (si veda la figura)

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{per } x \in]0, 1], \\ e^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}} & \text{per } x \in]1, 2[, \\ 0 & \text{per } x \in]2, 3[. \end{cases}$$



È banale osservare che $C_0^\infty(]a, b[) \subset L^2(]a, b[)$, qualunque sia l’intervallo $]a, b[$. Una importante proprietà dello spazio $C_0^\infty(]a, b[)$ è la seguente:
La sola funzione di $L^2(]a, b[)$ ortogonale a tutte le funzioni di $C_0^\infty(]a, b[)$ è la funzione nulla:

$$\left\{ f \in L^2(]a, b[) \text{ e } (f, \varphi)_{L^2(]a, b[)} = 0 \forall \varphi \in C_0^\infty(]a, b[) \right\} \Rightarrow f = 0.$$

Siamo ora in grado di precisare la frase “la funzione $v \in L^2(a, b)$ ha la derivata debole in $L^2(a, b)$ ”:

Data una funzione $v \in L^2(a, b)$, si dice che la sua derivata debole $v' \in L^2(a, b)$ se:

$$\exists g \in L^2(a, b) \text{ t.c. } \int_a^b v \varphi' dx = - \int_a^b g \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, b) \quad (5.10)$$

Verifichiamo che se v è derivabile in senso classico, la (5.10) coincide con la classica nozione di $v' \in L^2(a, b)$. Infatti, se v è derivabile, si può integrare per parti nella (5.10) e si ottiene:

$$- \int_a^b v' \varphi dx = - \int_a^b g \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, b) \Rightarrow g \equiv v'$$

Analogamente, in $2D$, ricordiamo che per un aperto Ω si definisce $C_0^\infty(\Omega)$ come l'insieme delle funzioni da Ω in \mathbb{R} che sono derivabili in Ω (rispetto a tutte le direzioni) infinite volte, e sono identicamente nulle in tutto un intorno del bordo $\partial\Omega$.

Poi, data $v \in L^2(\Omega)$, diremo che $\nabla v \in [L^2(\Omega)]^2$ (e quindi che $v \in H^1(\Omega)$), se esiste un $\underline{g} \in [L^2(\Omega)]^2$ tale che:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy &= - \int_{\Omega} g_1 \varphi dx dy & \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \\ \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy &= - \int_{\Omega} g_2 \varphi dx dy & \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

Come nel caso mono-dimensionale, se le derivate parziali classiche $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ esistono, integrando per parti si ottiene: $g_1 = \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2$, $g_2 = \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2$

5.3.7 Disuguaglianza di Poincaré

$$\exists C_p > 0 : \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Dimostrazione.

Consideriamo il caso monodimensionale ($\Omega = [a, b]$). Quindi

$$H_0^1(a, b) = \{v \in H^1(a, b) : v(a) = v(b) = 0\}$$

Dal 1° teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned} \forall x \in (a, b) \quad v(x) &= \int_a^x v'(t) dt \rightarrow v^2(x) = \left(\int_a^x v'(t) dt \right)^2 \implies \\ \|v\|_{L^2(a,b)}^2 &\equiv \int_a^b v^2 dx = \int_a^b \left(\int_a^x v'(t) dt \right)^2 dx = \int_a^b (v', 1)_{L^2(a,x)}^2 dx \\ &\leq \int_a^b \underbrace{\left(\|v'\|_{L^2(a,x)}^2 \|1\|_{L^2(a,x)}^2 \right)}_{\text{(Cauchy-Schwarz)}} dx \\ &\leq \|v'\|_{L^2(a,b)}^2 \int_a^b (x-a) dx = \frac{(b-a)^2}{2} \|v'\|_{L^2(a,b)}^2 \end{aligned}$$

da cui:

$$\|v\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \|v'\|_{L^2(a,b)} \quad \left(\text{quindi } C_p = \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \right).$$

La dimostrazione si estende al caso $2D$, con C_p che dipende dalla misura del dominio Ω .

Nota. Come si vede dalla dimostrazione, la disuguaglianza vale se $v(a) = 0$ oppure $v(b) = 0$, ossia basta l'annullamento in un punto solo. In $2D$ basta che v sia nulla su un pezzo (diciamo: un sottoinsieme di lunghezza non nulla) del bordo di Ω .

5.3.8 Conseguenze della disuguaglianza di Poincaré

In $H_0^1(\Omega)$, o in $H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) = \{v \in H^1, v = 0 \text{ su } \Gamma_D\}$, la $\|v\|_{H^1}$ è equivalente alla $\|\underline{\nabla}v\|_{L^2}$. Precisamente:

$$\|\underline{\nabla}v\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1} \leq \sqrt{C_p^2 + 1} \|\underline{\nabla}v\|_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ o } v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$$

dove C_p è la costante della disuguaglianza di Poincaré.

Dimostrazione:

La prima disuguaglianza è ovvia; poiché $\|v\|_{L^2} \geq 0$ si ha

$$\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|\underline{\nabla}v\|_{L^2}^2 \geq \|\underline{\nabla}v\|_{L^2}^2$$

Per Poincaré:

$$\|v\|_{H^1}^2 \leq C_p^2 \|\underline{\nabla}v\|_{L^2}^2 + \|\underline{\nabla}v\|_{L^2}^2 = (C_p^2 + 1) \|\underline{\nabla}v\|_{L^2}^2$$

da cui si ottiene il risultato.

Quindi in H_0^1 , o in H_{0,Γ_D}^1 si può usare indifferentemente l'una o l'altra norma, secondo quanto più conveniente.

5.4 Formulazioni variazionali dei problemi

(ES1)–(ES4)

5.4.1 Formulazione variazionale del Problema (ES1)

Con le notazioni che abbiamo introdotto il problema (PV1) diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trovare } u \in H^1(\Omega), \text{ con } u = 0 \text{ su } \partial\Omega, \text{ soluzione di :} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega), \text{ con } v = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{array} \right.$$

che usando anche la notazione (5.9) può essere scritto come

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trovare } u \in H_0^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{PV1})$$

che rappresenta la *Formulazione variazionale del problema di Dirichlet omogeneo* (ES1).

Se invece abbiamo un problema di Dirichlet *non omogeneo*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = g & \text{su } \Gamma = \partial\Omega \end{array} \right. \quad (\text{ES1g})$$

(con $g \neq 0$), visto che la condizione di Dirichlet è *forzata*, bisogna introdurre lo spazio

$$H_g^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = g\} \subset H^1(\Omega). \quad (5.11)$$

Notiamo che non si tratta di uno spazio vettoriale *lineare*; ad esempio, la somma di due funzioni di H_g^1 , ciascuna delle quali è uguale a g su $\partial\Omega$, sarà una funzione che vale $2g$ su $\partial\Omega$, e quindi non starà più in H_g^1 (bensì in H_{2g}^1 !); e se ad esempio $u \in H_g^1$, ovviamente $3u \in H_{3g}^1$. Si tratta di un cosiddetto *spazio vettoriale affine* (spesso abbreviato con *spazio affine*): in particolare, data una *qualunque* funzione $u_g^* \in H_g^1$ (fissata una volta per tutte), si ha evidentemente

$$H_g^1 \equiv \{u_g^*\} + H_0^1, \quad (5.12)$$

intendendo che ogni funzione u di H_g^1 può essere scritta come somma di u_g^* (sempre lei!) più una opportuna funzione u_0 di H_0^1 (che, a conti fatti, sarà ovviamente $u_0 = u - u_g^*$).

Una volta introdotto lo spazio H_g^1 , la formulazione variazionale di (ES1g) diventa ovviamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trovare } u \in H_g^1(\Omega), \text{ tale che :} \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{PVg1})$$

Come avevamo anticipato, qui V_{trial} (che risulta essere uguale a $H_g^1(\Omega)$) **non** coincide con V_{test} (che risulta invece essere uguale a $H_0^1(\Omega)$).

5.4.2 Formulazione variazionale del Problema (ES2)

Per scrivere la formulazione variazionale del problema (ES2) procediamo come prima:

$$\int_{\Omega} f v = \int_{\Omega} -\Delta u v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_{\Omega} u v \quad (5.13)$$

$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = 0$ perché $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ (condizione naturale). Quindi si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trovare } u \in H^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{PV2})$$

che rappresenta la *formulazione variazionale del problema di Neumann omogeneo* (ES2). Supponiamo ora di avere un problema di Neumann *non omogeneo*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{su } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{ES2g})$$

con $g \neq 0$. In questo caso, ritornando alla (5.13) si ha che il termine $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v$ non sarà più uguale a zero, ma a $\int_{\partial\Omega} g v$, e quindi la formulazione variazionale diventa

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trovare } u \in H^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} g v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{PVg2})$$

che è la *formulazione variazionale del problema di Neumann non omogeneo* (ES2g) Come avevamo preannunciato, gli spazi V_{trial} e V_{test} , in questo caso, coincidono ancora (come nel caso del problema di Neumann omogeneo), e la informazione sul dato g è finita al secondo membro.

5.4.3 Formulazione variazionale del Problema (ES3)

Per il problema (ES3), l'unica differenza rispetto (PV2) è data dalle condizioni ai limiti: $u = 0$ su Γ_D (da imporre) e $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ su Γ_N (naturale). In questo caso:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v$$

L'unico modo per eliminare l'integrale sul bordo Γ_D è di scegliere le funzioni test v nulle su Γ_D (come la soluzione u). Quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trovare } u \in V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ su } \Gamma_D\} \text{ soluzione di:} \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (\text{PV3})$$

che rappresenta la *formulazione variazionale del problema misto Dirichlet-Neumann omogeneo* (ES3).

Naturalmente, anche in questo caso si potrebbero considerare condizioni *non omogenee*, ad esempio $u = g_D$ su Γ_D e $\partial u / \partial n = g_N$ su Γ_N . Questo ci porterebbe a uno spazio *trial*, $V_{g,D}$ (che sarebbe uno spazio *affine* se $g_D \neq 0$), e ad uno spazio *test*, $V_{0,D}$ (che sarebbe un vero spazio vettoriale lineare).

La formulazione variazionale sarebbe quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trovare } u \in H_{g_D,D}^1, \text{ soluzione di :} \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g_N v \quad \forall v \in H_{0,D}^1 \end{array} \right. \quad (\text{PVg3})$$

5.4.4 Formulazione variazionale del Problema (ES4)

Per il problema (ES4) (condizioni ai limiti come nell'(ES3), operatore differenziale con coefficienti variabili) si procede allo stesso modo:

$$\int_{\Omega} f v = \int_{\Omega} -\text{div}(k(\underline{x}) \underline{\nabla} u) v + \int_{\Omega} \gamma(x) u v.$$

Usando sempre la formula di *Gauss-Green* (con $\underline{V} = k(\underline{x}) \underline{\nabla} u$) si ottiene

$$-\int_{\Omega} \text{div}(k(\underline{x}) \underline{\nabla} u) v = \int_{\Omega} k(\underline{x}) \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} (k(\underline{x}) \underline{\nabla} u \cdot \underline{n}) v$$

Essendo $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ si ha

$$\int_{\partial\Omega} (k(\underline{x})\nabla u \cdot \underline{n})v = \underbrace{\int_{\Gamma_N} (k(\underline{x})\nabla u \cdot \underline{n})v}_{=0 \text{ perché } k(\underline{x})\nabla u \cdot \underline{n}=0 \text{ su } \Gamma_N} + \int_{\Gamma_D} (k(\underline{x})\nabla u \cdot \underline{n})v$$

Per annullare \int_{Γ_D} basta scegliere $v = 0$ su Γ_D (come u), ottenendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trovare } u \in V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ su } \Gamma_D\} \text{ soluzione di:} \\ \int_{\Omega} k(\underline{x})\nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \gamma(\underline{x})uv = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (\text{PV4})$$

che rappresenta la *formulazione variazionale del problema misto Dirichlet-Neumann omogeneo* (ES4).

Anche in questo caso, potremmo sostituire le condizioni ai limiti *omogenee* di (ES4) con condizioni ai limiti *non omogenee*. Tutto si svolgerebbe come per il problema (ES3). Infatti, in casi come questo, l'uso o meno di coefficienti variabili non condiziona il modo in cui si devono trattare le condizioni ai limiti. Vedremo in seguito le condizioni su $k(\underline{x})$ e $\gamma(\underline{x})$ affinché il problema sia ben posto.

5.5 Formulazioni variazionali astratte

Dagli esempi precedenti si è visto che si passa dal problema differenziale in forma forte alla sua formulazione variazionale con una procedura che sostanzialmente è la stessa per tutti i problemi. Gli ingredienti principali sono le formule di Gauss–Green e una scelta opportuna delle funzioni test (nulle laddove sono imposte condizioni di Dirichlet, senza alcun vincolo laddove si hanno condizioni di Neumann).

Inoltre, come anticipato in (5.4) e come abbiamo visto negli esempi, tutte le formulazioni variazionali presentano la stessa struttura e possono essere scritti in forma astratta come:

$$\text{trovare } u \in V \text{ tale che } a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V. \quad (5.14)$$

Lo strumento per studiare la buona posizione di un problema variazionale è il Lemma di Lax–Milgram. Si tratta di un risultato importante, che richiameremo con parecchi dettagli.

5.5.1 Lemma di Lax–Milgram

Consideriamo il problema (del tipo (5.14)):

$$\text{trovare } u \in V \text{ tale che } a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V, \quad (\text{PVar})$$

dove:

- V è uno spazio di Hilbert con norma $\|v\|_V$, e prodotto scalare associato $(v, w)_V$;
- $a(\cdot, \cdot)$ è una forma bilineare da $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e continua, cioè (come abbiamo visto):

$$\exists M > 0 \quad t.c. \quad |a(v, w)| \leq M \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V$$

- $\ell(v)$ è un funzionale da $V \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continuo, cioè (come abbiamo visto):

$$\exists C_l > 0 \quad t.c. \quad |\ell(v)| \leq C_l \|v\|_V \quad \forall v \in V \quad (5.15)$$

Se, oltre alle ipotesi precedenti, $a(\cdot, \cdot)$ è V-ellittica (o *coerciva*), cioè:

$$\exists \alpha > 0 \quad \text{tale che} \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \quad (5.16)$$

allora (PVar) ha un'unica soluzione e

$$\|u\|_V \leq \frac{C_l}{\alpha}.$$

Inoltre, se $a(\cdot, \cdot)$ è simmetrica, cioè

$$\underbrace{a(v, w) = a(w, v)}_{\text{simmetria}} \quad \forall v, w \in V,$$

allora, introducendo il funzionale (dell'energia)

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v),$$

si ha che il problema (PVar) è equivalente al *problema di minimo*:

$$\text{trovare } u \in V \text{ tale che } J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V. \quad (\text{PMin})$$

Dimostrazione

Per semplicità ometteremo qui la dimostrazione della esistenza della soluzione (un po' troppo complicata per le conoscenze di base richieste in questo corso, che sarà presentata nella Appendice), e ci limiteremo alla dimostrazione degli altri punti.

Unicità della soluzione. L'unicità della soluzione si dimostra per contraddizione. Si supponga quindi che $u_1 \in V$ e $u_2 \in V$ siano due soluzioni di (PVar) e che esse siano diverse tra loro $u_1 \neq u_2$. Quindi:

$$\begin{aligned} u_1 \in V : \quad a(u_1, v) &= \ell(v) \quad \forall v \in V \\ u_2 \in V : \quad a(u_2, v) &= \ell(v) \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Sottraendo e sfruttando la linearità nel primo argomento di a , si ottiene:

$$a(u_1, v) - a(u_2, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

e poiché essa vale per qualsiasi $v \in V$, si ha in particolare

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Dalla (5.16) (ellitticità di a) si deduce quindi

$$\alpha \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Per la proprietà della norma di essere ≥ 0 si deve avere:

$$u_1 - u_2 \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

da cui la contraddizione. Quindi la soluzione è unica.

Stabilità. Sia u l'unica soluzione di (PVar). Sfruttiamo ora, con $v = u$, la (5.16) (cioè la V -ellitticità di a), la (PVar) (cioè il fatto che u risolve (PVar)), e, sempre con $v = u$, la (5.15) (limitatezza di ℓ). Abbiamo

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = \ell(u) \leq C_l \|u\|_V,$$

da cui banalmente

$$\|u\|_V^2 \leq \frac{C_l}{\alpha} \|u\|_V \quad \text{e quindi} \quad \|u\|_V \leq \frac{C_l}{\alpha}.$$

Equivalenza. Dimostriamo ora che se inoltre a è simmetrica, allora si ha l'equivalenza tra il problema variazionale (PVar) e il problema di minimo (PMin). In altre parole, si vuole dimostrare che: se \bar{u} risolve (PMin) allora risolve anche (PVar) e, viceversa, se u risolve (PVar) allora risolve anche (PMin). Cominciamo dalla prima.

1. (PMin) \Rightarrow (PVar), cioè:

Ipotesi: $\bar{u} \in V$ è tale che $J(\bar{u}) \leq J(w) \quad \forall w \in V$

Tesi: $a(\bar{u}, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V$

Per ogni $v \in V$, e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ prendiamo $w = \bar{u} + \lambda v$. Si ha: $J(\bar{u}) \leq J(w) = J(\bar{u} + \lambda v)$. Allora la funzione $F(\lambda) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$F(\lambda) = J(\bar{u} + \lambda v)$$

ha un minimo per $\lambda = 0$. Esplicitando l'espressione del funzionale J abbiamo

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= J(\bar{u} + \lambda v) = \underbrace{\frac{1}{2}a(\bar{u} + \lambda v, \bar{u} + \lambda v) - \ell(\bar{u} + \lambda v)}_{\text{dalla definizione del funzionale } J} = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}a(\bar{u}, \bar{u}) + \frac{\lambda}{2}a(v, \bar{u}) + \frac{\lambda}{2}a(\bar{u}, v) + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v) - \ell(\bar{u}) - \lambda\ell(v)}_{\text{usando la bilinearità di } a \text{ e la linearità di } \ell} = \\ &= \underbrace{\frac{a(v, v)}{2}\lambda^2 + a(\bar{u}, v)\lambda - \ell(v)\lambda + \frac{1}{2}a(\bar{u}, \bar{u}) - \ell(\bar{u})}_{\text{per la simmetria di } a} \end{aligned}$$

Quindi $F(\lambda)$ è una parabola in λ , convessa perché il coefficiente di λ^2 è positivo (per l'ipotesi di ellitticità). Per trovare il minimo si deve porre uguale a zero la $F'(\lambda)$ calcolata per $\lambda = 0$. Essendo ovviamente $F'(\lambda) = \lambda a(v, v) + a(\bar{u}, v) - \ell(v)$ avremo che

$$F'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a(\bar{u}, v) - \ell(v) = 0$$

Ma il ragionamento è stato fatto partendo da una *qualsiasi* $v \in V$, e quindi avremo che

$$a(\bar{u}, v) - \ell(v) = 0 \quad \forall v \in V$$

Abbiamo quindi dimostrato che ogni punto di minimo per J risolve il problema variazionale (PVar). Notiamo anche che, poiché (PVar) ha un'unica soluzione, anche il punto di minimo di J deve essere unico.

Passiamo quindi a dimostrare la seconda parte del nostro *se e solo se*.

2. (PVar) \Rightarrow (PMin), cioè:

Ipotesi: $u \in V$ è tale che $a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V$ (u risolve (PVar))

Tesi: $J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V$ (u minimizza il funzionale dell'energia)
 Consideriamo la differenza

$$J(u) - J(v) = \underbrace{\frac{1}{2}a(u, u) - \ell(u) - \frac{1}{2}a(v, v) + \ell(v)}_{\text{dalla definizione di } J}.$$

Se al membro di destra si somma la quantità positiva $\frac{1}{2}a(u - v, u - v)$ (si sa che è positiva dalla proprietà di ellitticità), si ottiene:

$$J(u) - J(v) \leq \frac{1}{2}a(u, u) - \ell(u) - \frac{1}{2}a(v, v) + \ell(v) + \frac{1}{2}a(u - v, u - v) \quad (5.17)$$

Si prenda in considerazione solo l'ultimo addendo aggiunto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a(u - v, u - v) &= \frac{1}{2}a(u, u) - \underbrace{\frac{1}{2}a(v, u) - \frac{1}{2}a(u, v)}_{\text{uguali per la simmetria}} + \frac{1}{2}a(v, v) = \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{per la linearità}} \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) - a(u, v) + \frac{1}{2}a(v, v) \end{aligned}$$

che inserito in (5.17) dà:

$$\begin{aligned} J(u) - J(v) &\leq \frac{1}{2}a(u, u) - \ell(u) - \frac{1}{2}a(v, v) + \ell(v) + \frac{1}{2}a(u, u) - a(u, v) + \frac{1}{2}a(v, v) \\ &= a(u, u) - \ell(u) - a(u, v) + \ell(v) = 0 \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene sfruttando (2 volte!) l'ipotesi (che u risolve (PVar)). Quindi $J(u) - J(v) \leq 0 \quad \forall v \in V$, che è la tesi. \square

5.6 Applicazioni del Lemma di Lax–Milgram

5.6.1 Esistenza e unicità della soluzione di (ES1)

Ricordiamo la formulazione variazionale di (ES1) data da (si veda (PV1)):

$$(PV1) \quad \begin{cases} \text{Trovare } u \in H_0^1(\Omega): \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (5.18)$$

Per utilizzare il Lemma su (5.18), lo riscriviamo in forma astratta definendo

$$V := H_0^1(\Omega), \quad a(v, w) := \int_{\Omega} \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w, \quad \ell(v) := \int_{\Omega} f v \quad v, w \in V$$

- $V = H_0^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con norma e prodotto scalare

$$\|v\|_V = \|\underline{\nabla}v\|_0 \quad , \quad (v, w)_V = (\underline{\nabla}v, \underline{\nabla}w)_0$$

- si deve verificare che:

$a(v, w)$ è bilineare, continua ed ellittica,
 $\ell(v)$ è lineare e continuo.

Quindi, partendo da $a(v, w)$, si ha che

$$a(v, w) = \int_{\Omega} \underline{\nabla}v \cdot \underline{\nabla}w \quad \text{è bilineare.}$$

La bilinearità è banale e deriva dalle ben note proprietà degli integrali.

Per la continuità si deve trovare una costante $M > 0$ per cui si ha:

$$|a(v, w)| \leq M \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V.$$

Si ottiene:

$$a(v, w) = \int_{\Omega} \underline{\nabla}v \cdot \underline{\nabla}w = (\underline{\nabla}v, \underline{\nabla}w)_0 \underbrace{\leq \|v\|_V \|w\|_V}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{continua con } M = 1$$

Per l'ellitticità si deve trovare una costante $\alpha > 0$ per cui si ha:

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

Nel nostro caso si ottiene, per ogni $v \in V$:

$$a(v, v) = (\underline{\nabla}v, \underline{\nabla}v)_0 = \|v\|_V^2 \Rightarrow \underbrace{\text{vale l'ellitticità con } \alpha = 1}_{a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2}$$

- Infine: $\ell(v)$ è lineare per le proprietà dell'integrale, e deve valere la continuità, cioè

$$\exists C_l > 0 \text{ t.c. } |\ell(v)| \leq C_l \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Nel caso considerato:

$$\ell(v) = \int_{\Omega} f v = (f, v)_0 \underbrace{\leq \|f\|_0 \|v\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \leq \underbrace{\|f\|_0 C_p \|v\|_V}_{\text{Poincaré (vale perché } v \in H_0^1)}} \quad \forall v \in V.$$

Quindi $\ell(v)$ è continuo e la costante di continuità è

$$C_l = \|f\|_0 C_p$$

- $a(u, v)$ è anche simmetrica.

Quindi in conclusione possiamo applicare il Lemma di Lax Milgram, e ottenere che **il problema (ES1) ha un'unica soluzione, e si ha:**

$$\|u\|_V \leq \frac{C_l}{\alpha} = \|f\|_0 C_P$$

e quindi si ha anche **dipendenza continua dai dati** (f è il solo dato del problema)

Osservazione. Il risultato $\|u\|_V \leq \frac{C_l}{\alpha}$ lega la norma della soluzione ai dati del problema (C_l , costante di continuità del funzionale, è una costante che dipende dal carico dato f , mentre α , costante di ellitticità, dipende in generale dalle proprietà del materiale).

5.6.2 Stabilità del problema (ES1)

Come abbiamo già più volte osservato, la dipendenza continua dai dati garantisce la stabilità del problema, garantisce cioè che “piccoli” errori sui dati determinano “piccoli” errori sulla soluzione. Vediamolo in dettaglio sul problema che stiamo esaminando. Sia u la soluzione “vera” corrispondente al dato f , e sia u^S la soluzione “sporca” corrispondente a un dato f^S “sporco” (ad esempio, proviene da dati di laboratorio con un margine di errore). Quindi:

$$\begin{aligned} u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v &= \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ (\text{in astratto: } u \in V : a(u, v) &= (f, v)_0 \quad \forall v \in V) \\ u^S \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla u^S \cdot \nabla v &= \int_{\Omega} f^S v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ (\text{in astratto: } u^S \in V : a(u^S, v) &= (f^S, v)_0 \quad \forall v \in V) \end{aligned}$$

Facendo la differenza fra i due problemi si ottiene:

$$\begin{aligned} u - u^S \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla(u - u^S) \cdot \nabla v &= \int_{\Omega} (f - f^S) v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ (\text{in astratto } u - u^S \in V : a(u - u^S, v) &= (f - f^S, v)_0 \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

ossia, la funzione $u - u^S$ risolve il problema con dato $f - f^S$. La dipendenza continua dai dati assicura che

$$\|u - u^S\|_V \leq C_P \|f - f^S\|_0.$$

Quindi, se $\|f - f^S\|_0 \leq \varepsilon$, con ε piccolo, si ha $\|u - u^S\|_V \leq C_P \varepsilon$. \square

5.6.3 Il problema non omogeneo (ES1g)

L'applicazione del Lemma di Lax–Milgram al caso delle condizioni di Dirichlet non omogenee (PVg1) è molto simile, ma richiede, inizialmente, maggiore attenzione. Infatti, come abbiamo osservato a proposito della definizione (5.11), lo spazio *trial*, che qui è $H_g^1(\Omega)$, **non** è uno spazio vettoriale lineare, e inoltre è diverso dallo spazio *test* $H_0^1(\Omega)$. Bisogna quindi ricorrere alla decomposizione (5.12). Supponiamo allora (cosa che nella pratica non sarà molto complicata) di conoscere esplicitamente *una* funzione (*qualsiasi!*) di $H_g^1(\Omega)$. La nostra incognita u potrà quindi essere scritta come $u = u_g + u_0$ dove u_g è nota (l'abbiamo scelta noi) e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ diventa la nostra *nuova incognita*. Con questa notazione il problema (PVg1) diventa

$$(PVg1) \quad \begin{cases} \text{trovare } u_0 \in H_0^1(\Omega), \text{ tale che :} \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u_0 \cdot \underline{\nabla} v = \int_{\Omega} f v - \int_{\Omega} \underline{\nabla} u_g \cdot \underline{\nabla} v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (5.19)$$

che differisce dal caso omogeneo (5.18) solo per il secondo membro, che qui risulta essere

$$\ell(v) := \int_{\Omega} f v - \int_{\Omega} \underline{\nabla} u_g \cdot \underline{\nabla} v.$$

È banale verificare che anche questo ℓ risulta essere *lineare*. Per la sua continuità osserviamo che, come abbiamo già visto

$$\int_{\Omega} f v = (f, v)_0 \leq \underbrace{\|f\|_0 \|v\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \leq \underbrace{\|f\|_0 C_p \|v\|_V}_{\text{Poincaré (perché } v \in H_0^1)} \quad \forall v \in V$$

e ora abbiamo anche

$$\int_{\Omega} \underline{\nabla} u_g \cdot \underline{\nabla} v \leq \underbrace{\|\underline{\nabla} u_g\|_0 \|\underline{\nabla} v\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} = \|\underline{\nabla} u_g\|_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

e quindi (sommando le due) anche il nuovo $\ell(v)$ è continuo e la costante di continuità è

$$C_l = C_p \|f\|_0 + \|\underline{\nabla} u_g\|_0,$$

e tutto procede (sostanzialmente) come prima.

5.6.4 Esistenza, unicità e stabilità del problema (ES2)

Quanto fatto per il problema (ES1) si può ripetere, in modo quasi identico, per gli altri problemi. Vediamo il problema (ES2), la cui formulazione

variazionale era (PV2):

$$(PV2) \quad \begin{cases} \text{Trovare } u \in V := H^1(\Omega) \text{ tale che:} \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Applichiamo il Lemma di Lax–Milgram con

$$a(v, w) = \int_{\Omega} \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w + \int_{\Omega} v w, \quad \ell(v) = \int_{\Omega} f v.$$

Come norma dobbiamo usare la norma di H^1 . Avremo ancora

- V è spazio di Hilbert con $\|v\|_V = \|v\|_1 = (\|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2)^{1/2}$
- a è bilineare per la proprietà degli integrali ed è continua perché

$$a(v, w) = (v, w)_1 \leq \|v\|_1 \|w\|_1$$

da cui si ha la costante di continuità $M = 1$. (Deriva dalla disuguaglianza di *Cauchy–Schwarz*.)

- ellitticità: $(a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V)$
 $a(v, v) = (v, v)_1 = \|v\|_1^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1$
- continuità del funzionale: $(\ell(v) \leq C_l \|v\|_V \quad \forall v \in V)$

$$\ell(v) = \int_{\Omega} f v = (f, v)_0 \leq \|f\|_0 \|v\|_0 \leq \underbrace{\|f\|_0 \|v\|_V}_{\|v\|_0 \leq \|v\|_V}$$

e $C_l = \|f\|_0$. Quindi: il problema ha soluzione unica $u \in V$ e

$$\|u\|_1 \leq \|f\|_0.$$

5.6.5 Il problema non omogeneo (ES2g)

Ricordiamo la formulazione variazionale del problema non omogeneo (ES2g)

$$(PVg2) \quad \begin{cases} \text{trovare } u \in H^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} g v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \quad (5.20)$$

e notiamo che, questa volta (grazie al fatto che la condizione di Neumann è *naturale*), anche nel problema non omogeneo abbiamo che lo spazio *trial* e lo

spazio *test* coincidono (sono entrambi uguali a $V := H^1(\Omega)$) e la differenza con il caso omogeneo si riscontra solo nel secondo membro

$$\ell(v) := \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} g v \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Anche qui, dobbiamo solo verificare la limitatezza di ℓ . Il primo passo è semplice

$$\int_{\Omega} f v = (f, v)_0 \leq \underbrace{\|f\|_0 \|v\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \leq \|f\|_0 \|v\|_V$$

e anche

$$\int_{\partial\Omega} g v \leq \underbrace{\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}}_{\text{Cauchy-Schwarz}}$$

ma il passo successivo, che consisterebbe nel maggiorare $\|v\|_{L^2(\partial\Omega)}$ con $\|v\|_V$, pur essendo intuitivamente ragionevole richiederebbe, per essere *dimostrato correttamente*, strumenti che sono molto al di fuori dalla portata di questo corso, e gli studenti dovranno accontentarsi *della parola* del docente (e molti saranno ben lieti di farlo).

5.6.6 Il problema (ES3)

Occupiamoci ora del problema (ES3) la cui formulazione variazionale (PV3), ricordiamo, era

$$(PV3) \quad \begin{cases} \text{Trovare } u \in V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ su } \Gamma_D\}, \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

Applichiamo il Lemma di Lax–Milgram con

$$a(v, w) = \int_{\Omega} \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} w + \int_{\Omega} v w, \quad \ell(v) = \int_{\Omega} f v.$$

Anche qui conviene scegliere la norma completa di H^1 .

- V è spazio di Hilbert con $\|v\|_V = \|v\|_1 = (\|v\|_0^2 + \|\underline{\nabla} v\|_0^2)^{1/2}$.
- a è bilineare per la proprietà degli integrali ed è continua perché

$$a(v, w) = (v, w)_1 \leq \|v\|_1 \|w\|_1$$

da cui si ha la costante di continuità $M = 1$. (Deriva dalla disuguaglianza di *Cauchy–Schwarz*.)

- ellitticità (5.16): $a(v, v) = (v, v)_1 = \|v\|_1^2 \Rightarrow \alpha = 1$

- continuità del funzionale (5.15):

$$\ell(v) = \int_{\Omega} f v = (f, v)_0 \leq \|f\|_0 \|v\|_0 \leq \|f\|_0 \underbrace{\|v\|_V}_{\|v\|_V^2 = \|v\|_0^2 + \|\nabla v\|_0^2}$$

quindi $C_l = \|f\|_0$. In conclusione: soluzione unica $u \in V$ e

$$\|u\|_1 \leq \|f\|_0.$$

L'estensione al caso non omogeneo ricalca i due casi precedenti e, per brevità, viene omessa.

5.6.7 Altro esempio di applicazione del lemma di Lax–Milgram

Consideriamo il problema (PV4) che rientra nella scrittura astratta con:

$$\begin{aligned} V &:= \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ su } \Gamma_D\} \\ a(v, w) &:= \int_{\Omega} k(\underline{x}) \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \gamma(\underline{x}) u v \\ \ell(v) &:= \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

Sappiamo che V è uno spazio di *Hilbert* sia con $\|v\|_V = \|v\|_{H^1}$ sia con $\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2}$. Scegliamo:

$$\|v\|_V = \|v\|_{H^1}$$

La bilinearità di $a(\cdot, \cdot)$ e la linearità di $\ell(\cdot)$ sono immediata conseguenza delle proprietà degli integrali

- Continuità di $\ell(\cdot)$ (serve $f \in L^2$)

$$\ell(v) = (f, v)_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1} \quad \forall v \in V$$

($\Rightarrow C_l = \|f\|_{L^2}$)

- Continuità di $a(\cdot, \cdot)$

$$\begin{aligned} a(v, w) &\leq \max |k(\underline{x})| \|\nabla v\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2} + \max |\gamma(\underline{x})| \|v\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \\ &\leq \underbrace{\max |k(\underline{x})|}_{k_{\max}} \|v\|_1 \|w\|_1 + \underbrace{\max |\gamma(\underline{x})|}_{\gamma_{\max}} \|v\|_1 \|w\|_1 \\ &= \{k_{\max} + \gamma_{\max}\} \|v\|_1 \|w\|_1 \quad (M = \{k_{\max} + \gamma_{\max}\}) \end{aligned}$$

(Questo vale se $\max |k(\underline{x})|$ e $\max |\gamma(\underline{x})|$ sono finiti)

- Ellitticità di $a(\cdot, \cdot)$:

$$a(v, v) = \int_{\Omega} k(\underline{x}) |\underline{\nabla} v|^2 + \int_{\Omega} \gamma(\underline{x}) v^2$$

Per continuare, serve $k(\underline{x})$ positiva, non solo limitata, e $\gamma(\underline{x})$ non negativa. Quindi le ipotesi sui dati sono:

$$0 < k_{\min} \leq k(\underline{x}) \leq k_{\max} \quad , \quad 0 \leq \gamma_0 \leq \gamma(\underline{x}) \leq \gamma_{\max}$$

Se $\gamma(\underline{x}) \geq \gamma_0 > 0$ possiamo prendere $\alpha := \min\{k_{\min}, \gamma_0\}$ e avere

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq k_{\min} \|\underline{\nabla} v\|_0^2 + \gamma_0 \|v\|_0^2 \\ &\geq \min\{k_{\min}, \gamma_0\} \|v\|_1^2 \end{aligned}$$

Se invece $\gamma_0 = 0$, bisognerà usare Poincaré ($\|\underline{\nabla} v\|_0 \geq \|v\|_0 / C_P$) e scrivere, ad esempio:

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq k_{\min} \|\underline{\nabla} v\|_0^2 = \frac{k_{\min}}{2} \|\underline{\nabla} v\|_0^2 + \frac{k_{\min}}{2} \|\underline{\nabla} v\|_0^2 \\ &\geq \frac{k_{\min}}{2} \|\underline{\nabla} v\|_0^2 + \frac{k_{\min}}{2C_P^2} \|v\|_0^2 \geq \min\left\{\frac{k_{\min}}{2}, \frac{k_{\min}}{2C_P^2}\right\} \|v\|_1^2 \end{aligned}$$

ottenendo la ellitticità con $\alpha = \min\left\{\frac{k_{\min}}{2}, \frac{k_{\min}}{2C_P^2}\right\}$. Quindi, se i dati $f, k(\underline{x}), \gamma(\underline{x})$ verificano le ipotesi

$$\begin{aligned} f &\in L^2 \\ 0 &< k_{\min} \leq k(\underline{x}) \leq k_{\max} \\ 0 &\leq \gamma_0 \leq \gamma(\underline{x}) \leq \gamma_{\max} \end{aligned}$$

tutte le ipotesi del *Lemma di Lax–Milgram* sono verificate, e dunque (PV4) ha una ed una sola soluzione $u \in V$, e inoltre

$$\|u\|_V \leq \frac{\|f\|_0}{\alpha}$$

Alternativamente, in V si potrebbe scegliere come norma $\|v\|_V = \|\underline{\nabla} v\|_0$, equivalente alla $\|v\|_1$, e si dovrebbe verificare il lemma di Lax–Milgram con la nuova norma. Vediamo cosa si otterrebbe con questa norma.

- Continuità di a :

$$\begin{aligned}
a(v, w) &\leq \underbrace{k_{\max} \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 + \gamma_{\max} \|u\|_0 \|v\|_0}_{\text{per Cauchy-Schwarz}} \\
&\leq k_{\max} \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 + \underbrace{\gamma_{\max} C_P^2 \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0}_{\text{per Poincaré}} \\
&= (k_{\max} + \gamma_{\max} C_P^2) \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 \\
&\implies M = k_{\max} + \gamma_{\max} C_P^2.
\end{aligned}$$

- Ellitticità di a :

$$a(v, v) \geq k_{\min} (\nabla v, \nabla v)_0 + \gamma_0 (v, v)_0 \geq k_{\min} \|\nabla v\|_0^2 \quad (\alpha = k_{\min}).$$

- Continuità di ℓ :

$$\ell(v) = (f, v)_0 \leq \|f\|_0 \|v\|_0 \leq C_P \|f\|_0 \|\nabla v\|_0 \quad (C_l = C_P \|f\|_0).$$

Le ipotesi del Lemma sono verificate anche in questo caso, semplicemente le varie costanti che si ottengono sono diverse.

5.7 Appendice: Dimostrazione del lemma di Lax–Milgram

Come primo passo, dimostriamo il Teorema di Riesz.

Theorem 5.7.1 (Teorema di Riesz). *Sia H uno spazio di Hilbert, e $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale lineare e continuo su H . Allora esiste un elemento $u_\varphi \in H$ tale che*

$$(u_\varphi, v)_H = \varphi(v) \quad \forall v \in H. \quad (5.21)$$

Dimostrazione. Il risultato è ovvio se $\varphi(v) \equiv 0$ per ogni v (prendendo $u_\varphi = 0$). Altrimenti poniamo

$$K := \{v \in H \text{ tale che } \varphi(v) = 0\} = \text{nucleo di } \varphi$$

(che non potrà coincidere con “tutto H ” visto che φ non è identicamente zero) e sia K^\perp il suo ortogonale

$$K^\perp := \{v \in H \text{ tale che } (v, k)_H = 0 \forall k \in K\}.$$

K^\perp è uno spazio lineare non vuoto. Quindi possiamo prendere una $w \in K^\perp$ tale che $\|w\|_H = 1$. Poi definiamo

$$u_\varphi := w\varphi(w) \quad (5.22)$$

e controlliamo che tale u_φ verifichi (5.21). Ricordando che $\varphi(v)$ (qualunque sia la $v \in H$) è *uno scalare*, osserviamo dapprima che per ogni v di H si ha

$$\varphi(\varphi(w)v - w\varphi(v)) = \varphi(w)\varphi(v) - \varphi(w)\varphi(v) \equiv 0$$

e quindi $\varphi(w)v - w\varphi(v) \in K$. Siccome $w \in K^\perp$ avremo

$$(w, \varphi(w)v - w\varphi(v))_H = 0. \quad (5.23)$$

Per finire, per ogni $v \in H$, usando prima (5.22), poi il fatto che $\varphi(w)$ è uno scalare, poi la (5.23), poi che anche $\varphi(v)$ è uno scalare, ed infine che $\|w\|_H = 1$, avremo:

$$(u_\varphi, v)_H = (w\varphi(w), v)_H = (w, \varphi(w)v)_H = (w, w\varphi(v))_H = \varphi(v)\|w\|_H^2 = \varphi(v).$$

□

Dal Teorema di Riesz segue abbastanza facilmente che lo spazio H' di tutte le applicazioni lineari e continue da H in \mathbb{R} è anch'esso uno spazio di Hilbert, con la norma (5.3)

$$\|\ell\|_{H'} := \sup_{v \in H \setminus \{0\}} \frac{\ell(v)}{\|v\|_H}$$

ed è isomorfo a H . Riguardando la dimostrazione del teorema di Riesz osserviamo anche che

$$\|u_\varphi\|_H = \|w\varphi(w)\| = |\varphi(w)| = \frac{|\varphi(w)|}{\|w\|_H} \leq \|\varphi\|_{H'}$$

e che

$$\|\varphi\|_{H'} = \sup_{v \in H} \frac{\varphi(v)}{\|v\|_H} = \sup_{v \in H} \frac{(u_\varphi, v)}{\|v\|_H} \leq \|u_\varphi\|$$

Nel caso in cui la $a(u, v)$ è **simmetrica**, dal Teorema di Riesz scende immediatamente il Lemma di Lax–Milgram. Infatti, dato lo spazio V è sufficiente considerare lo spazio V_a che contiene esattamente gli stessi elementi dello spazio V , ma nel quale il prodotto scalare è dato da

$$(u, v)_{V_a} := a(u, v).$$

È immediato verificare che per ogni funzionale ℓ , lineare e continuo da V in \mathbb{R} , lo stesso ℓ risulta essere lineare e continuo anche sullo spazio V_a , e quindi applicando il Teorema di Riesz in V_a avremo che per ogni $\ell \in V'$ esiste una $u_\ell \in V_a \equiv V$ tale che

$$a(u_\ell, v) = (u_\ell, v)_{V_a} = \ell(v) \quad \forall v \in V_a$$

e la u_ℓ sarà proprio la soluzione che cerchiamo. \square

Nel caso in cui la a non è simmetrica si richiede un lavoro aggiuntivo. Il primo passo consiste nel ricordare il Teorema delle contrazioni (l'analogo dell'omonimo teorema visto in Analisi).

Theorem 5.7.2 (Teorema delle contrazioni). *Sia H uno spazio di Hilbert, e sia F una applicazione da H in H tale che*

$$\exists \gamma < 1 \text{ tale che } \|F(u) - F(v)\|_H \leq \gamma \|u - v\|_H \quad \forall u, v \in H \quad (5.24)$$

(cioè F è una contrazione in H : diminuisce le distanze). Allora esiste uno e un solo \bar{u} tale che

$$\bar{u} = F(\bar{u}). \quad (5.25)$$

Dimostrazione. La dimostrazione è praticamente identica a quella dell'Analisi: si parte da un u_0 qualsiasi, e si costruisce la successione u_n per ricorrenza

$$u_{n+1} := F(u_n) \quad \forall n \geq 0. \quad (5.26)$$

Ovviamente

$$\|u_2 - u_1\|_H = \|F(u_1) - F(u_0)\|_H \leq \gamma \|u_1 - u_0\|_H$$

e procedendo nello stesso modo

$$\|u_{n+1} - u_n\|_H = \|F(u_n) - F(u_{n-1})\|_H \leq \gamma \|u_n - u_{n-1}\|_H \leq \dots \leq \gamma^n \|u_1 - u_0\|_H$$

ma anche, per ogni n e m interi, ad esempio con $n > m$, si ha

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_H &= \|(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_{m+1} - u_m)\|_H \\ &\leq \sum_{r=m}^{n-1} \|u_{r+1} - u_r\|_H \leq \sum_{r=m}^{n-1} \gamma^r \|u_1 - u_0\|_H \\ &= \gamma^m \|u_1 - u_0\|_H \sum_{r=0}^{n-m} \gamma^r = \gamma^m \frac{1 - \gamma^{n-m+1}}{1 - \gamma} \|u_1 - u_0\|_H \\ &\leq \gamma^m \frac{1}{1 - \gamma} \|u_1 - u_0\|_H. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Facciamo vedere che la successione così costruita è di Cauchy. Dato che γ^n tende a zero per n che tende all'infinito, per ogni $\varepsilon > 0$ potremo trovare un intero n_ε tale che

$$\gamma^{n_\varepsilon} < \frac{1 - \gamma}{\|u_1 - u_0\|_H} \varepsilon. \quad (5.28)$$

Allora per ogni coppia di interi n e m con $n \geq m \geq n_\varepsilon$ avremo, da (5.27) e da (5.28)

$$\|u_n - u_m\|_H \leq \gamma^m \frac{1}{1 - \gamma} \|u_1 - u_0\|_H \leq \gamma^{n_\varepsilon} \frac{1}{1 - \gamma} \|u_1 - u_0\|_H \leq \varepsilon$$

il che dimostra che la successione è di Cauchy. Dato che H è *completo* esisterà una \bar{u} in H tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - \bar{u}\|_H = 0.$$

Dalla continuità della F (che segue banalmente dalla (5.24)), passando al limite in entrambi i membri della (5.26), si ha facilmente la (5.25).

Inoltre, tale \bar{u} è l'unico elemento che soddisfa la (5.25). Infatti, se si avesse $u^* = F(u^*)$ per una qualche altra $u^* \neq \bar{u}$, applicando la (5.24) avremmo

$$\|u^* - \bar{u}\|_H = \|F(u^*) - F(\bar{u})\|_H \leq \gamma \|u^* - \bar{u}\|_H,$$

che è impossibile per $\gamma < 1$. □

Dimostrazione del Lemma di Lax–Milgram. Possiamo ora usare il teorema delle contrazioni per dimostrare il Lemma di Lax–Milgram nel caso generale di una a anche non simmetrica.

Cominciamo a definire, per $u \in H$, il funzionale $Au \in H'$, definito da

$$Au(v) := a(u, v)$$

e osserviamo che

$$\|Au\|'_H = \sup_{v \in H \setminus \{0\}} \frac{Au(v)}{\|v\|_H} = \sup_{v \in H \setminus \{0\}} \frac{a(u, v)}{\|v\|_H} \leq M \|u\|_H$$

Indichiamo poi con $r : H' \rightarrow H$ l'operatore definito dal teorema di Riesz (per intenderci, l'operatore $\varphi \rightarrow u_\varphi =: r(\varphi)$) e poi, per ogni $\rho > 0$, definiamo l'applicazione F_ρ , da H in sè

$$F_\rho(u) := u - \rho r(Au - \ell) \tag{5.29}$$

e verifichiamo se, per qualche ρ , l'applicazione F_ρ risulta essere una contrazione. Per ogni coppia di elementi u e v di H , ponendo $w := u - v$ abbiamo

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_H^2 &= \|(u - v) - \rho r(Au - Av)\|_H^2 \\ &= \|w - \rho r(Aw)\|_H^2 = \|w\|_H^2 - 2\rho a(w, w) + \rho^2 \|r(Aw)\|_H^2 \\ &\leq \|w\|_H^2 - 2\rho\alpha \|w\|_H^2 + \rho^2 M \|w\|_H^2 = (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M) \|w\|_H^2 \end{aligned}$$

Consideriamo la funzione λ definita da $\lambda(\rho) := 1 - 2\rho\alpha + \rho^2M$. Si vede facilmente che $\lambda(0) = 1$ e che la derivata $\lambda'(0) = -2\alpha < 0$. In un intorno destro di zero, avremo quindi $\lambda(\rho) < 1$ e quindi, per tali ρ , l'applicazione F_ρ sarà una contrazione.

Per il teorema delle contrazioni, la F_ρ avrà allora un punto fisso, cioè una \bar{u} tale che $\bar{u} = F_\rho(\bar{u})$. Quindi, ricordando la definizione di F_ρ data da (5.29) avremo $\bar{u} = \bar{u} - \rho r(A\bar{u} - \ell)$ da cui facilmente $A\bar{u} - \ell = 0$. Questa è una uguaglianza tra elementi di H' che implica ovviamente

$$a(\bar{u}, v) \equiv A\bar{u}(v) = \ell(v)$$

che ci dice che \bar{u} risolve (PVar). □

Capitolo 6

Approssimazione di problemi ai limiti per PDEs

6.1 Il metodo delle differenze finite

Il metodo alle *differenze finite* è stato il primo metodo introdotto per approssimare la soluzione di problemi ai limiti per equazioni differenziali. Vediamolo su un problema modello semplice monodimensionale (già visto all'inizio del corso):

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

Pur nella sua semplicità, questo problema modella varie applicazioni interessanti. Vediamo alcuni esempi.

6.1.1 Esempi di applicazioni modellate dal problema (P)

Barra elastica in trazione (piccoli spostamenti)



f = forza assiale u = spostamento assiale E = coefficiente elastico

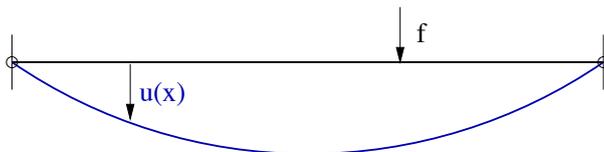
$$\begin{aligned} \sigma &= -Eu' && \text{(legge di Hooke)} \\ \sigma' &= f && \text{(equazione di equilibrio)} \\ u(0) &= 0, \quad u(L) = 0 && \text{(condizione al bordo)} \end{aligned}$$

Sostituendo la relazione sforzi-deformazioni nell'equazione di equilibrio si ottiene

$$-u''(x) = f/E, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0$$

cioè il nostro problema modello.

Filo elastico (piccoli spostamenti)



f = carico verticale u = spostamento verticale

E = coefficiente elastico. Trascuriamo il peso del filo. (In piccoli spostamenti $\varepsilon \simeq u'$)

$$\begin{aligned} \sigma &= -Eu' && \text{(legge di Hooke)} \\ \sigma' &= f && \text{(equazione di equilibrio)} \\ u(0) &= 0, \quad u(L) = 0 && \text{(condizioni al bordo)} \end{aligned}$$

Questo porta ancora al nostro modello.

Diffusione del calore

f = sorgente di calore u = temperatura

k = coefficiente di conduzione del calore

$$\begin{aligned} q &= -ku' && \text{(condizione di Fourier)} \\ q' &= f && \text{(conservazione dell'energia)} \\ u(0) &= \alpha, \quad u(L) = \beta && \text{(condizione al bordo)} \end{aligned}$$

Elettrostatica

f = densità di carica u = potenziale elettrico E = campo elettrico

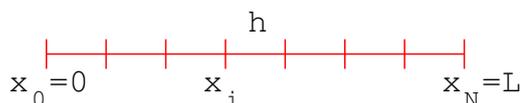
ϵ = permittività D = induzione elettrica

$$\begin{aligned} D &= \epsilon E = -\epsilon u' \\ D' &= f \\ u(0) &= \alpha, \quad u(L) = \beta \end{aligned}$$

In tutti i casi, indicando con u la variabile primale (con significato fisico diverso a seconda dell'applicazione: spostamento assiale, spostamento verticale, temperatura, potenziale elettrico) e sostituendo la legge fisica nell'equazione di equilibrio si arriva sempre al nostro problema modello.

Tornando al nostro problema modello, in alcuni casi si è in grado di integrare due volte il dato $f(x)$ e conseguentemente è possibile trovare la soluzione esatta. In generale però questo può essere complicato, per cui il problema deve essere risolto numericamente in modo approssimato. Abbandonando l'idea di trovare la soluzione in tutto l'intervallo, ci limitiamo a cercarla solo in alcuni punti di $[0, L]$. A tale scopo suddividiamo l'intervallo $[0, L]$ in un certo numero N di parti (per semplicità di notazioni tutte uguali):

$$N \text{ scelto} \rightarrow h = L/N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = L, \quad x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, N-1)$$



Quindi in ogni punto (detto nodo) interno x_i approssimiamo $u''(x_i)$:

$$u''(x_i) \simeq \frac{u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)}{h^2} = \text{rapporto incrementale secondo}$$

6.1.2 Richiami: approssimazione di derivate

($h > 0$, u regolare quanto necessario)

1. Sviluppo in serie di Taylor a destra di x_i :

$$\begin{aligned} u(x_i + h) &= u(x_i) + h u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u''(x_i) + \frac{h^3}{3!} u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} u^{IV}(x_i) + \dots \\ \Rightarrow u'(x_i) &= \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - \frac{h}{2} u''(z_i^D) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - O(h) \\ &\text{con } x_i < z_i^D < x_i + h \end{aligned}$$

N.B. $O(h)$ significa che l'errore va a zero con lo stesso ordine di grandezza di h .

Il termine $\frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h}$ si chiama *rapporto incrementale destro* e può essere scelto per approssimare u' nel punto x_i :

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} \quad \text{errore} = -\frac{h}{2} u''(z_i^D)$$

2. Sviluppo in serie di Taylor a sinistra di x_i (l'incremento è $-h$):

$$u(x_i - h) = u(x_i) - h u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u''(x_i) - \frac{h^3}{3!} u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} u^{IV}(x_i) + \dots$$

$$\Rightarrow u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} + \frac{h}{2} u''(z_i^S) = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} + O(h)$$

con $x_i - h < z_i^S < x_i$

Il termine $\frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h}$ si chiama *rapporto incrementale sinistro*.

Anch'esso può essere scelto per approssimare u' nel punto x_i :

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} \quad \text{errore} = \frac{h}{2} u''(z_i^S)$$

Se adesso si calcolano la differenza e la somma di 1. e 2., si ha:

$$1. - 2. \rightarrow u(x_i + h) - u(x_i - h) = 2h u'(x_i) + 2 \frac{h^3}{3!} u'''(x_i) + O(h^5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} u'''(z_i^C) \quad x_i - h < z_i^C < x_i + h$$

Il termine $\frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h}$ si chiama *rapporto incrementale centrale* e fornisce un'altra approssimazione di u' nel punto x_i :

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} \quad \text{errore} = -\frac{h^2}{6} u'''(z_i^C)$$

Si nota come in questo caso l'errore, per $h \rightarrow 0$, vada a zero come h^2 , cioè più velocemente che nei due casi precedenti. Questa approssimazione è quindi più precisa (u' coincide col rapporto incrementale se $u''' = 0$, cioè se u è un polinomio di secondo grado, mentre nei casi precedenti u' coincide col rapporto incrementale se u è un polinomio di primo grado).

$$1. + 2. \rightarrow u(x_i + h) + u(x_i - h) = 2u(x_i) + h^2 u''(x_i) + \frac{h^4}{4!} 2u^{IV}(x_i) + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u''(x_i) = \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2} - \frac{h^2}{4!} 2u^{IV}(z_i^C)$$

$$x_i - h < z_i^C < x_i + h.$$

Il termine $\frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2}$ si chiama *rapporto incrementale secondo* e fornisce una approssimazione di u'' nel punto x_i :

$$u''(x_i) \simeq \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2} \quad \text{errore} = -\frac{h^2}{12} u^{IV}(z_i^C).$$

Osserviamo che u'' coincide col rapporto incrementale se $u^{IV} = 0$, ossia se u è un polinomio di terzo grado.

6.1.3 Metodo delle differenze finite

Tornando al problema e sostituendo u'' in ogni punto interno della suddivisione con il rapporto incrementale secondo, si ottiene:

$$\forall i = 1, \dots, N-1 \quad \begin{cases} -\frac{u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h))}{h^2} = f(x_i) - \frac{h^2}{12} u^{IV}(z_i^C) \\ u(x_0) = u(x_N) = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Per poter risolvere questo sistema dovremmo conoscere la u in ogni punto x_i , ma significherebbe conoscere la soluzione del problema. Indichiamo quindi con u_i valori approssimati di $u(x_i)$, che cerchiamo come soluzione del seguente sistema:

$$u(x_i) \simeq u_i \quad \Rightarrow \quad (P_h) \quad \begin{cases} \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) & i = 1, \dots, N-1 \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases}$$

Il sistema (P_h) si scrive in forma matriciale come

$$A_h \underline{U}_h = \underline{F}_h, \quad (6.2)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_h} \underbrace{\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}}_{\underline{U}_h} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{F}_h}$$

Come al solito, ci si deve assicurare innanzitutto che il problema (P_h) sia ben posto, cioè che abbia soluzione unica e valga la dipendenza continua dai dati.

- (P_h) ha soluzione unica? Sì perché A_h è simmetrica e definita positiva (in particolare $\det A_h > 0$)
- (P_h) è stabile? Sì, se vale la dipendenza continua dai dati, cioè:

$$\exists C > 0 : \|\underline{U}_h\| \leq C \|\underline{F}_h\| \quad \text{per qualche norma di vettore.}$$

Esplicitando la soluzione del sistema (6.2) si ottiene

$$\underline{U}_h = A_h^{-1} \underline{F}_h \rightarrow \|\underline{U}_h\| \leq \|A_h^{-1}\| \|\underline{F}_h\|.$$

Se la $\|A_h^{-1}\|$ è limitata indipendentemente da h si ha dipendenza continua dai dati, con $C = \|A_h^{-1}\|$.

Si può dimostrare che:

$$\|A_h^{-1}\|_\infty = \frac{1}{8} \quad (\|M\|_\infty = \max_i \sum_j |m_{ij}|)$$

quindi il problema (P_h) è stabile ($C = \frac{1}{8}$)

Il problema (P_h) ha dunque una sola soluzione e il problema è ben posto.



La domanda che ci poniamo ora è: la soluzione approssimata \underline{U}_h è “vicina” alla soluzione esatta?

- La soluzione esatta è una funzione, definita su tutto l’intervallo $[0, L]$, mentre \underline{U}_h è un vettore di numeri
- La soluzione esatta ha la derivata seconda uguale a f su tutto l’intervallo $[0, L]$, mentre \underline{U}_h verifica un’equazione alle differenze in alcuni punti di $[0, L]$
- Sembra naturale confrontare (con carta e penna) i numeri u_1, u_2, \dots, u_{N-1} con i valori $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_{N-1})$ della soluzione esatta nei punti x_1, x_2, \dots, x_{N-1} . Si deve cioè studiare l’errore commesso.

6.1.4 Studio dell’errore

Si deve studiare l’errore commesso sostituendo $u''(x_i)$ in ogni nodo x_i con il rapporto incrementale secondo:

$$\forall x_i \quad u''(x_i) \simeq \frac{u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)}{h^2}.$$

Come si vede da (6.1), nel fare questo abbiamo sostituito l’equazione $-u''(x_i) = f(x_i)$ con:

$$\frac{-u(x_i - h) + 2u(x_i) - u(x_i + h)}{h^2} = f(x_i) + \epsilon_i(h)$$

essendo $\epsilon_i(h) = -\frac{h^2}{12}u^{IV}(\xi_i)$, $x_i - h < \xi_i < x_i + h$

Posto:

$$\underline{U} = (u(x_1), \dots, u(x_N))^t, \quad \underline{\epsilon}_h = (\epsilon_1(h), \dots, \epsilon_N(h))^t$$

si vede che \underline{U} risolve il problema:

$$A_h \underline{U} = \underline{F}_h + \underline{\epsilon}_h. \quad (6.3)$$

ϵ_h è chiamato “*errore di consistenza*” e misura l’errore che si commette quando si applica uno schema numerico alla soluzione esatta.

Intuitivamente, deve essere “piccolo” o, più precisamente, deve tendere a zero quando il passo di discretizzazione $h \rightarrow 0$.

Vediamo se questo è sufficiente a garantire convergenza della soluzione approssimata alla soluzione esatta, cioè,

$$\|\underline{U}_h - \underline{U}\| \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0$$

(per qualche norma di vettore $\|\cdot\|$).

Richiami su norme di vettori e matrici

Un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ può essere misurato in varie norme. Ex:

$$\|\underline{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|\underline{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|, \quad \|\underline{v}\|_\infty = \max_i |v_i|$$

In dimensione finita (qui n) sono tutte equivalenti:

$$\|\underline{v}\|_\infty \leq \|\underline{v}\|_1 \leq n \|\underline{v}\|_\infty, \quad \|\underline{v}\|_\infty \leq \|\underline{v}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\underline{v}\|_\infty$$

Questo **non è vero in dimensione infinita** (le costanti di equivalenza dipendono dalla dimensione n)

Sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ con norma $\|\underline{v}\|_*$. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si chiama *norma naturale* di A la seguente:

$$\|A\|_* = \sup_{\underline{v} \neq 0} \frac{\|A\underline{v}\|_*}{\|\underline{v}\|_*}$$

Proprietà di $\|A\|_*$:

- $\|A\underline{v}\|_* \leq \|A\|_* \|\underline{v}\|_* \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$
- $\|AB\|_* \leq \|A\|_* \|B\|_*, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} \|\underline{v}\|_* = \|\underline{v}\|_2 &\longrightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \quad (\rho(M) = \max |\lambda(M)|) \\ \|\underline{v}\|_* = \|\underline{v}\|_\infty &\longrightarrow \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| \\ \|\underline{v}\|_* = \|\underline{v}\|_1 &\longrightarrow \|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| \end{aligned}$$

Fine richiami sulle norme

Nel nostro caso l'errore di consistenza in ogni nodo è $\epsilon_{hi} = -\frac{h^2}{12}u^{IV}(\xi_i)$.
Quindi:

$$\begin{aligned} \|\epsilon_h\|_\infty &\leq \frac{1}{12} \max_{x \in [0, L]} |u^{IV}(x)| h^2 = O(h^2) \\ \|\epsilon_h\|_2 &\leq \sqrt{N} \|\epsilon_h\|_\infty \leq \frac{1}{12} \max_{x \in [0, L]} |u^{IV}(x)| h^2 \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{h}} = O(h^{3/2}) \\ \|\epsilon_h\|_1 &\leq N \|\epsilon_h\|_\infty \leq \frac{1}{12} \max_{x \in [0, L]} |u^{IV}(x)| h^2 \frac{L}{h} = O(h) \end{aligned}$$

e dunque l'errore di consistenza tende a zero, al tendere a zero di h , in ognuna di queste norme, ma con velocità diversa.

Tornando al nostro errore: facendo la differenza fra il problema (6.3) e il problema (6.2) si ottiene:

$$\begin{aligned} A_h \underline{U} - A_h \underline{U}_h &= \epsilon_h \implies \underline{U} - \underline{U}_h = A_h^{-1} \epsilon_h \\ \implies \|\underline{U} - \underline{U}_h\| &= \|A_h^{-1} \epsilon_h\| \leq \|A_h^{-1}\| \|\epsilon_h\|. \end{aligned}$$

Ora, l'errore tenderà a zero se e solo se $\|A_h^{-1}\| \leq C$, con C costante indipendente da h . Nel nostro caso sappiamo che si ha stabilità nella norma $\|\cdot\|_\infty$ ($\|A_h^{-1}\|_\infty \leq 1/8$), quindi si avrà

$$\|\underline{U} - \underline{U}_h\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|\epsilon_h\|_\infty \leq \frac{1}{8} \frac{h^2}{12} \|u^{IV}\|_\infty = C h^2.$$

Riassumendo: la soluzione approssimata converge alla soluzione esatta nella norma del max, e l'ordine di convergenza è 2 (l'errore tende a zero come h^2).

Più in generale, la convergenza di uno schema numerico si dimostra usando il Teorema di Lax, che può essere concisamente enunciato così:

Teorema di Lax:

$$\text{Consistenza} + \text{Stabilità} \implies \text{Convergenza}$$

Più precisamente: Se il problema approssimato è **consistente e stabile**, allora la soluzione approssimata converge, quando $h \rightarrow 0$, alla soluzione esatta **nella norma in cui si ha la stabilità**, e l'ordine di convergenza è uguale all'ordine di consistenza, ossia all'ordine di convergenza di ϵ_h (a 0).

L'estensione del metodo delle differenze finite a problemi differenziali in 2 dimensioni diventa complicato se il dominio non è un rettangolo (o unione di rettangoli), e anche se ci sono condizioni ai limiti di Neumann. Molto più agevole è l'utilizzo del *Metodo degli elementi finiti*.

6.2 Metodo degli elementi finiti

Il Metodo degli Elementi Finiti (*FEM*) fa parte dei metodi cosiddetti di **Galerkin**, che sono metodi per approssimare la soluzione di problemi variazionali. In astratto, dato il problema

$$\begin{cases} \text{trovare } u \in V, \text{ soluzione di:} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (\text{PVar})$$

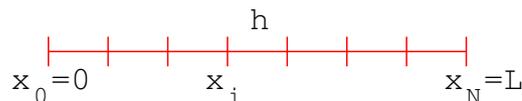
si approssima lo spazio V in cui si cerca la soluzione u con uno spazio di dimensione finita $M : V \simeq V_M$ e ci cerca una approssimazione di u nello spazio V_M . Diverse scelte di V_M danno luogo a diversi metodi di Galerkin. Nel Metodo degli Elementi Finiti lo spazio V_M è costituito da funzioni polinomiali a tratti. Vediamo di capire come si procede partendo sempre dal problema modello (P), la cui formulazione variazionale è:

$$\begin{cases} \text{trovare } u \in H_0^1(0, L), \text{ soluzione di:} \\ \int_0^L u' v' dx = \int_0^L f v \quad \forall v \in H_0^1(0, L) \end{cases} \quad (\text{PV})$$

Sappiamo che il Lemma di *Lax-Milgram* è verificato quindi si ha esistenza e unicità di u , e stabilità.

Per approssimare (PV) procediamo come fatto precedentemente per introdurre il metodo delle differenze finite:

$$N \text{ scelto} \rightarrow h = L/N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = L, \quad x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, N - 1)$$



L'intervallo viene quindi suddiviso in N sottointervalli I_1, I_2, \dots, I_N , ognuno di lunghezza h . Approssimiamo poi lo spazio $H_0^1(0, L)$ con uno spazio di dimensione finita V_h , costituito da funzioni continue e polinomiali su ogni I_i :

$$k \geq 1 \rightarrow V_h = \{v_h \in C^0[0, L] : v_h|_{I_i} \in P_k(I_i) \forall I_i, v_h(0) = v_h(L) = 0\}$$

Si verifica che V_h è un sottospazio di $H_0^1(0, L)$ (**Esercizio a casa**. Suggerimento: si deve dimostrare che una qualunque $v_h \in V_h$ sta in $L^2([0, L])$, e la sua derivata debole sta in $L^2([0, L])$).

Scriviamo (PV) in V_h , sottospazio di $H_0^1(0, L)$:

$$\begin{cases} \text{trovare } u_h \in V_h, \text{ soluzione di:} \\ \int_0^L u_h' v_h' dx = \int_0^L f v_h \quad \forall v_h \in V_h \subset H_0^1(0, L) \end{cases} \quad (\text{PV}_h)$$

Poiché V_h è un sottospazio di $H_0^1(0, L)$, il Lemma di *Lax-Milgram* è automaticamente verificato \Rightarrow esistenza, unicità e stabilità :

$$\|u_h'\|_0 \leq C_p \|f\|_0 \quad (\text{come per (PV)})$$

Inoltre, (PV_h) è consistente, e si ha errore di consistenza zero. Infatti, poiché $V_h \subset H_0^1(0, L)$, la soluzione u di (PV) verifica

$$\int_0^L u' v_h' dx = \int_0^L f v_h \quad \forall v_h \in V_h \subset H_0^1(0, L).$$

Conseguentemente si ha la proprietà (chiamata *ortogonalità di Galerkin*)

$$\int_0^L (u - u_h)' v_h' dx = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \quad (6.4)$$

Essendo quindi il metodo stabile e consistente, per il Teorema di Lax si ha convergenza (nella norma in cui si ha la stabilità, che in questo caso è $\|v'\|_0$):

$$\begin{aligned} \|(u - u_h)'\|_0^2 &= \int_0^L (u - u_h)' (u - u_h)' = \underbrace{\int_0^L (u - u_h)' (u - v_h)'}_{\text{per (6.4)}} \\ &\leq \underbrace{\|(u - u_h)'\|_0 \| (u - v_h)'\|_0}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \\ \Rightarrow \quad \|(u - u_h)'\|_0 &\leq \inf_{v_h \in V_h} \| (u - v_h)'\|_0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Esempio. Vediamo ora un esempio di utilizzo del metodo degli elementi finiti per il problema (PV_h) . Consideriamo il caso di Elementi finiti lineari:

$$k = 1 \rightarrow V_h = \{v_h \in C^0[0, L] : v_h|_{I_i} \in P_1(I_i) \forall I_i, v_h(0) = v_h(L) = 0\}$$

cioè, la generica funzione $v_h \in V_h$ è una funzione lineare a tratti e continua, e tale che $v_h(0) = v_h(L) = 0$.

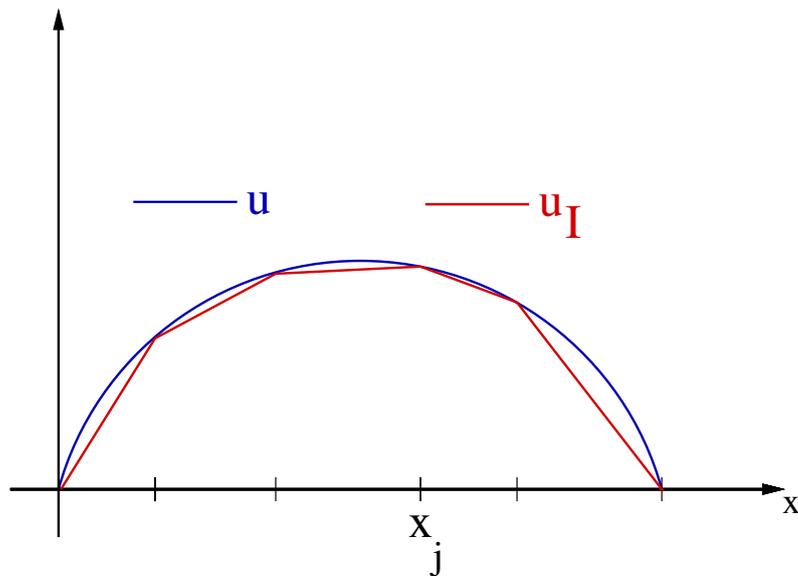
Il risultato qualitativo (6.5) permette di calcolare quantitativamente l'errore commesso in funzione del passo di discretizzazione h . Infatti: possiamo scegliere in (6.5) $v_h = u_I$, con $u_I =$ interpolata di u in V_h , definita da:

$$u_I \in V_h : \quad u_I(x_j) = u(x_j) \quad j = 0, N$$

per cui si ha

$$(6.5) \Rightarrow \|(u - u_h)'\|_0 \leq \|(u - u_I)'\|_0.$$

L'errore di approssimazione che vogliamo stimare è quindi maggiorato dall'errore di interpolazione, e questo può essere calcolato.



6.2.1 Errore di interpolazione

Theorem 6.2.1. Sia $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione “regolare” e sia w_I la sua interpolata lineare a tratti e continua rispetto a una suddivisione di $[a, b]$ in N intervalli di lunghezza h . Si ha il seguente risultato:

$$\begin{aligned} \|w - w_I\|_{L^2(a,b)} &\leq C h^2 \\ \|(w - w_I)'\|_{L^2(a,b)} &\leq C h \end{aligned}$$

con C costante positiva indipendente da h .

Dimostrazione. Innanzitutto mostriamo che

$$\|w - w_I\|_{L^2(a,b)} \leq C h \|(w - w_I)'\|_{L^2(a,b)}.$$

L'errore di interpolazione $e(x) := w(x) - w_I(x)$, per definizione di interpolata, è una funzione che si annulla in ogni nodo: $e(x_j) = 0$, $j = 0, \dots, N$. Su un generico intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, dal 1° teorema fondamentale del calcolo integrale si ha:

$$\begin{aligned} e(x) &= \int_{x_i}^x e'(s) ds \quad \text{da cui, elevando al quadrato} \\ e^2(x) &= \left(\int_{x_i}^x e'(s) ds \right)^2 \quad \text{poi integrando su } [x_i, x_{i+1}] \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^2(x) dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_i}^x e'(s) ds \right)^2 dx \quad \text{via Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|e'\|_{L^2(x_i,x)}^2 \|1\|_{L^2(x_i,x)}^2 dx \\ &\leq \|e'\|_{L^2(x_i,x_{i+1})}^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) dx = \frac{h^2}{2} \|e'\|_{L^2(x_i,x_{i+1})}^2 \end{aligned}$$

Sommando sugli intervalli si ha quindi

$$\|e\|_{L^2(a,b)}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^2(x) dx \leq \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \|e'\|_{L^2(x_i,x_{i+1})}^2 = \frac{h^2}{2} \|e'\|_{L^2(a,b)}^2,$$

da cui

$$\|w - w_I\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{h}{\sqrt{2}} \|(w - w_I)'\|_{L^2(a,b)}.$$

Per quanto riguarda l'errore $\|(w - w_I)'\|_{L^2(a,b)}$, sempre su un generico intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ si ha $e(x_i) = e(x_{i+1}) = 0$. Per il Teorema di Rolle esiste un punto $z \in]x_i, x_{i+1}[$ in cui $e'(z) = 0$. Usando il 1° Teorema fondamentale del calcolo integrale e il fatto che $w_I'' = 0$ in $[x_i, x_{i+1}]$, si ha

$$e'(x) = \int_z^x e''(s) ds = \int_z^x w''(s) ds \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Da questa relazione, procedendo come prima, quadrando, integrando su $[x_i, x_{i+1}]$ e usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (e'(x))^2 dx \leq h^2 \|w''\|_{L^2(x_i,x_{i+1})}^2$$

e sommando sugli intervalli

$$\|(w - w_I)'\|_{L^2(a,b)} \leq h \|w''\|_{L^2(a,b)}$$

□

Usando questo risultato nella (6.5) si ha una stima qualitativa dell'errore di approssimazione:

$$\|(u - u_h)'\|_0 \leq C h \|u''\|_0.$$

Dopo aver visto che il problema approssimato (PV_h) ha una soluzione unica, e dopo avere stimato l'errore commesso con l'approssimazione usata, vediamo come si risolve il problema (PV_h). Come si arriva a un sistema lineare risolubile su computer?

Innanzitutto osserviamo che V_h è uno spazio di dimensione finita, e precisamente

$\dim V_h =$ numero di punti interni della suddivisione ($= N - 1$). Infatti,

una funzione di V_h è univocamente individuata dai suoi valori nei punti interni (nodi) della suddivisione.

Quindi V_h ammette una base, ossia un insieme di $N - 1$ funzioni linearmente indipendenti tali che

$$V_h = \text{span}\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{N-1}(x)\}$$

Una base conveniente per i conti da effettuare è la seguente:

$$\forall j, \varphi_j(x) \in V_h : \varphi_j|_{I_s} \in P_1(I_s) \forall s, \quad \varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Esercizio. Verificare l'indipendenza lineare.

Ogni funzione $v_h \in V_h$ si scrive quindi come combinazione lineare delle $\varphi_j(x)$. In particolare:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N-1} u_j \varphi_j(x) \quad (u_j = u_h(x_j))$$

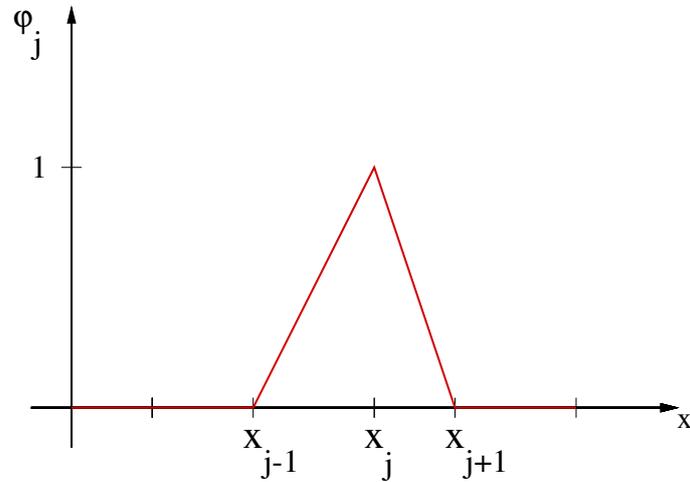


Figura 6.1: generica funzione di base

Sostituendo in (\mathbf{PV}_h) si ottiene:

$$\sum_{j=1}^{N-1} u_j \int_0^L \varphi_j'(x) v_h'(x) dx = \int_0^L f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_h$$

e poiché l'equazione è verificata se e solo se è verificata sulla base, il problema approssimato finale è:

$$\begin{cases} \text{trovare } u_1, u_2, \dots, u_{N-1} \text{ soluzione di} \\ \sum_{j=1}^{N-1} u_j \int_0^L \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_0^L f(x) \varphi_i(x) dx \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

che in forma matriciale si scrive

$$A_h \underline{U}_h = \underline{F}_h$$

con

$$A_h = \{a_{ij}\} = \int_0^L \varphi_j' \varphi_i' \quad \underline{F}_h = \{b_i\} = \int_0^L f \varphi_i$$

Si vede che $\int_0^L \varphi'_j \varphi'_i \neq 0$ solo se $|i - j| < 2$, per cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^L \varphi'_{i-1} \varphi'_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{i-1} \varphi'_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(-\frac{1}{h}\right) \left(\frac{1}{h}\right) = -\frac{1}{h} \\ \int_0^L \varphi'_{i+1} \varphi'_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_{i+1} \varphi'_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h}\right) \left(-\frac{1}{h}\right) = -\frac{1}{h} \\ \int_0^L \varphi'_i \varphi'_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i \varphi'_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_i \varphi'_i \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h}\right) \left(\frac{1}{h}\right) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) \left(-\frac{1}{h}\right) = \frac{2}{h} \end{aligned}$$

$$A_h = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{F}_h = \begin{bmatrix} \int_0^L f \varphi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \int_0^L f \varphi_{N-1} \end{bmatrix}$$

La matrice è analoga a quella ottenuta tramite le differenze finite. Il termine noto invece è diverso tranne nel caso $f = \text{costante}$, nel qual caso i 2 schemi coincidono.

Nota sull'errore di consistenza. L'errore di consistenza è nullo se $\int f \varphi_i$ è calcolato esattamente, altrimenti va studiato l'errore che si commette approssimando l'integrale.

6.2.2 Il metodo degli elementi finiti in 2D

Consideriamo un generico problema variazionale in forma astratta (**PVar**):

$$\text{trovare } u \in V \text{ tale che } a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V, \quad (6.6)$$

che verifica il Lemma di Lax–Milgram (quindi, esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati). Come già visto nel caso monodimensionale, con il metodo degli elementi finiti lo spazio V viene approssimato con uno spazio di dimensione finita, costituito da funzioni continue e polinomiali a tratti. Per semplicità assumiamo che il dominio computazione Ω sia un poligono convesso. Sia \mathcal{T}_h una decomposizione di Ω in triangoli (ved. figura):

$$\mathcal{T}_h = \text{triangolazione o mesh di } \Omega : \Omega = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$$

$$h = \max_T \text{diam}(T) \quad \text{diam}(T) = \text{lato piú lungo}$$

(h rappresenta la “finezza” della mesh). Introduciamo lo spazio di elementi finiti

$$V_h^k = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in \mathbb{P}_k(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\} \quad k \geq 1$$

dove $\mathbb{P}_k(T)$ è lo spazio di polinomi di grado $\leq k$ su T .

Nota. Poiché in tutti i problemi di cui ci occupiamo lo spazio V è sempre del tipo $H^1(\Omega)$, si verifica facilmente che

$$V_h^k \subset V \simeq H^1 \Leftrightarrow V_h^k \subset C^0.$$

Osserviamo inoltre che, se nello spazio V sono presenti condizioni di Dirichlet, anche nello spazio approssimato V_h^k queste dovranno essere incluse, come vedremo su alcuni esempi.

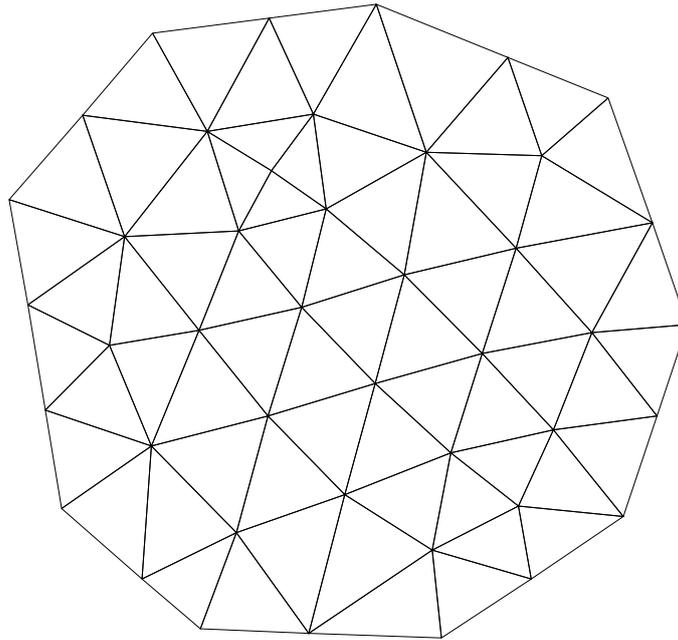


Figura 6.2: Esempio di triangolazione.

Il problema approssimato di (6.6) è quindi:

$$\text{trovare } u_h \in V_h^k \text{ tale che } a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^k. \quad (6.7)$$

Lemma 6.2.2. *Il problema (6.7) ha un'unica soluzione e si ha dipendenza continua dai dati.*

Dimostrazione. Poiché per il problema (6.6) tutte le ipotesi del Lemma di Lax–Milgram sono verificate, l’inclusione $V_h^k \subset V$ garantisce che tutte le ipotesi sono verificate anche per il problema (6.7). Quindi si ha esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati esattamente come per (6.6). In particolare, se α è la costante di ellitticità di $a(\cdot, \cdot)$, e C_ℓ la costante di continuità di $\ell(\cdot)$ si ha

$$\|u_h\|_V \leq \frac{C_\ell}{\alpha}.$$

□

Nota. Confrontando il problema continuo (6.6) e il problema approssimato (6.7) si vede che non sono state introdotte approssimazioni né della forma bilineare né del funzionale. Inoltre, sempre grazie all’inclusione $V_h^k \subset V$, la soluzione u di (6.6) verifica anche

$$a(u, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^k \subset V,$$

cioè, l’errore di consistenza è pari a zero. Ne consegue, facendo la differenza con (6.7), che

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h^k \subset V. \quad (6.8)$$

La relazione (6.8) (già vista nel caso particolare del problema monodimensionale trattato precedentemente) si chiama **ortogonalità di Galerkin**. Grazie a (6.8) si ottiene la seguente *stima qualitativa* per l’errore.

Lemma 6.2.3. (Lemma di Céa) *Sia u la soluzione di (6.6), e sia u_h la soluzione del problema approssimato (6.7). Si ha il seguente risultato:*

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h^k} \|u - v_h\|_V, \quad (6.9)$$

con C =costante indipendente da h .

Dimostrazione. Usando l’ellitticità, l’ortogonalità di Galerkin (6.8) (due volte), e la continuità di $a(\cdot, \cdot)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u) = a(u - u_h, u - v_h) \\ &\leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h^k, \end{aligned}$$

da cui il risultato, con $C = M/\alpha$. □

Corollary 6.2.4. *Conseguenza del risultato (6.9) del Lemma di Céa: l’errore, nella norma di V , può essere stimato tramite l’errore di interpolazione (sempre nella norma di V). Infatti, da (6.9) segue che*

$$\|u - u_h\|_V \leq C \|u - u_I\|_V.$$

Si può dimostrare (ma qui ometteremo la dimostrazione) la seguente stima per l'errore di interpolazione:

$$\|u - u_I\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1}, \quad \|\underline{\nabla}u - \underline{\nabla}u_I\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^k$$

con C costante positiva indipendente da h . Per l'errore di approssimazione si ottiene quindi

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch^k$$

In particolare, per elementi finiti lineari a tratti si avrà, come nel caso monodimensionale,

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch,$$

vale a dire, la soluzione approssimata u_h converge alla soluzione esatta u , per $h \rightarrow 0$, nella norma dello spazio V , e la velocità di convergenza è pari a 1.

6.2.3 Elementi finiti lineari

Per chiarire quanto esposto, scegliamo di approssimare la soluzione di (6.6) con elementi finiti lineari a tratti. Fissiamo quindi

$$V_h^1 = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad (6.10)$$

e il problema (6.7) diventa

$$\text{trovare } u_h \in V_h^1 \text{ tale che } a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^1. \quad (6.11)$$

Proposition 6.2.5. *Una generica funzione $v_h \in V_h^1$ è univocamente individuata dai suoi valori nei vertici dei triangoli della mesh.*

Dimostrazione. Si procede triangolo per triangolo. La restrizione di v_h a un generico triangolo è un polinomio di grado 1, che è univocamente individuato dai valori nei tre vertici del triangolo. Dati quindi i valori nei vertici di \mathcal{T}_h si individua una funzione v_h lineare in ogni triangolo. Resta da dimostrare che tale funzione è continua. A tale scopo, siano T_1 e T_2 due triangoli con un lato e in comune, e siano v_h^1 e v_h^2 i polinomi di grado 1 individuati, su T_1 e T_2 , dai valori nei tre vertici. Sul lato e la differenza $v_h^1 - v_h^2$ è un polinomio di grado 1 nullo agli estremi del lato. Quindi $v_h^1 - v_h^2 \equiv 0$ su e , e la continuità è dimostrata. \square

Posto quindi $N =$ numero di vertici di \mathcal{T}_h , si ha

$$\dim V_h^1 = \text{numero di vertici di } \mathcal{T}_h = N.$$

Essendo V_h^1 uno spazio di dimensione finita, ammette una base, ossia un sistema di N funzioni linearmente indipendenti $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ tali che

$$V_h^1 = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}.$$

Una scelta comoda per i conti da effettuare è la seguente (vedasi Fig. 6.3)

$$\varphi_i(x, y)|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T, \quad \text{e} \quad \varphi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Ogni funzione di V_h^1 può essere espressa come combinazione lineare delle

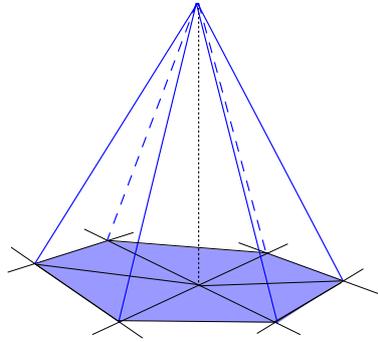


Figura 6.3: Esempio di funzione di base

funzioni di base. In particolare, la soluzione approssimata si scrive come:

$$u_h(x, y) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x, y)$$

con i coefficienti u_j (incogniti), e per definizione:

$$u_j = u_h(x_j, y_j) \quad j = 1, \dots, N.$$

Sostituendo l'espressione di u_h nel problema (6.11) si ottiene

$$\begin{cases} \text{Trovare } u_1, u_2, \dots, u_N \text{ tali che :} \\ \sum_{j=1}^N u_j a(\varphi_j, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^1. \end{cases} \quad (6.12)$$

L'equazione in (6.12) deve valere per tutte le funzioni di V_h^1 , e questo avviene se e solo se l'equazione è verificata per ogni funzione di base. Quindi si ottiene

il sistema lineare finale di N equazioni in N incognite

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trovare } u_1, u_2, \dots, u_N \text{ tali che :} \\ \sum_{j=1}^N u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = \ell(\varphi_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \end{array} \right. \quad (6.13)$$

Il sistema (6.13) si può scrivere in forma matriciale come

$$\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{B}}$$

con

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}} &= \{A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)\}, i, j = 1, \dots, N, \\ \underline{\mathbf{B}} &= \{b_i = \ell(\varphi_i)\}, \underline{\mathbf{U}} = \{u_i\}, i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Il calcolo della matrice e del termine noto viene fatto procedendo per elementi. Infatti, poiché sia i coefficienti della matrice sia il termine noto sono degli integrali sul dominio $\Omega = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$, grazie alla ben nota proprietà degli integrali (l'integrale della somma è uguale alla somma degli integrali) si può scrivere

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} a_T(\varphi_j, \varphi_i), \quad b_i = \ell(\varphi_i) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \ell_T(\varphi_i),$$

in cui $a_T(\varphi_j, \varphi_i)$ e $\ell_T(\varphi_i)$ sono le restrizioni di a e ℓ al triangolo generico e sono dette matrici elementari. Matrice e termine noto globali possono essere costruiti calcolando prima le matrici elementari ($\forall T \in \mathcal{T}_h$) e sommando poi i contributi di ogni T . Questo modo di procedere per elementi, tipico degli elementi finiti, si chiama *assemblaggio* e sarà chiarito in dettaglio nel prossimo esempio.

Applicazione a un problema modello

Consideriamo il problema di Dirichlet omogeneo per l'operatore di Laplace ((ES1) del capitolo precedente):

$$(ES1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega \end{array} \right.$$

la cui formulazione variazionale è:

$$(PV1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trovare } u \in H_0^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

Essendo le condizioni al bordo di Dirichlet *forzate*, esse vanno imposte nello spazio di elementi finiti (6.10), che quindi diventa:

$$V_h^1 = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ su } \partial\Omega\},$$

e il problema approssimato sarà

$$\begin{cases} \text{trovare } u_h \in V_h^1 \text{ soluzione di:} \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u_h \cdot \underline{\nabla} v_h = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in V_h^1 \end{cases} \quad (\text{PV1}_h)$$

Poiché le funzioni di V_h^1 sono note sul bordo di Ω , la dimensione di V_h^1 è pari al numero dei **solli** vertici interni di \mathcal{T}_h :

$$\dim V_h^1 = \text{numero di vertici interni della mesh} =: NP$$

e si avrà

$$V_h^1 = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{NP}\},$$

con le funzioni di base definite esattamente come prima. Procedendo allo stesso modo, si perviene al seguente sistema lineare di NP equazioni in NP incognite

$$\begin{cases} \text{Trovare } u_1, u_2, \dots, u_{NP} \text{ tali che :} \\ \sum_{j=1}^{NP} u_j \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\nabla} \varphi_j \cdot \underline{\nabla} \varphi_i}_{A_{ij}} dx dy = \underbrace{\int_{\Omega} f \varphi_i}_{b_i} dx dy \quad \forall i = 1, 2, \dots, NP. \end{cases}$$

La matrice \mathbf{A} si chiama *matrice di stiffness* e ha molti coefficienti nulli. Precisamente, se P_i e P_j non sono vertici dello stesso triangolo, allora $A_{ij} = 0$. Vediamo come costruirla a partire dalle matrici di stiffness elementari, grazie al fatto che

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \underline{\nabla} \varphi_j \cdot \underline{\nabla} \varphi_i = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \underline{\nabla} \varphi_j \cdot \underline{\nabla} \varphi_i.$$

6.2.4 Calcolo matrici di stiffness elementari

Siano V_i, V_j, V_k i vertici del (generico) triangolo T . Su T la matrice di stiffness elementare che dobbiamo calcolare è data da:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \int_T \underline{\nabla} \varphi_i \cdot \underline{\nabla} \varphi_i & \int_T \underline{\nabla} \varphi_i \cdot \underline{\nabla} \varphi_j & \int_T \underline{\nabla} \varphi_i \cdot \underline{\nabla} \varphi_k \\ & \int_T \underline{\nabla} \varphi_j \cdot \underline{\nabla} \varphi_j & \int_T \underline{\nabla} \varphi_j \cdot \underline{\nabla} \varphi_k \\ \text{symm.} & & \int_T \underline{\nabla} \varphi_k \cdot \underline{\nabla} \varphi_k \end{pmatrix}$$

Gli indici i, j, k sono i numeri globali in \mathcal{T}_h dei tre vertici di T ; per semplicità li chiamiamo 1, 2, 3 rispettivamente, e indichiamo con ℓ_r il lato opposto al vertice $V_r = (x_r, y_r)$, ($r = 1, 2, 3$) come nella Fig. 6.4.

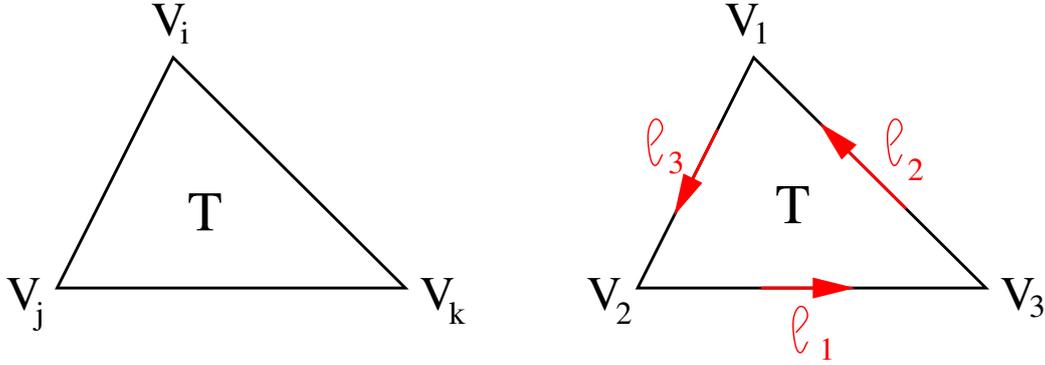


Figura 6.4: Numerazione locale sul generico triangolo

Per comodità di scrittura poniamo anche $\psi_1 = \varphi_{i|T}$, $\psi_2 = \varphi_{j|T}$, $\psi_3 = \varphi_{k|T}$, per cui si ha $\psi_r(x_s, y_s) = \delta_{r,s}$ (simbolo di Kronecker) per $r, s = 1, 2, 3$. Quindi calcoliamo

$$A_{rs} = \int_T \underline{\nabla} \psi_s \cdot \underline{\nabla} \psi_r \quad r, s = 1, 2, 3$$

dove

$$\begin{aligned} \psi_1 \in \mathbb{P}_1(T) : & \quad \psi_1(x_1, y_1) = 1 \quad \psi_1(x_2, y_2) = \psi_1(x_3, y_3) = 0 \\ \psi_2 \in \mathbb{P}_1(T) : & \quad \psi_2(x_2, y_2) = 1 \quad \psi_2(x_1, y_1) = \psi_2(x_3, y_3) = 0 \\ \psi_3 \in \mathbb{P}_1(T) : & \quad \psi_3(x_3, y_3) = 1 \quad \psi_3(x_1, y_1) = \psi_3(x_2, y_2) = 0 \end{aligned}$$

Per ogni ψ_r dobbiamo calcolare il gradiente, che possiamo fare tramite considerazioni geometriche. Consideriamo ad esempio la funzione ψ_1 : essa è un polinomio di grado 1 (un piano) identicamente nullo sul lato ℓ_1 e avente valore 1 nel vertice V_1 . Si tratta quindi di una funzione lineare che passa dal valore 0 al valore 1 su un intervallo di lunghezza $H_1 =$ altezza relativa al lato ℓ_1 . Il suo gradiente sarà un vettore costante, di lunghezza $1/H_1$, diretto come la normale al lato ℓ_1 e orientato verso V_1 . Quindi, indicando con \underline{n}^1 il versore normale uscente al lato ℓ_1 , si avrà $\underline{\nabla} \psi_1 = -\frac{\underline{n}^1}{|H_1|}$. Moltiplicando numeratore e denominatore per la lunghezza $|\ell_1|$ di ℓ_1 otteniamo $\underline{\nabla} \psi_1 = -\frac{\underline{n}^1 |\ell_1|}{2|T|}$. Le

stesse considerazioni valgono per le altre due funzioni, sicché si ottiene:

$$\begin{aligned}\underline{\nabla}\psi_1 &= -\frac{\underline{n}^1}{|H_1|} = -\frac{\underline{n}^1|\ell_1|}{2|T|} \\ \underline{\nabla}\psi_2 &= -\frac{\underline{n}^2}{|H_2|} = -\frac{\underline{n}^2|\ell_2|}{2|T|} \\ \underline{\nabla}\psi_3 &= -\frac{\underline{n}^3}{|H_3|} = -\frac{\underline{n}^3|\ell_3|}{2|T|} \\ \Rightarrow \int_T \underline{\nabla}\psi_r \underline{\nabla}\psi_s \, dxdy &= \int_T |\ell_r||\ell_s| \frac{\underline{n}^r \cdot \underline{n}^s}{4|T|^2} \, dxdy\end{aligned}$$

Guardando la Fig. 6.4, e avendo posto

$$V_1 = (x_1, y_1), \quad V_2 = (x_2, y_2), \quad V_3 = (x_3, y_3),$$

si vede che i lati e i versori delle normali uscenti sono dati da:

$$\begin{aligned}\underline{\ell}_1 &= (x_3 - x_2, y_3 - y_2), & \underline{n}^1 &= \frac{(y_3 - y_2, -(x_3 - x_2))}{|\ell_1|}, \\ \underline{\ell}_2 &= (x_1 - x_3, y_1 - y_3), & \underline{n}^2 &= \frac{(y_1 - y_3, -(x_1 - x_3))}{|\ell_2|}, \\ \underline{\ell}_3 &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1), & \underline{n}^3 &= \frac{(y_2 - y_1, -(x_2 - x_1))}{|\ell_3|}.\end{aligned}$$

Conseguentemente,

$$|\ell_r||\ell_s|\underline{n}^r \cdot \underline{n}^s = (\underline{\ell}_r, \underline{\ell}_s) \quad r, s = 1, 2, 3$$

ottenendo

$$\int_T \underline{\nabla}\psi_r \underline{\nabla}\psi_s \, dxdy = \frac{(\underline{\ell}_r, \underline{\ell}_s)}{4|T|}.$$

Quindi, per il problema che stiamo approssimando, l'espressione finale della **matrice di stiffness elementare** su un generico triangolo T è:

$$\mathbf{A}^T = \frac{1}{4|T|} \begin{pmatrix} (\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_1) & (\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_2) & (\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_3) \\ & (\underline{\ell}_2, \underline{\ell}_2) & (\underline{\ell}_2, \underline{\ell}_3) \\ \text{symm.} & & (\underline{\ell}_3, \underline{\ell}_3) \end{pmatrix}$$

Per calcolare \mathbf{A}^T tutto ciò di cui abbiamo bisogno sono le coordinate dei tre vertici (che sono fornite dal codice che produce la mesh). Infatti:

$$\begin{aligned}(\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_1) &= (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \\(\underline{\ell}_2, \underline{\ell}_2) &= (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 \\(\underline{\ell}_3, \underline{\ell}_3) &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\(\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_2) &= (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_3 - y_2)(y_1 - y_3), \\(\underline{\ell}_1, \underline{\ell}_3) &= (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_2)(y_2 - y_1), \\(\underline{\ell}_2, \underline{\ell}_3) &= (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_1 - y_3)(y_2 - y_1).\end{aligned}$$

L'area di T è data da

$$|T| = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}{2},$$

e la matrice può essere calcolata.

6.2.5 Costruzione del termine noto

Come per la matrice, anche il termine noto può essere calcolato elemento per elemento e poi assemblato:

$$b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i dx dy = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f \varphi_i dx dy \quad i = 1, 2, \dots, NP.$$

In generale questi integrali non possono essere calcolati esattamente e sono pertanto approssimati. Di seguito le formule di quadratura (integrazione numerica) su triangoli più usate.

$$\mathbf{1a):} \int_T g(x, y) dx dy \simeq \frac{|T|}{3} \sum_{i=1}^3 g(x_i, y_i) \quad (\text{formula dei vertici})$$

Questa formula è esatta se $g \in \mathbb{P}_1(T)$.

$$\mathbf{1b):} \int_T g(x, y) dx dy \simeq |T| g(x_B, y_B) \quad B = \text{baricentro di } T$$

Questa formula è esatta se $g \in \mathbb{P}_1(T)$.

$$\mathbf{2):} \int_T g(x, y) dx dy \simeq \frac{|T|}{3} \sum_{r=1}^3 g(x_r^M, y_r^M) \quad (6.14)$$

dove (x_r^M, y_r^M) indica il punto medio del lato r .

Questa formula è esatta se $g \in \mathbb{P}_2(T)$.

Usando ad esempio **1a)** o **1b)** si ha:

$$\mathbf{1a)} \longrightarrow \int_T f \psi_i dx dy \simeq \frac{|T|}{3} f(x_i, y_i) \quad i = 1, 3,$$

$$\mathbf{1b)} \longrightarrow \int_T f \psi_i dx dy \simeq \frac{|T|}{3} f(x_B, y_B) \quad i = 1, 3.$$

In entrambi i casi il risultato sarà esatto solo se $f|_T = \text{costante}$. Il termine noto elementare \underline{b}^T sarà:

$$\mathbf{1a)} \longrightarrow \underline{b}^T = \frac{|T|}{3} \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ f(x_3, y_3) \end{pmatrix} \quad \mathbf{1b)} \longrightarrow \underline{b}^T = \frac{|T|}{3} \begin{pmatrix} f(x_B, y_B) \\ f(x_B, y_B) \\ f(x_B, y_B) \end{pmatrix}$$

Si osserva che le coordinate del baricentro e dei punti medi dei lati si calcolano immediatamente disponendo delle coordinate dei tre vertici. Sempre riferendoci alla Fig. 6.4:

$$x_B = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i \quad y_B = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$$

$$(x_1^M, y_1^M) = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right),$$

$$(x_2^M, y_2^M) = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2} \right),$$

$$(x_3^M, y_3^M) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

6.2.6 Esempio di programmazione

Assemblaggio delle matrici

Vediamo un esempio di come programmare la costruzione della matrice e del termine noto finali.

I software che generano le mesh forniscono tutte le informazioni necessarie. In particolare, forniscono (non necessariamente con gli stessi nomi usati qui):

- NE: Numero di triangoli (=Elementi) della mesh
- NV: Numero di Vertici (inclusi i vertici sul bordo)
- x(i),y(i): coordinate dei vertici, i=1,NV

- $\text{NOD}(\text{IE},k)$: matrice di dimensione $\text{NE} \times 3$ che, per ogni elemento IE , dà la corrispondenza fra numerazione locale e globale dei vertici:

$\text{NOD}(\text{IE},1)=i \implies$ il primo vertice di IE ha numero globale i

$\text{NOD}(\text{IE},2)=j \implies$ il secondo vertice di IE ha numero globale j

$\text{NOD}(\text{IE},3)=k \implies$ il terzo vertice di IE ha numero globale k

In generale, il primo vertice è uno qualunque dei tre, e gli altri due sono numerati in senso antiorario (come in Fig. 6.4)

- Una flag che indica se un vertice o un lato è sul bordo.

Con queste informazioni possiamo iniziare a scrivere il codice.

- $\text{A}=\text{zeros}(\text{NV}); \text{b}=\text{zeros}(\text{NV},1)$
- for $\text{IE}=1:\text{NE}$ (ciclo sugli elementi)
 - for $k=1:3$ (ciclo sui tre vertici di IE)
 - $i=\text{NOD}(\text{IE},k)$ (numero globale del vertice k)
 - $\text{xv}(k)=\text{x}(i); \text{yv}(k)=\text{y}(i)$ (coordinate del vertice k)
 - end
 - calcolo delle matrici locali AE e bE (in una function separata)
 - Assemblaggio delle matrici locali in quelle globali:
 - for $k=1:3$
 - $i=\text{NOD}(\text{IE},k)$
 - $\text{b}(i)=\text{b}(i)+\text{bE}(k)$
 - for $kk=1:3$
 - $j=\text{NOD}(\text{IE},kk)$
 - $\text{A}(i,j)=\text{A}(i,j)+\text{AE}(k,kk)$
 - end
 - end
- end (fine del ciclo sugli elementi)

Condizioni al bordo di Dirichlet

A questo punto restano da assegnare le condizioni di Dirichlet al bordo ($u_h = 0$ nel caso che stiamo trattando). Questo può essere fatto in vari modi. Un modo semplice è il seguente: per ogni vertice sul bordo si modifica la corrispondente riga della matrice ponendo a 0 tutti i coefficienti della riga, tranne il coefficiente diagonale, che si pone uguale a 1. Contemporaneamente il termine noto corrispondente viene posto uguale a 0. Le istruzioni sono le seguenti: se i è un vertice di bordo:

- for j=1:NV
 $A(i,j)=0$
end
 $A(i,i)=1; b(i)=0$

Lo svantaggio di questo modo di procedere è che la matrice non è più simmetrica, e questo impedisce l'uso di metodi efficienti per risolvere sistemi di equazioni lineari. A questo si può rimediare applicando lo stesso procedimento sulla colonna *i-esima* (cioè, azzerando tutta la colonna *i* tranne il coefficiente $A(i,i)$ che resta uguale a 1).

Nota. Nel caso si abbiano condizioni di Dirichlet non omogenee:

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ su } \partial\Omega$$

niente cambia nella costruzione delle matrici, mentre sul bordo dovremo assegnare g e non 0. Se i è un vertice di bordo:

- for j=1:NV
 $A(i,j)=0$
end
 $A(i,i)=1, b(i)=g(x(i),y(i))$

Questa è l'unica modifica se non ci importa avere ora una matrice non simmetrica. Se invece vogliamo ripristinare la simmetria dobbiamo procedere così:

- for k=1:NV
 $b(k)=b(k)-A(k,i)*(g(x(i),y(i)))$
 $A(k,i)=0$
 $A(i,k)=0$
end
 $A(i,i)=1$
 $b(i)=g(x(i),y(i))$

Applicazione a un altro problema modello

Consideriamo ora il problema di Neumann omogeneo per l'operatore $-\Delta + I$ ((ES2) del capitolo precedente):

$$(ES2) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

la cui formulazione variazionale è:

$$(PV2) \quad \begin{cases} \text{trovare } u \in H^1(\Omega), \text{ soluzione di:} \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

Essendo le condizioni al bordo di Neumann *naturali*, esse non vanno imposte nello spazio di elementi finiti, che quindi coincide con (6.10):

$$V_h^1 = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

e il problema approssimato sarà

$$\begin{cases} \text{trovare } u_h \in V_h^1 \text{ soluzione di:} \\ \int_{\Omega} \underline{\nabla} u_h \cdot \underline{\nabla} v_h + \int_{\Omega} u_h v_h = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in V_h^1 \end{cases} \quad (PV2_h)$$

In questo caso le funzioni di V_h^1 non sono note sul bordo di Ω , e sono dunque incognite del problema. Pertanto la dimensione di V_h^1 è pari al numero totale dei vertici di \mathcal{T}_h :

$$\dim V_h^1 = \text{numero totale dei vertici della mesh} =: NTOT$$

e si avrà

$$V_h^1 = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{NTOT}\},$$

con le funzioni di base definite esattamente come prima. Procedendo allo stesso modo, si perviene al seguente sistema lineare di $NTOT$ equazioni in $NTOT$ incognite

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trovare } u_1, u_2, \dots, u_{NTOT} \text{ tali che :} \\ \sum_{j=1}^{NTOT} u_j \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\nabla} \varphi_j \cdot \underline{\nabla} \varphi_i \, dx dy}_{A_{ij}} + \sum_{j=1}^{NTOT} u_j \underbrace{\int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i \, dx dy}_{M_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega} f \varphi_i \, dx dy}_{b_i} \\ \forall i = 1, 2, \dots, NTOT. \end{array} \right.$$

La matrice di stiffness \mathbf{A} e il termine noto \mathbf{b} sono gli stessi del caso precedente, mentre la nuova matrice \mathbf{M} si chiama matrice *di massa*. Anch'essa, come \mathbf{A} , ha molti coefficienti nulli: se P_i e P_j non sono vertici dello stesso triangolo, allora $M_{ij} = 0$.

Costruzione della matrice di massa

Anche per la matrice di massa si procede elemento per elemento, essendo

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i \, dx dy = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \varphi_j \varphi_i \, dx dy$$

Con le notazioni della Fig. 6.4, sul generico triangolo si deve calcolare

$$\mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} \int_T \psi_1 \psi_1 & \int_T \psi_1 \psi_2 & \int_T \psi_1 \psi_3 \\ & \int_T \psi_2 \psi_2 & \int_T \psi_2 \psi_3 \\ \text{symm} & & \int_T \psi_3 \psi_3 \end{pmatrix}$$

I coefficienti di \mathbf{M}^T possono essere calcolati esattamente tramite la formula di quadratura (6.14), esatta per polinomi di grado fino a 2, e si ottiene:

$$\text{per } r, s = 1, 3 \quad \int_T \psi_r \psi_s = \begin{cases} \frac{|T|}{3} \frac{1}{4} & \text{per } r \neq s \\ \frac{|T|}{3} \frac{1}{2} & \text{per } r = s \end{cases}$$

Quindi:

$$\mathbf{M}^T = |T| \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \text{symm.} & & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Capitolo 7

Problemi parabolici

7.1 Equazione del calore in una dimensione

L'esempio più semplice di equazione differenziale di tipo parabolico è costituito dall'equazione del calore, che in una dimensione spaziale è data da

$$u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = 0 \quad x \in [0, L] \quad 0 \leq t \leq T$$

La funzione $u(x, t)$ rappresenta la temperatura all'istante t nel punto x di una barra di lunghezza L , e k è il coefficiente di conduzione termica, che assumiamo costante, ovviamente positiva.

All'equazione differenziale vanno aggiunte due condizioni agli estremi dell'intervallo e una condizione iniziale. Per semplicità prendiamo condizioni al bordo di Dirichlet omogenee, per cui il problema diventa

$$\begin{cases} u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = 0 & x \in [0, L] & 0 \leq t \leq T \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \forall t \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [0, L] \end{cases} \quad (7.1)$$

(Naturalmente, per ragioni di continuità della soluzione bisognerà assumere compatibilità sui dati, ossia $u_0(0) = u_0(L) = 0$).

Per dimostrare l'esistenza di una soluzione di (7.1) procediamo per separazione di variabili. Cerchiamo cioè la soluzione nella forma

$$u(x, t) = w(x)v(t)$$

con $w(x) \not\equiv 0, v(t) \not\equiv 0$. Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$w(x)v'(t) - kw''(x)v(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v'(t)}{kv(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)}$$

Una funzione della sola variabile t coincide con una funzione della sola variabile x se e solo se entrambe le funzioni sono costanti. Quindi:

$$\frac{v'(t)}{kv(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = \lambda \quad (\text{costante})$$

La funzione $w(x)$ risolve allora, usando le condizioni ai limiti, il problema

$$\begin{cases} w''(x) - \lambda w(x) = 0 & x \in [0, L] \\ w(0) = w(L) = 0 \end{cases}$$

Esaminiamo i vari casi: λ positivo, nullo, o negativo, tenendo presente che si cerca $w(x) \neq 0$.

- Caso $\lambda = 0$: l'equazione diventa $w''(x) = 0 \rightarrow w(x) = C_1 + C_2x$. Le condizioni $w(0) = w(L) = 0$ implicano $C_1 = C_2 = 0 \rightarrow w \equiv 0$ (escluso)
- Caso $\lambda > 0$: la soluzione dell'equazione differenziale è data da $w(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ e le condizioni $w(0) = w(L) = 0$ implicano anche in questo caso che $w \equiv 0$ (escluso)
- Caso $\lambda = -\mu^2 < 0$: è l'unico caso che dà soluzione non identicamente nulla. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} w(x) &= A \sin(\mu x) + B \cos(\mu x) \\ w(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \quad w(L) = 0 \Rightarrow A \sin(\mu L) = 0 \Rightarrow \mu L = n\pi \end{aligned}$$

Quindi si ha:

$$w_n(x) = A \sin(\mu_n x) \quad \text{con } \mu_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

In corrispondenza ai valori ammissibili μ_n trovati, la funzione $v(t)$ risolve $v'(t) = -\mu_n^2 kv(t)$, e dunque $v_n(t) = C e^{-\mu_n^2 kt}$. Conseguentemente, per ogni n si avrà

$$u_n(x, t) = A_n e^{-\mu_n^2 kt} \sin(\mu_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e la soluzione cercata sarà della forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\mu_n^2 kt} \sin(\mu_n x).$$

Resta da imporre la condizione iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$ per trovare i coefficienti A_n . Poiché

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\mu_n x),$$

bisogna sviluppare il dato iniziale $u_0(x)$ in serie di Fourier di seni:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(\mu_n x) \quad (\text{serie di Fourier per } u_0(x)).$$

Uguagliando le due serie termine a termine si trovano i coefficienti A_n , che devono essere uguali ai coefficienti di Fourier u_n di $u_0(x)$. Si è quindi dimostrata l'**esistenza** di una soluzione di (7.1).

Per dimostrare che il problema è ben posto resta da dimostrare l'unicità e la dipendenza continua dai dati (che in questo caso si riducono al solo dato iniziale $u_0(x)$).

7.1.1 Unicità.

Osserviamo innanzitutto che, se u è una soluzione, moltiplicando l'equazione differenziale per u , integrando su $[0, L]$ e integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} \forall t \quad \int_0^L u_t u \, dx + k \int_0^L u_x^2 \, dx - k [u_x u]_0^L &= 0 \quad \text{da cui} \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u^2(x, t) \, dx + k \int_0^L u_x^2(x, t) \, dx &= 0 \quad \text{e quindi} \quad (7.2) \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u^2(x, t) \, dx &= -k \int_0^L u_x^2(x, t) \, dx \leq 0. \end{aligned}$$

La funzione $E(t) = \int_0^L u^2(x, t) \, dx$ verifica $E'(t) \leq 0$ e quindi è una funzione decrescente. In particolare

$$E(t) = \int_0^L u^2(x, t) \, dx \leq E(0) = \int_0^L u^2(x, 0) \, dx = \int_0^L (u_0(x))^2 \, dx \quad (7.3)$$

Come al solito procederemo per contraddizione. Supponiamo che $u_1 \neq u_2$ siano due soluzioni del problema. La differenza \bar{u} risolve:

$$\begin{cases} \bar{u}_t(x, t) - k\bar{u}_{xx}(x, t) = 0 & x \in [0, L] \quad 0 \leq t \leq T \\ \bar{u}(0, t) = \bar{u}(L, t) = 0 & \forall t \\ \bar{u}(x, 0) = 0 & x \in [0, L] \end{cases}$$

Applicando la relazione (7.3) alla funzione $\bar{u}(x, t)$ si ha:

$$\int_0^L (\bar{u}(x, t))^2 \, dx \leq \int_0^L (\bar{u}(x, 0))^2 \, dx \equiv 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \bar{u} \equiv 0 \quad \forall t$$

Quindi la soluzione è unica.

7.1.2 Stabilità.

Una prima stima di stabilità si ottiene immediatamente da (7.3). Infatti, la soluzione unica $u(x, t)$ verifica

$$\int_0^L u^2(x, t) dx \leq \int_0^L (u_0(x))^2 dx \quad \forall t \in [0, T].$$

Volendo ottenere una stabilità globale, riprendendo la relazione (7.2) e integrando in t si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \left(\int_0^L u^2(x, t) dx \right) dt + k \int_0^T \left(\int_0^L (u_x(x, t))^2 dx \right) dt &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \int_0^L u^2(x, T) dx - \frac{1}{2} \int_0^L u^2(x, 0) dx + k \int_0^T \left(\int_0^L (u_x(x, t))^2 dx \right) dt &= 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{1}{2} \int_0^L u^2(x, T) dx + k \int_0^T \left(\int_0^L (u_x(x, t))^2 dx \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^L (u_0(x))^2 dx$$

7.2 Estensione al caso 2D e al caso astratto

L'estensione del problema (7.1) al caso di due dimensioni spaziali è: trovare $u(\underline{x}, t)$ ($\underline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$) soluzione di:

$$\begin{cases} u_t(\underline{x}, t) - k\Delta u(\underline{x}, t) = 0 & \text{in } Q_T = \Omega \times [0, T] \\ u(\underline{x}, 0) = u_0(\underline{x}) & \underline{x} \in \Omega \\ u(\underline{x}, t) = 0 & \underline{x} \in \partial\Omega, t \in [0, T] \end{cases} \quad (7.4)$$

Il problema può essere studiato come nel caso 1D per separazione di variabili. Tuttavia, volendo trattare problemi più generali (con presenza di un termine di sorgente di calore, con condizioni ai limiti non omogenee eccetera), abbandoniamo lo studio della formulazione *forte* del problema e passiamo alla formulazione variazionale.

La scrittura generale dei problemi parabolici, che sono problemi ai valori iniziali e ai limiti, è la seguente: si cerca $u = u(\underline{x}, t)$, soluzione di:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f & \text{in } \Omega \times [0, T] \\ u(\underline{x}, 0) = u_0(\underline{x}) & \underline{x} \in \Omega \\ + \text{C.L. di Dirichlet e/o Neumann su } \partial\Omega \quad \forall t \end{cases} \quad (7.5)$$

dove L è un operatore differenziale ellittico (uno dei vari visti), e $f = f(\underline{x}, t)$ è una funzione assegnata. Per la risoluzione numerica del problema tramite il metodo degli elementi finiti va innanzitutto scritta la formulazione debole di (7.5).

7.2.1 Formulazione variazionale del problema (7.5)

Per fissare le idee assumiamo ad esempio $u = 0$ su $\partial\Omega \times [0, T]$. Procediamo in modo formale, usando quanto appreso per le formulazioni variazionali di problemi ellittici: per ogni $t > 0$ moltiplichiamo l'equazione differenziale per una funzione test $v = v(\underline{x})$ e integriamo sul dominio Ω . Cerchiamo poi, per ogni $t > 0$ una funzione $u(\underline{x}, t) \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\forall t > 0 \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v dx + a(u, v) = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (7.6)$$

con $u(\underline{x}, 0) = u_0(\underline{x})$, dove $a(u, v)$ è la forma bilineare associata ad L . Se $a(\cdot, \cdot)$ è ellittica, si ha esistenza, unicità e stabilità. In realtà basta meno: è sufficiente che $a(\cdot, \cdot)$ sia *debolmente ellittica*, cioè:

$$\exists \alpha > 0 \text{ e } \lambda \geq 0 : a(v, v) + \lambda \|v\|_0^2 \geq \alpha \|v\|_1^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

7.3 Discretizzazione con elementi finiti

Sia \mathcal{T}_h una suddivisione di Ω in triangoli, e sia $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ uno spazio di elementi finiti, di dimensione N . L'approssimazione di (7.6) è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t > 0 \text{ Trovare } u_h(\underline{x}, t) \in V_h \text{ tale che :} \\ \int_{\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h dx + a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h dx \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right. \quad (7.7)$$

con $u_h(\underline{x}, 0) = u_{0h}$, dove u_{0h} è una approssimazione di $u_0(\underline{x})$ in V_h . Il problema (7.7) viene chiamato *semidiscretizzazione* di (7.6), in quanto è una discretizzazione nelle sole variabili spaziali.

Procedendo come fatto nel capitolo precedente, sia $\{\varphi_1(\underline{x}), \varphi_2(\underline{x}), \dots, \varphi_N(\underline{x})\}$ una base in V_h ; si avrà

$$u_h(\underline{x}, t) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \varphi_j(\underline{x}),$$

e i coefficienti $u_j(t)$ sono le incognite del problema (7.7). Sostituendo in (7.7) e scrivendo il problema sulla base si ottiene:

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^N \dot{u}_j(t) \varphi_j \right) \varphi_i dx + a \left(\sum_{j=1}^N u_j(t) \varphi_j, \varphi_i \right) = \int_{\Omega} f \varphi_i dx \quad i = 1, 2, \dots, N$$

ossia

$$\sum_{j=1}^N \dot{u}_j(t) \underbrace{\int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dx}_{m_{ij}} + \sum_{j=1}^N u_j(t) \underbrace{a(\varphi_j, \varphi_i)}_{a_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega} f \varphi_i dx}_{f_i(t)} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7.8)$$

Posto:

$\mathbf{M} = \{M_{ij}\}$ matrice di massa

$\mathbf{A} = \{A_{ij}\}$ matrice di rigidità

$$\underline{U}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N(t) \end{bmatrix} = \text{incognita} \quad \underline{F}(t) = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} f \varphi_1 dx \\ \int_{\Omega} f \varphi_2 dx \\ \vdots \\ \vdots \\ \int_{\Omega} f \varphi_N dx \end{bmatrix} = \text{termine noto}$$

$$\underline{U}^{(0)} = \begin{bmatrix} u_0(x_1) \\ u_0(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_0(x_N) \end{bmatrix} = \text{dato iniziale}$$

il sistema (7.8) può essere riscritto come

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\underline{U}}(t) + \mathbf{A}\underline{U}(t) = \underline{F}(t) \\ \underline{U}(0) = \underline{U}^{(0)} \end{cases} \quad (\text{Problema di Cauchy}) \quad (7.9)$$

Ci si è dunque ricondotti a un sistema di equazioni differenziali ordinarie ai valori iniziali che, essendo \mathbf{M} invertibile, può essere riscritto come

$$\dot{\underline{U}}(t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\underline{U}(t) + \mathbf{M}^{-1}\underline{F}(t), \quad \underline{U}(0) = \underline{U}^{(0)}.$$

Per risolvere il sistema (7.9) si possono usare le differenze finite in tempo, approssimando semplicemente la derivata temporale con un rapporto incrementale: suddiviso $[0, T]$ in NT intervalli di lunghezza $\Delta t = \frac{T}{NT}$, in ogni istante t_k si ha

$$\underline{U}'(t_k) \sim \frac{\underline{U}(t_k) - \underline{U}(t_{k-1})}{\Delta t} \quad k = 1, 2, \dots, NT.$$

I restanti termini possono essere trattati in vari modi. Denotando rispettivamente con $\underline{U}^{(k)}, \underline{F}^{(k)}$ le approssimazioni di $\underline{U}(t_k), \underline{F}(t_k)$, si ottengono vari schemi:

- $\mathbf{M} \left(\frac{\underline{U}^{(k)} - \underline{U}^{(k-1)}}{\Delta t} \right) + \mathbf{A} \underline{U}^{(k-1)} = \underline{F}^{(k-1)} \quad k = 1, 2, \dots, NT$
(metodo di Eulero esplicito)
- $\mathbf{M} \left(\frac{\underline{U}^{(k)} - \underline{U}^{(k-1)}}{\Delta t} \right) + \mathbf{A} \underline{U}^{(k)} = \underline{F}^{(k)} \quad k = 1, 2, \dots, NT$
(metodo di Eulero implicito)
- $\mathbf{M} \left(\frac{\underline{U}^{(k)} - \underline{U}^{(k-1)}}{\Delta t} \right) + \mathbf{A} \left(\theta \underline{U}^{(k)} + (1-\theta) \underline{U}^{(k-1)} \right) = \theta \underline{F}^{(k)} + (1-\theta) \underline{F}^{(k-1)}$
 $k = 1, 2, \dots, NT, \quad 0 \leq \theta \leq 1$
(θ -metodo, esplicito per $\theta = 0$, implicito per $0 < \theta \leq 1$)

Nel caso esplicito si ottiene: ($\theta = 0$)

$$\begin{cases} \mathbf{M} \underline{U}^{(k)} = \mathbf{M} \underline{U}^{(k-1)} - \Delta t (\mathbf{A} \underline{U}^{(k-1)} - \underline{F}^{(k-1)}) & k = 1, 2, \dots, NT \\ \underline{U}^{(0)} = \text{dato} \end{cases}$$

Per trovare la soluzione ad ogni istante temporale bisogna risolvere un sistema di equazioni lineari con matrice \mathbf{M} (sempre la stessa ad ogni passo temporale) e termine noto già calcolato all'istante precedente. Questo spiega perché lo schema si chiama esplicito.

Nel caso totalmente implicito si ha: ($\theta = 1$)

$$\begin{cases} (\mathbf{M} + \Delta t \mathbf{A}) \underline{U}^{(k)} = \mathbf{M} \underline{U}^{(k-1)} + \Delta t \underline{F}^{(k)} & k = 1, 2, \dots, NT \\ \underline{U}^{(0)} = \text{dato} \end{cases}$$

In questo caso la matrice del sistema può cambiare da un istante all'altro (se Δt non è costante), e nel termine noto la parte $\underline{F}^{(k)}$ va calcolata. Questo

rende gli schemi cosiddetti impliciti più costosi.

Per $(\theta = \frac{1}{2})$ si ottiene:

$$\left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A}\right) \underline{U}^{(k)} = \left(\mathbf{M} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A}\right) \underline{U}^{(k-1)} + \frac{1}{2}(\underline{F}^{(k-1)} + \underline{F}^{(k)})$$

Lo schema esplicito è il meno costoso, ma richiede che

$$\Delta t \ll c h^2$$

affinché lo schema converga.

Esempio. Applicazione al problema (7.4)

La formulazione variazionale di (7.4) è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t > 0 \text{ Trovare } u(\underline{x}, t) \in H_0^1(\Omega) : \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \int_{\Omega} u_t v \, dx + k \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v = v(\underline{x}) \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

e il problema approssimato diventa (come da (7.7))

$$\sum_{j=1}^N \dot{u}_j(t) \underbrace{\int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i \, dx}_{m_{ij}} + \sum_{j=1}^N u_j(t) \underbrace{\int_{\Omega} k \underline{\nabla} \varphi_j \cdot \underline{\nabla} \varphi_i}_{a_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega} f \varphi_i \, dx}_{f_i(t)} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Usiamo Elementi Finiti lineari a tratti e continui:

$$V_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) : v|_T \in P_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Le matrici di massa e di rigidezza dipendono solo dalle variabili spaziali, e possono essere costruite una volta per tutte a partire dalle matrici elementari, esattamente come visto nel caso di problemi ellittici. Il termine noto dovrà essere approssimato tramite una formula di quadratura a scelta.

Indice

1	Equazioni differenziali alle derivate parziali	2
1.1	Equazioni differenziali lineari	3
1.2	Equazioni differenziali non lineari	4
1.3	Problema ben posto	5
2	Equazione di trasporto	8
2.1	Il problema omogeneo	8
2.1.1	Le linee caratteristiche	9
2.2	Problemi non omogenei	11
2.2.1	Il caso di una forzante costante	11
2.2.2	Il caso di una forzante che dipende solo da t	13
2.2.3	Il caso di una forzante che dipende solo da x	14
2.3	Considerazioni finali	16
2.4	Il caso di c non costante	17
2.5	Problema ai limiti per l'equazione del trasporto	18
3	Equazioni alle derivate parziali del secondo ordine	24
4	Equazione delle onde, o di D'Alembert	26
4.1	Dominio di dipendenza e dominio di influenza	29
4.2	Soluzione fondamentale dell'equazione delle onde	30
4.3	Equazione delle onde per una corda di lunghezza finita (problema ai limiti)	34
4.3.1	Stabilità	36
4.4	Estensione a più dimensioni: strumenti analitici	39
4.5	Equazione delle onde in 2 dimensioni spaziali	42
4.5.1	Stabilità	43
4.5.2	Unicità	44

5	Formulazioni variazionali di problemi ellittici	45
5.1	Richiami di algebra lineare	45
5.1.1	Spazi vettoriali lineari su \mathbb{R}	45
5.1.2	Applicazioni lineari e bilineari; funzionali	46
5.1.3	Spazi vettoriali normati	47
5.1.4	Continuità di funzionali lineari e forme bilineari; norme duali	47
5.2	Introduzione alle formulazioni variazionali	49
5.2.1	Generalità	49
5.2.2	Condizioni ai limiti	49
5.2.3	Condizioni naturali e condizioni forzate	50
5.2.4	Formulazione variazionale del Problema ES1	51
5.3	Richiami di analisi funzionale	52
5.3.1	Spazi pre-Hilbertiani	52
5.3.2	Disuguaglianza di Cauchy–Schwarz	53
5.3.3	Spazi di Hilbert	53
5.3.4	Lo spazio $L^2(\Omega)$	54
5.3.5	Gli spazi H^1 e H_0^1	55
5.3.6	Definizione di derivata debole	56
5.3.7	Disuguaglianza di Poincaré	57
5.3.8	Conseguenze della disuguaglianza di Poincaré	58
5.4	Formulazioni variazionali dei problemi (ES1)–(ES4)	59
5.4.1	Formulazione variazionale del Problema (ES1)	59
5.4.2	Formulazione variazionale del Problema (ES2)	60
5.4.3	Formulazione variazionale del Problema (ES3)	61
5.4.4	Formulazione variazionale del Problema (ES4)	61
5.5	Formulazioni variazionali astratte	62
5.5.1	Lemma di Lax–Milgram	62
	Dimostrazione	63
5.6	Applicazioni del Lemma di Lax–Milgram	66
5.6.1	Esistenza e unicità della soluzione di (ES1)	66
5.6.2	Stabilità del problema (ES1)	68
5.6.3	Il problema non omogeneo (ES1g)	69
5.6.4	Esistenza, unicità e stabilità del problema (ES2)	69
5.6.5	Il problema non omogeneo (ES2g)	70
5.6.6	Il problema (ES3)	71
5.6.7	Altro esempio di applicazione del lemma di Lax–Milgram	72
5.7	Appendice: Dimostrazione del lemma di Lax–Milgram	74

6	Approssimazione di problemi ai limiti per PDEs	79
6.1	Il metodo delle differenze finite	79
6.1.1	Esempi di applicazioni modellate dal problema (P) . . .	79
	Barra elastica in trazione (piccoli spostamenti)	79
	Filo elastico (piccoli spostamenti)	80
	Diffusione del calore	80
	Elettrostatica	80
6.1.2	Richiami: approssimazione di derivate	81
6.1.3	Metodo delle differenze finite	83
6.1.4	Studio dell'errore	84
	Richiami su norme di vettori e matrici	85
6.2	Metodo degli elementi finiti	87
6.2.1	Errore di interpolazione	89
6.2.2	Il metodo degli elementi finiti in 2D	93
6.2.3	Elementi finiti lineari	96
	Applicazione a un problema modello	98
6.2.4	Calcolo matrici di stiffness elementari	99
6.2.5	Costruzione del termine noto	102
6.2.6	Esempio di programmazione	103
	Assemblaggio delle matrici	103
	Condizioni al bordo di Dirichlet	104
	Applicazione a un altro problema modello	105
	Costruzione della matrice di massa	107
7	Problemi parabolici	108
7.1	Equazione del calore in una dimensione	108
7.1.1	Unicità.	110
7.1.2	Stabilità.	111
7.2	Estensione al caso 2D e al caso astratto	111
7.2.1	Formulazione variazionale del problema (7.5)	112
7.3	Discretizzazione con elementi finiti	112
	Indice	116