Complementi di Matematica – A.A. 2022–2023
DOMANDE D'ESAME
Tempo a disposizione per due domande: 1 ora

1. Equazione del trasporto omogenea su $\mathbb{R}$: dimostrare esistenza, unicità e stabilità.
   Si consideri poi il problema
   $$u_t + 3u_x = 0, \quad u(x,0) = \cos(2\pi x).$$
   Si ha $u(x,t) =$ e $u(2,3) =$

2. Studio di $u_t + cu_x = f(t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ c$ costante: dimostrare esistenza, unicità e stabilità.
   Si consideri poi il problema
   $$u_t + 2u_x = t, \quad u(x,0) = \sin(\pi x).$$
   Si ha $u(x,t) =$ e $u(3,2) =$

3. Studio di $u_t + cu_x = f(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ c$ costante: dimostrare esistenza, unicità e stabilità.

4. Equazione di trasporto omogenea su un intervallo $[0, L]$: dimostrare esistenza, unicità e stabilità.
   Si consideri poi il problema
   $$u_t + 2u_x = 0, \quad u(x,0) = \cos(x), \quad u(0,t) = 1.$$
   Si ha $u(x,t) =$

5. Enunciare il lemma di Lax-Milgram. Dimostrare unicità e stabilità.

6. Classificazione delle equazioni differenziali (a derivate parziali) del II ordine, lineari, a coefficienti costanti.

7. Diffusione del calore in una dimensione: unicità della soluzione e formulazione variazionale.

8. Derivare la soluzione di d'Alembert per l'equazione della corda vibrante. Dimostrare unicità e stabilità.

9. Unicità e stabilità della soluzione dell'equazione delle onde su un intervallo finito.

10. Enunciare la disuguaglianza di Poincaré e dare la dimostrazione in una dimensione.

11. Equivalenza in $H_0^1(\Omega)$ delle norme $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|v\|_{H^1(\Omega)}$.

12. Scrivere e dimostrare la formula di Gauss-Green in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$.

13. Dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

14. Derivare condizioni sufficienti sui dati $k(x)$ e $p(x)$ affinché la forma bilineare

$$a(u,v) = \int_0^L k(x)\, u'\, v'\, dx + \int_0^L p(x)\, u\, v\, dx$$

sia continua e coerciva (ellittica) in $H_0^1(0,L)$.

15. Continuità e coercività (ellitticità) in $H_0^1(0,L)$ di

$$a(u,v) = \int_0^L (1+x)\, u'\, v'\, dx + \int_0^L 2\, u\, v\, dx.$$

16. Sia Ω un poligono convesso. Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$-div\big(k(x)\underline{\nabla} u\big) = f \text{ in } \Omega, \qquad u = 0 \text{ sul bordo.}$$

Derivare condizioni sufficienti sui dati affinché siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

17. Sia Ω un poligono convesso. Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$-div\big(k(x)\underline{\nabla} u\big) = f \text{ in } \Omega, \qquad u = g \text{ sul bordo.}$$

Derivare condizioni sufficienti sui dati affinché siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

18. Sia Ω un poligono convesso. Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$-div\big(k(x)\underline{\nabla} u\big) + u = f \text{ in } \Omega, \qquad k(x)\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = 0 \text{ sul bordo.}$$

Scrivere condizioni sufficienti sui dati affinché siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

19. Sia Ω un poligono convesso. Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$-div\big(k(x)\underline{\nabla} u\big) + u = f \text{ in } \Omega, \qquad k(x)\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = g \text{ sul bordo.}$$

Scrivere condizioni sufficienti sui dati affinché siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

20. Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (4 + y^2)u = f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \text{ al bordo,}$$

e controllare che siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

21. Dato il problema variazionale:

$$\begin{cases} \text{trovare } u \in H_0^1(0,1) \text{ soluzione di} \\ \displaystyle\int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 (1+4x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1(0,1) \end{cases}$$

verificare l'applicabilità del Lemma di Lax-Milgram.
Qual è la formulazione "forte" del problema?

22. Sia data una funzione reale liscia u. Scrivere il rapporto incrementale destro, il rapporto incrementale centrale e il rapporto incrementale secondo in un punto x. Stimare l'errore con cui ciascuno di questi approssima la corrispondente derivata di u.

23. Il metodo delle differenze finite per problemi ellittici in una variabile.

24. Il lemma di Céa per il metodo di Galerkin: enunciato e dimostrazione.

25. Il metodo degli elementi finiti per problemi ellittici in una variabile.

26. Problemi ellittici in 2D: approssimazione con elementi finiti continui e lineari a tratti.

27. Problemi parabolici in 2D: approssimazione con elementi finiti continui e lineari a tratti.

28. Il metodo di Galerkin per problemi ellittici.

29. Sul triangolo con vertici $V_1 = (0,0)$, $V_2 = (1,1)$, $V_3 = (-1,1)$, calcolare la matrice di stiffness per l'approssimazione con elementi finiti lineari dell'operatore di Laplace.

30. Sul generico triangolo T calcolare la matrice di massa elementare per elementi finiti lineari.

31. Sul triangolo con vertici $V_1 = (0,0)$, $V_2 = (1,0)$, $V_3 = (0,1)$, calcolare l'espressione analitica delle tre funzioni di base $\varphi_i(x,y)$ $(i = 1,2,3)$.

32. Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$-\Delta u + 3u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \text{ al bordo,}$$

e quindi l'approssimazione con elementi finiti.

33. Si approssimi con elementi finiti continui e lineari a tratti il problema: trovare $u \in H_0^1(0,1)$ soluzione di

$$\int_0^1 k\, u'\, v'\, dx + \int_0^1 p\, u\, v\, dx = \int_0^1 v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(0,1),$$

con k e p costanti positive.

Per $h = 1/3$ si calcolino matrici (di stiffness e di massa), e termine noto.

34. Sia $u(x)$ soluzione del seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} -u''(x) + ku(x) = f(x) & \text{in } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

dove $k > 0$. Si scriva la formulazione debole, l'approssimazione con elementi finiti e la corrispondente formulazione matriciale.

35. Sia $u \in H_0^1(0,L)$ soluzione di

$$\int_0^L u'\, v'\, dx + \int_0^L u\, v\, dx = \int_0^L f v\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(0,L).$$

Scrivere la formulazione del metodo di Galerkin per questo problema e derivare la forma matriciale.

36. Sia $u \in H_0^1(0,L)$ soluzione di

$$\int_0^L u'\, v'\, dx = \int_0^L f v\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(0,L).$$

Definire lo spazio degli elementi finiti lineari per questo problema e una sua base. Derivare la matrice di stiffness.