Esercizi di Algebra 2 - 13/4/2022

Esercizio 1. Quali dei seguenti gruppi abeliani sono isomorfi:

$$A := \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/36, \quad B := \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/18,$$
$$C := \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/18, \quad D := \mathbb{Z}/9 \oplus (\mathbb{Z}/2)^3 \oplus \mathbb{Z}/3.$$

Esercizio 2. Quale dei gruppi sopra contiene un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/6$?

Esercizio 3. Scrivere nella forma dei divisori elementari i seguenti gruppi abeliani:

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/6, \mathbb{Z}/12), \qquad \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/12), \qquad \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}/12),$$
$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/14), \qquad \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/7 \oplus \mathbb{Z}/21).$$

Esercizio 4. Sia $V_4 \cong (\mathbb{Z}/2)^2$ il gruppo di Klein. Dimostrare che $\mathrm{Aut}\, V_4 \cong \mathrm{GL}(2,2) \cong S_3$.

Esercizio 5. Classificare i gruppi abeliani di ordine 16 e trovare quello che ha l'ordine del gruppo degli automorfismi più grande possibile.

Esercizio 6. Sia D_n il gruppo diedrale formato dalle isometrie di un n-agono, ossia $|D_n| = 2n$.

(1) Sia H un gruppo. Dimostrare che H è abeliano se e solo se $\varphi : H \to H, \varphi(h) = h^{-1}$ è un morfismo.
(2) Dimostrare che $D_n = C_n \rtimes_\theta C_2$ dove θ manda il generatore di C_2 in $\varphi \in \mathrm{Aut}\, C_n$.
(3) Dimostrare che se $n = 2m$ e m è dispari, allora $D_n \cong C_2 \times D_n$.
(4) Se $n = 2m$ e m pari, è vero o falso che $D_n \cong C_2 \times D_n$?

Esercizio 7. Siano H ed N gruppi e sia $\theta : H \to \mathrm{Aut}\, N$. Dimostrare che $G := N \rtimes_\theta H$ è abeliano se e solo se H ed N sono abeliani e θ è il morfismo banale (ossia $N \rtimes_\theta H = N \times H$).

Esercizio 8. Sia G un gruppo e siano N ed H sottogruppi tali che $N \lhd G$, $H \cap N = \{e\}$ e $NH = G$. Se non esistono morfismi non banali $H \to \mathrm{Aut}\, N$, allora anche H è normale e $G \cong N \times H$.

Esercizio 9. Esiste un gruppo semplice di ordine 2019, 2020, 2021 o 2022?

Esercizio 10. Sia G un gruppo di ordine $p^a \cdot m$ con $p \nmid m$. Dimostrare che $p > m$, allora $n_p = 1$.

Esercizio 11 (Compito del 23/06/2020)**.** Sia p un numero primo. e sia G un gruppo di ordine $p(2p+5)$.

(1) Dimostrare che se $2p + 5$ è primo, allora G è ciclico.
(2) Dimostrare che se $p > 2$, allora G ha un unico p-Sylow.
(3) Dimostrare che se $p = 47$, allora G è abeliano.

Esercizio 12. Un gruppo di ordine 45 è abeliano.

Esercizio 13. Se $o(G) = 30$ allora G ha un p-Sylow normale. (Suggerimento: dimostrare che o $n_3 = 1$ o $n_5 = 1$.)

Esercizio 14. Dimostrare che se $o(G) = 56$, allora esiste un p-Sylow normale.

Esercizio 15. Classificare i gruppi di ordine 76. (Suggerimento: ci sono 4 classi di isomorfismo di gruppi di ordine 76.)

Esercizio 16. Sfruttando l'esercizio 13 classificare i gruppi di ordine 30.

Esercizio 17. Siano K, N, H gruppi e sia $\theta : H \to \operatorname{Aut} N$ un morfismo. Poniamo $\bar{\theta}_h := (\mathrm{id}_K, \theta_h) \in \operatorname{Aut} K \times N$. Sia F l'applicazione identica dell'insieme $K \times N \times H$. Dimostrare che F è un isomorfismo del gruppo $K \times (N \rtimes_\theta H)$ sul gruppo $(K \times N) \rtimes_{\bar{\theta}} H$.

Esercizio 18. Sia $G = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico di ordine n e sia d un divisore di n. Allora $\{x \in G : o(x) | d\} = \langle g^{n/d} \rangle$.

Esercizio 19. Sia A un gruppo abeliano e sia $C = \mathbb{Z} \cdot x$ un gruppo ciclico generato da x (in notazione additiva).

(1) L'applicazione $F : \operatorname{Hom}(C, A) \to A, F(f) := f(x)$ è un morfismo di gruppi iniettivo.
(2) Se $C = \mathbb{Z}$, allora $\operatorname{Im} F = A$.
(3) Se $C = \mathbb{Z}/n$ allora $\operatorname{Im} F = \{a \in A : o(a) | n\}$.
(4) Se $C = \mathbb{Z}/n$ e $A = \mathbb{Z}/m$, allora $\operatorname{Im} F \cong \mathbb{Z}/(m, n)$ (dove (m, n) indica il massimo comun divisore di m ed n).

Esercizio 20. Siano N_1, N_2, H gruppi e siano $\theta_i : H \to \operatorname{Aut} N_i$ dei morfismi. Poniamo $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Dimostrare che se $\theta_1 = \mathrm{id}_{N_1}$ l'applicazione identica dell'insieme $N_1 \times N_2 \times H$ dà un isomorfismo

$$(N_1 \times N_2) \rtimes_\theta H \cong N_1 \times (N_2 \rtimes_{\theta_2} H).$$

Esercizio 21. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\operatorname{Aff}(V)$ il gruppo delle affinità di V, ossia le trasformazioni della forma $f(v) = Av + v_0$ con $A \in \mathrm{GL}(V)$ e $v_0 \in V$. Dimostrare che $\operatorname{Aff}(V) = V \rtimes_\theta \mathrm{GL}(V)$, dove $\theta_A(v) = Av$.