Calendario delle lezioni di Complementi di Geometria

20 dicembre 2016

Lezione 7/10, 11-13, aula E10

1. Gruppo abeliano libero su un insieme.
2. Basi in un gruppo abeliano. Gruppi abeliani liberi.
3. I sottogruppi di un gruppo abeliano libero sono tutti liberi e una base del sottogruppo ha al più la stessa cardinalità di una base del gruppo. (Dimostrazione solo nel caso finitamente generato.)
4. Le basi di un gruppo abeliano libero hanno tutte la stessa cardinalità. (Senza dimostrazione.)
5. Un gruppo abeliano finitamente generato è somma diretta del suo sottogruppo di torsione e di un sottogruppo libero. (Senza dimostrazione.)
6. Rango di un gruppo abeliano.
7. Simplesso standard.
8. Simplessi singolari in uno spazio topologico. Catene singolari in uno spazio topologico.

Lezione 14/10, 11-13

1. Simplessi lineari $\sigma : \Delta_p \to \mathbb{R}^n$. Notazione: $[v_0, \ldots, v_p]$, $v_i = \sigma(e_i)$.
2. Facce: per $p \geq 1$ e $0 \leq i \leq p$, $F_p^i := [e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_p] : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$.
3. Se consideriamo Δ_p come sottoinsieme dell'iperpiano affine $H = \{x_0 + \cdots x_p = 0\} \subset \mathbb{R}^{p+1}$, allora
$$\partial\Delta_p = \bigcup_{i=0}^{p} F_p^i(\Delta_{p-1}).$$
4. Se $p \geq 1$ e $0 \leq j < i \leq p+1$, allora $F_{p+1}^i F_p^j = F_{p+1}^j F_p^{i-1}$.
5. Operatore di bordo $\partial_p : C_p(X) \to C_{p-1}(X)$.
6. $\partial_p \partial_{p+1} \equiv 0$.
7. Complessi di gruppi abeliani. Cicli e bordi.

Lezione 18/10, 15-17

1. Omologia singolare di uno spazio topologico.

2. La categoria $\partial\mathfrak{AG}$ dei complessi di gruppi abeliani. Morfismi di complessi: se $(C_\bullet, \partial_\bullet)$, $(D_\bullet, \delta_\bullet)$ sono due complessi di gruppi abeliani, un morfismo di complessi è una collezione di morfismi $f_n : C_n \to D_n$ tali che tutti i rettangoli del diagramma sotto commutino:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

   In altre parole: $\delta_n f_n = f_{n-1}\partial_n$.

3. Il funtore $H_p : \partial\mathfrak{AG} \longrightarrow \mathfrak{AG}$ (dove $\mathfrak{AG}$ indica la categoria dei gruppi abeliani). Se $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ è un morfismo di complessi, allora H_p associa a $f_\bullet$ il morfismo

$$f_* : H_p(C_\bullet) \longrightarrow H_p(D_\bullet)$$

   definito ponendo $f_*([c]) := [f_p(c)]$. Questo morfismo è ben definito perché f_p manda cicli in cicli e bordi in bordi.

4. Funtore delle catene singolari: $\mathfrak{Top} \longrightarrow \partial\mathfrak{AG}$. Associa ad uno spazio il complesso $(C_\bullet(X), \partial_\bullet)$ delle catene singolari. Ad un morfismo, cioè ad una funzione continua $f : X \to Y$, associa il morfismo di complessi

$$f_\# : C_\bullet(X) \longrightarrow C_\bullet(Y)$$

   definito nel modo seguente: se $c = \sum_{i=1}^k m_i\sigma_i \in C_p(X)$ e σ_k sono p-simplessi singolari, allora

$$f_\#(c) := \sum_{i=1}^k m_i\, f \circ \sigma_k.$$

5. L'omologia singolare, ossia la corrispondenza $X \mapsto H_p(X)$, si può vedere come composizione di due funtori: il funtore delle catene da $\mathfrak{Top}$ a $\partial\mathfrak{AG}$ e il funtore H_p da $\partial\mathfrak{AG}$ a $\mathfrak{AG}$.

6. Omologia del punto.

Lezione 21/10, 11-13

1. Se $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ sono le componenti connesse per archi di X, allora per ogni $q \in \mathbb{Z}$ si ha $H_q(X) = \bigoplus_{\alpha\in I} H_q(X_\alpha)$.

2. Definiamo

$$\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}, \qquad \varepsilon\Big(\sum_{i=1}^r m_i\sigma_i\Big) := \sum_{i=1}^r m_i.$$

3. Allora $\varepsilon\partial_1 = 0$. Dunque $\operatorname{im}\partial_1 \subset \ker\varepsilon$.

4. Se X è connesso per archi e $c = \sum_{i=1}^r m_i\sigma_i$, scelgo degli 1-simplessi σ_i tali che $\sigma_i(e_0) = x_0$, $\sigma_i(e_1) = x_i$, dove x_0 è un punto fissato di X. Posto $d := \sum_{i=1}^r m_i\sigma_i$ si ha

$$\partial_1 d = c - \varepsilon(c)\cdot x_0.$$

Dunque se $c \in \ker\varepsilon$, allora $c = \partial_1 d \in \operatorname{im}\partial_1$. Pertanto se X è connesso per archi $\operatorname{im}\partial_1 = \ker\varepsilon$. Il morfismo $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ passa al quoziente e $\tilde{\varepsilon} : H_0(X) \to \mathbb{Z}$ è un isomorfismo.

5. **Teorema di Invarianza Omotopica**. Siano $f, g : X \to Y$ due applicazioni omotope. Allora $f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Prima parte della dimostrazione.

Lezione 28/10, 11-13

1. Fine della dimostrazione del teorema di invarianza omotopica.

2. Successioni esatte.

Lezione 4/11, 11-13

1. Successioni esatte che si spezzano, [1, p. 113, p. 147].

2. Se C è un gruppo abeliano libero ogni successione esatta $0 \to A \to B \to C \to 0$ si spezza.

3. Successioni esatte di complessi di gruppi abeliani.

4. Sottocomplessi e complessi quoziente.

5. Data una successione esatta corta di complessi di gruppi abeliani

$$0 \to A_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} C_\bullet \to 0,$$

è definito un omomorfismo di connession $\partial^* : H_{p+1}(C_\bullet) \to H_p(A_\bullet)$ e la successione

$$\cdots \to H_{p+1}(C_\bullet) \xrightarrow{\partial^*} H_p(A_\bullet) \xrightarrow{f_*} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{g_*} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\partial^*} H_{p=1}(A_\bullet) \to \cdots$$

è esatta.

6. Complesso aumentato:

$$\cdots \to C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \to \cdots \to C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0 \to \cdots$$

7. Omologia ridotta.

8. $$H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

Lezione 11/11, 11-13

1. Teorema sulle catene piccole. Prima parte della dimostrazione.

Lezione 14/11, 16-17

1. Fine della dimostrazione del teorema sulle catene piccole.

Lezione 18/11, 11-13

1. Coppie di spazi. Complesso delle catene relative. Omologia relativa. L'omologia relativa è un funtore dalla categoria delle coppie di spazi topologici nella categoria dei gruppi abeliani.

2. Siano A e B gruppi abeliani, $A' \subset A$ e $B \ \subset B$ sottogruppi e sia $f : A \longrightarrow B$ un morfismo tale che $f(A') \subset B'$. Sia $\bar{f} : A/A' \longrightarrow B/B'$ il morfismo indotto. Allora
$$\ker \bar{f} = \frac{f^{-1}(B')}{A'}, \qquad \operatorname{im} \bar{f} = \frac{f(A) + B'}{B'}.$$

3. Per ogni coppia (X, A) si ha
$$H_q(X, A) \cong \frac{\{c \in C_q(X) : \partial c \in C_{q-1}(A)\}}{\partial C_{q+1}(X) + C_q(A)}.$$

4. Successione esatta lunga della coppia (X, A). Terne di spazi. Successione esatta lunga della terna (X, A, B).

5. L'invarianza omotopica vale per coppie di spazi: se $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ sono omotope attraverso una omotopia $H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ tale che $H(A \times [0, 1]) \subset B$, allora per ogni p.
$$f_* = g_* : H_p(X, A) \longrightarrow H_p(Y, B).$$

6. Teorema di escissione.

7. Se $A \neq \varnothing$, $\widetilde{H}_p(X, A) = H_p(X, A)$. Quindi c'è anche una successione esatta lunga
$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_n(A) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

8. Se $p : X \to Y$ è una identificazione (cioè una mappa quoziente) allora anche $p \times \mathrm{id}_{[0,1]} : X \times [0, 1] \to Y \times [0, 1]$ lo è (senza dimostrazione, vedi [3, p. 106].

9. Coppie buone.

10. Se (X, A) è una coppia buona, allora anche $(X/A, a := A/A)$ è una coppia buona e se $q : X \to X/A$ è la proiezione canonica, allora $q : (X, A) \to (X/A, a)$ induce un isomorfismo in omologia. Dunque $H_n(X, A) \cong H_n(X/A, a) \cong \widetilde{H}_n(X/A)$. (Si veda [1, Prop. 2.22, p. 124].)

Lezione 25/11, 11-13

1. Se $x_0 \in X$, allora $\widetilde{C}_p(X) \cong H_p(X, x_0)$.

2. Se (X, A) è una coppia buona, allora c'è una successione esatta lunga

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_n(A) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X) \longrightarrow \widetilde{H}(X/A) \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

   Il primo morfismo è quello indotto dall'inclusione $A \hookrightarrow X$. Il secondo è indotto dalla composizione
$$X = (X, \varnothing) \hookrightarrow (X, A) \xrightarrow{q} X/A.$$
   Il terzo è l'omomorfismo di connessione.

3. $D^n/S^{n-1} = S^n$.

4. $\widetilde{H}_k(S^n) = 0$ se $k \neq n$ e $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

5. Teorema di Brouwer: non esistono retrazioni di D^n su $\partial D^n = S^{n-1}$.

6. Teorema di invarianza della dimensione.

7. Successione di Mayer-Vietoris.

Lezione 2/12

1. Sia Ω_∞ uno spazio topologico e sia $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione crescente di aperti tale che $\bigcup_j \Omega_j = \Omega_\infty$. Per $n, m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con $n \leq m$ sia

$$f_{n,m} : \Omega_n \hookrightarrow \Omega_m$$

   l'inclusione. Se $a \in \tilde{H}_p(\Omega_n)$ e $(f_{n,\infty})_*(a) = 0$ in $\tilde{H}_p(\Omega_\infty)$, allora esiste $m \in \mathbb{N}$, $m > n$ tale che $(f_{n,m})_*(a) = 0$ in $\tilde{H}_p(\Omega_\infty)$.

2. Teorema di separazione di Jordan-Brouwer:

   a) Se $0 \leq k \leq n$ e $X \subset S^n$ è omeomorfo a $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| \leq 1\}$, allora $\tilde{H}_p(S^n - X) = 0$ per ogni p.
   b) Se $0 \leq k < n$ e $Z \subset S^n$ è omeomorfo a S^k, allora $\tilde{H}_p(S^n - Z) = 0$ per ogni $p \neq n - k - 1$ e $\tilde{H}_{n-k-1}(S^- Z) \cong \mathbb{Z}$.

3. Teorema di invarianza del dominio.

4. Grado di applicazioni fra sfere. Mappe omotope hanno lo stesso grado.

5. $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$. Gli omeomorfismi hanno grado ± 1.

6. Se X è uno spazio topologico e $f : X \to S^n$ non è suriettiva, allora f è omotopa ad una costante.

Lezione 5/12, 16-17

1. Sia (X, A) una coppia e siano $X' \subset X$ e $A' \subset A \cap X$ due sottoinsiemi. Sia $i : (X', A') \hookrightarrow (X, A)$ l'inclusione. Sia $\tilde{i} : X'/A' \to X/A$ l'applicazione indotta sui quozienti. Se (X, A) e (X', A') sono coppie buone e $\tilde{i}$ è un omeomorfismo, allora i induce isomorfismi in omologia.

2. La classe di id_{Δ_n} è un generatore di $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$.

3. Se K è un convesso compatto di $\mathbb{R}^n$ con interno non vuoto, allora $(K, \partial K)$ è omeomorfa a (D^n, S^{n-1}) (senza dimostrazione).

4. La sfera si può vedere come spazio di identificazione di due dischi incollati lungo il bordo.

Lezione 12/12, 16-17

1. Generatore di $H_n(S^n)$.

2. Le applicazioni costanti $f : S^n \to S^n$ hanno grado nullo.

3. Le riflessioni $S^n \to S^n$ hanno grado -1.

4. L'applicazione antipodale $a : S^n \to S^n$, $a(x) = -x$ ha grado $(-1)^{n+1}$.

5. Se n è pari l'applicazione antipodale non è omotopa all'identità di S^n.

6. Teorema di non pettinabilità della sfera: se n è pari ogni campo vettoriale continuo su S^n si annulla da qualche parte.

Lezione 13/12, ore 9-11

1. Complesso di omologia cellulare. Isomorfismo fra la omologia di questo complesso e la omologia singolare.

Lezione 16/12

1. Calcolo dell'operatore bordo nel complesso di omologia cellulare tramite il grado di applicazioni fra sfere.

2. Struttura di CW-complesso sullo spazio proiettivo complesso.

3. Omologia dello spazio proiettivo complesso.

Lezione 19/12

1. Sia G un gruppo che agisce su uno spazio topologico X tramite omeomorfismi, cioè per ogni $g \in G$, l'applicazione $x \mapsto g \cdot x$ è un omeomorfismo di X su sé stesso. Allora se consideriamo su X/G la topologia quoziente, la proiezione canonica $\pi : X \to X/G$ è una mappa aperta.

2. Sia X uno spazio di Hausdorff, $\sim$ una relazione su X e $\pi : X \to X/\sim$ la proiezione canonica. Consideriamo su $X/\sim$ la topologia quoziente e supponiamo che $\pi : X \to X/\sim$ sia una mappa aperta. Allora $X/\sim$ è di Hausdorff se e solo se la relazione $\sim$, vista come un sottoinsieme di $X \times X$ è chiusa (esercizio).

3. Il proiettivo (reale o complesso) è uno spazio di Hausdorff compatto.

4. Struttura di CW-complesso sullo spazio proiettivo reale.

5. Omologia dello spazio proiettivo reale.

Lezione 20/12, ore 14-15

1. Omologia delle superfici orientabili e non orientabili.

2. Rango di un gruppo abeliano. Se $0 \to A \to B \to C \to 0$ è una successione esatta di gruppi abeliani, allora $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} C$. Questo non l'ho dimostrato. Una dimostrazione si trova in [2, I, pp. 137-142].

3. Caratteristica di Eulero. Se X è un CW-complesso finito, allora

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i w_i$$

dove w_i indica il numero delle i-celle di X.

Riferimenti bibliografici

[1] A. Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[2] A. G. Kurosh. *The theory of groups.* Chelsea Publishing Co., New York, 1960. Translated from the Russian and edited by K. A. Hirsch. 2nd English ed. 2 volumes.

[3] M. Manetti. *Topologia.* Springer, Milano, 2nd edition, 2014.