Calendario delle lezioni di Geometria e Algebra

28 settembre 2016

Lezione 28/09, 11-13 aula EF1

1. Insieme. Elementi di un insieme.
2. Sottoinsiemi di un insieme: $A \subset B$.
   Uguaglianza di insiemi.
3. $A = B$ se e soltanto se $A \subset B$ e $B \subset A$.
4. Insiemi numerici: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
5. Intersezione e unione di insiemi. Complementare: $A - B$.
6. $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$.
7. $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$.
8. Coppie: (a, b). Due coppie (a, b) e (a', b') sono uguali se e soltanto se $a = a'$ e $b = b'$. Prodotto cartesiano $A \times B$. $A \times B \times C$, $\mathbb{R}^n$.
9. Funzioni. Dominio, codominio.
10. La formula $f(x) := e^x$ definisce una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
11. La formula $f(x) := 1/x$ non definisce una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, perché non so chi è $f(0)$.
12. Se pongo
    $$f(x) := \begin{cases} 1/x & \text{se } x \neq 0; \\ 80 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$
    definisce una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
13. Altri esempi: quali delle seguenti leggi definisce una funzione?
    (a) $X = \{\text{cittadini italiani}\}$, $Y = \{\text{comuni italiani}\}$ $f(x) =$il comune dove x è nato.
    (b) $X = \{\text{esseri umani viventi}\}$, $Y = \{\text{nazioni}\}$ $f(x) =$il paese di cui x ha la cittadinanza.
14. Funzioni iniettive e funzioni suriettive.

Lezione 30/09, 11-13 aula EF4

1. Sia $f : X \to Y$, $A \subset X$, $f(A)$.
2. $\mathrm{Im}\, f := f(X)$.
3. $f^{-1}(B)$ se $B \subset Y$.
4. Se $B = \{y\}$ si scrive semplicemente $f^{-1}(y)$.
5. $\forall, \exists, \exists!$.
6. $f : X \to Y$ è suriettiva se $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$.
7. $f : X \to Y$ è iniettiva se $\forall y \in Y, f^{-1}(y)$ contiene al più un elemento.
8. Funzioni biunivoche. $f : X \to Y$ è suriettiva se $\forall y \in Y, \exists! x \in X : f(x) = y$.
9. Funzione inversa.
10. Proprietà della somma e del prodotto in $\mathbb{Q}$ e in $\mathbb{R}$.

Esercitazione 01/10: 11-13, aula EF4

1. Vettori applicati nel piano.
2. Il vettore nullo è il segmento degenere uscente dall'origine.
3. Un vettore non nullo è caratterizzato da direzione, verso e lunghezza.
4. Se $v \in \mathbb{E}^2_O$, indichiamo con $||v||$ la sua lunghezza.
5. Se P è il punto finale di$v \in \mathbb{E}^2_O$, scriviamo $v = \vec{OP}$.
6. L'applicazione che associa ad un punto P del piano il vettore $\vec{OP}$ è una applicazione biunivoca del piano su $\mathbb{E}^2_O$.
7. Somma di vettori: costruzione con il parallelogramma.
8. La somma di vettori è commutativa e associativa, il vettore nullo è un elemento neutro e per ogni vettore v esiste un unico vettore v' tale che $v + v' = \vec{0}$. Il vettore v' viene indicato con $-v$.
9. Prodotto per uno scalare. Proprietà.
10. Vettori applicati nello spazio e operazioni su di essi.
11. Spazio generato da 1 vettore o da due vettori.
12. Se $\vec{v}$ è un vettore, il simbolo $||v||$ indica la sua lunghezza.

Lezione 5/10, 11-13 aula EF1

1. Sia $\mathcal{E}$ l'insieme formato da tutti i punti dello spazio. Fissiamo un punto $O \in \mathcal{E}$. L'applicazione
$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{E}^3_O, \quad f(P) := \vec{OP},$$
è una applicazione biunivoca. L'applicazione inversa $f^{-1} : \mathbb{E}^3_O \to \mathcal{E}$ è l'applicazione che associa al vettore $\vec{v}$ il suo punto finale. Dunque $f^{-1}(v) = O + \vec{v}$.

2. Dati r vettori $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ poniamo
$$\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_r) = \{\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_r\vec{v}_r).$$

3. Varie possibilità se $r = 1$ e $r = 2$.

4. Definizione di indipendenza lineare per $r = 1, 2, 3$: se $r = 1$, dico che $\vec{v}_1$ è linearmente indipendente se $\vec{v}_1 \neq 0$.

5. Se $r = 2$, dico che i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono linearmente indipendenti se sono entrambi diversi dal vettore nullo e $\vec{v}_2 \notin \mathrm{Span}(\vec{v}_1)$

6. Intepretazione geometrica: sia $r = 1, 2$ o 3. Siano $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ vettori linearmente indipendenti. Sia
$$\mathcal{S} := \{P \in \mathcal{E} : \vec{OP} \in \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r).$$
Allora se $r = 1$ $\mathcal{S}$ è una retta, se $r = 2$ è un piano, se $r = 3$ $\mathcal{S} = \mathcal{E}$.

7. Basi, riferimenti cartesiani.

8. Equazione parametrica vettoriale della retta.

Esercitazione 7/10, 11-13, aula EF4

1. Precisazioni sulla definizione di vettori linearmente indipendenti.

2. Assegnata una base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ di $\mathbb{E}^3_O$, la funzione
$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{E}, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3$$
è biunivoca.

3. Basi ortonormali. Riferimenti cartesiani ortonormali.

4. Assi coordinati. Piani coordinati.

5. Equazione parametrica vettoriale del piano.

6. Equazione parametrica del piano in coordinate.

7. Equazione parametrica del piano passante per 3 punti non allineati.

8. Equazione parametrica della retta in coordinate.

Lezione 8/10, 11-13, aula EF4

1. Fissiamo una base di $\mathbb{E}^3_O$. Se $\vec{v}$ ha componenti (x, y, z) e $\vec{v}'$ ha componenti (x', y', z'), allora $\vec{v} + \vec{v}'$ ha componenti $(x + x', y + y', z + z')$.

2. Proiezione ortogonale: se $\vec{u} \neq 0$, $L = \text{Span}(u)$ e $L^\perp = \{$vettori ortogonali a $\vec{u}\}$, allora dato un vettore $\vec{v}$ esistono $\vec{v}_1 \in L$ e $\vec{v}_2 1 \in L^\perp$ tali che $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. I vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono unici. Il vettore $\vec{v}_1$ è (per definizione) la proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su L.

3. La proiezione della somma è la somma delle proiezioni.

4. Angolo convesso fra due vettori non nulli.

5. Definizione di prodotto scalare.

6. Se $||\vec{u}|| = 1$, allora la proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su $\text{Span}(\vec{u})$ è $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{u}$.

7. Proprietà del prodotto scalare:
$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle,$$
$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \cdot \langle u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle,$$
$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle.$$

8. Data una base ortonormale se $\vec{v}$ ha componenti (x, y, z) e $\vec{v}'$ ha componenti (x', y', z'), allora $\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle = xx' + yy' + zz'$.

9. $||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

10. Formule per la lunghezza di un vettore e l'angolo fra due vettori in coordinate rispetto a una base ortonormale.

Lezione 12/10, 11-12, aula EF1

1. $\vec{AB} := \vec{OB} - \vec{OA}$.

2. $A + \vec{AB} = B$.

3. La distanza fra i punti A e B è il numero $d(A, B) = ||\vec{AB}||$.

4. Se in un riferimento cartesiano ortonormale A ha coordinate (x_A, y_A, z_A) e B ha coordinate (x_B, y_B, z_B), allora
$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_B)^2}.$$

5. Traslazione di vettore $\vec{v}$.

6. Se r è una retta e $\vec{v}$ è un vettore, allora $T_{\vec{v}}(r)$ è ancora una retta, parallela ad r e la indichiamo con $r + \vec{v} := T_{\vec{v}}(r)$.

7. Sia r una retta nel piano. Fissiamo $P_0 \in r$ e sia $\vec{v} := \vec{OP_0}$. Sia r' la retta passante per l'origine parallela ad r. Allora $r = r' + \vec{v}$.

8. Fissiamo un riferimento cartesiano ortonormale $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ nel piano. Sia r una retta nel piano. Allora esistono numeri $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $(a, b) \neq (0, 0)$ e tali che un punto di coordinate (x, y) appartiene ad r se e solo se $ax + by + c = 0$. Il vettore $\vec{n} := a\vec{i} + b\vec{j}$ è non nullo e perpendicolare alla retta.

9. Viceversa assegnati numeri reali a, b, c tali che $(a, b) \neq (0, 0)$ l'equazione $ax + by + c = 0$ definisce una retta nel piano perpendicolare al vettore $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

10. Sia π un piano nello spazio. Fissiamo $P_0 \in \pi$ e sia $\vec{v} := \vec{OP_0}$. Sia π' il piano passante per l'origine parallelo a π. Allora $\pi = \pi' + \vec{v}$.

11. Fissiamo un riferimento cartesiano ortonormale $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nello spazio. Sia π un piano nello spazio. Allora esistono numeri $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ e tali che un punto di coordinate (x, y, z) appartiene a π se e solo se $ax + by + cz + d = 0$. Il vettore $\vec{n} := a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ è non nullo e perpendicolare al piano.

12. Viceversa assegnati numeri reali a, b, c, d tali che $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ l'equazione $ax + by + cz + d = 0$ definisce una retta nel piano perpendicolare al vettore $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Esercitazione 12/10, 12-13, aula EF1

1. Passaggio dall'equazione parametrica all'equazione cartesiana per un piano nello spazio.

2. Viceversa.

3. Posizione reciproche di due piani nello spazio: siano $\pi = \{ax+by+cz+d = 0\}$ e $\pi' = \{a'x + b'y + c'z + d' = 0\}$ i due piani. Allora
   - i due piani sono coincidenti, ossia $\pi = \pi'$, se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' = \lambda c, d = \lambda d$.
   - I due piani sono paralleli e distinti se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' = \lambda c$, però $d \neq \lambda d$. In questo caso $\pi \cap \pi' = \varnothing$.
   - Se non esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' = \lambda c$, allora i due piani si intersecano in una retta e sono detti incidenti.

Lezione 14/10, 11-12, aula EF4

1. Equazione cartesiana di una retta nello spazio.

2. Posizione reciproca di due rette nello spazio.

3. Distanza punto–piano.

4. Distanza punto–retta.

Esercitazione 14/10, 12-13, aula EF4

1. Esercizi di geometria analitica.

Lezione 15/10, 11-13, aula EF4

1. Spazi vettoriali astratti.
2. Esempi: $\mathbb{E}^3_O$, $\mathbb{R}^n$, V =l'insieme di tutte le funzioni dall'intervallo $[0,1]$ a $\mathbb{R}$.
3. Conseguenze degli assiomi di spazio vettoriale:
   - legge di cancellazione;
   - $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$;
   - $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$;
   - $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$;
   - se $\lambda \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, allora $\lambda \cdot \vec{v} \neq \vec{0}$;
   - se $\vec{v} \neq \vec{0}$, allora da $\alpha \cdot \vec{v} = \beta \cdot \vec{v}$ segue $\alpha = \beta$.
4. Definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale astratto.
5. Sottospazi vettoriali di $\mathbb{E}^3_O$.
6. Un sottospazio vettoriale contiene sempre il vettore nullo.
7. Esempi di sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$.

Lezione 19/10, 11-13, aula EF1

1. Notazione di sommatoria: $\sum_{i=1}^{n} a_i$.
2. Equazioni lineari omogenee in $\mathbb{R}^n$.
3. L'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
4. Intersezione e somma di sottospazi.
5. L'unione di due sottospazi in generale non è un sottospazio.
6. L'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
7. Combinazioni lineari.
8. Spazio generato dai vettori $v_1, \ldots, v_n$: $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n)$.

Esercitazione 21/10, 11-13, aula EF4

1. Esempi di spazi generati da vettori in $\mathbb{R}^n$.
2. Spazi finitamente generati.
3. Lo spazio vettoriale dei polinomi. Grado e somma i polinomi.

Lezione 22/10, 11-13, aula EF4

1. Lo spazio vettoriale dei polinomi non è finitamente generato.
2. Divisione di polinomi. Radici. Teorema di Ruffini. Molteplicità di una radice.
3. Ogni polinomio reale non nullo p si scompone come $p = \lambda \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$ e ciascun p_i è o un polinomio monico di grado 1, oppure un polinomio monico di grado 2 con $\Delta < 0$.
4. Vettori linearmente indipendenti.
5. Sia $L = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Allora la lista L è linearmente indipendente se e soltanto se vale la proprietà seguente: se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$, allora $\lambda = \mu$.
6. Sia $L = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Allora la lista L è linearmente indipendente se e soltanto se vale la proprietà seguente: se $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$, allora $\lambda = (0, \ldots, 0)$.
7. Sia $L = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Allora la lista L è linearmente indipendente se e soltanto se valgono le proprietà seguenti:
$$\begin{cases} v_1 \neq 0, \\ v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1), \\ v_3 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2), \\ \cdots \\ v_n \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}). \end{cases}$$
8. Basi di uno spazio vettoriale.
9. Se V è uno spazio vettoriale $V \neq \{0\}$ e $V = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n)$, allora è possibile estrarre da $L = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V.

Lezione 26/10, 11-13, aula EF1

1. Coordinate di un vettore rispetto ad una base: $[v]_{\mathcal{B}}$.
2. Se aggiungo o tolgo vettori ad una base il risultato non è più una base.
3. Lemma dello scambio.

4. Se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V e $L = \{z_1, \ldots, z_k\}$ è una lista di vettori linearmente indipendente, allora posso sostituire i vettori $\{z_1, \ldots, z_k\}$ ad k opportuni vettori di $\mathcal{B}$. Pertanto $k \leq n$.

5. Teorema della Base: se V è uno spazio vettoriale finitamente generato o $V = \{0\}$, oppure tutte le basi contengono lo stesso numero di elementi.

6. Definizione di dimensione.

7. Base canonica di $\mathbb{R}^n$. Se $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, allora $[x]_{\mathcal{C}} = x$.

8. Lo stesso vettore ha coordinate diverse rispetto a basi diverse.

   e

9. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia L è una lista di vettori di V. Allora

   a) Se L è linearmente indipendente, allora $|L| \leq n$ (il simbolo $|L|$ indica il numero di elementi che appartanegono ad L).

   b) se $|L| = n$ ed L è linearmente indipendente, allora L è una base di V.

   c) se $|L| = n$ ed L è un sistema di generatori di V, allora L è una base.

   d) Se L è un sistema di generatori, allora $|L| \geq n$.

Lezione 28/10, 11-13, EF4

1. Se W è un sottospazio di V e V ha dimensione n, allora W è finititamente generato e $\dim W \leq n$. Se $\dim W = n$, allora $W = V$.

2. Base delle somma di due sottospazi.

3. Formula di Grassmann.

4. Se W, Z sono sottospazi di V, allora $\dim W \cap Z \geq \dim W + \dim Z - \dim V$.

5. Somma diretta di due sottospazi.

6. Somma diretta di tre o più sottospazi.

Esercitazione 29/10, 11-13, EF4

1. Matrici $m \times n$, colonne A^j, righe A_i, elementi di posto (i, j), $A = (a_{ij})$.

2. $M(m, n)$ è uno spazio vettoriale. $\{E_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ è una base. $\dim M(m, n) = mn$.

3. Se

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

definisco

$$A \cdot X := x_1 A^1 + \cdots x_n A^n.$$

4. Se A è $m \times n$ e B è $n \times k$ definisco

$$A \cdot B := (AB^1 | \cdots | AB^n).$$

5. Siano $A \in M(m,n)$ e $B \in M(n,k)$ e sia $C = A \cdot B$. Allora

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{a} ikb_{kj} = A_i B^j.$$

Per questo motivo si chiama prodotto righe per colonne.

6. Siano $A, B \in M(m,n)$ e $C \in M(n,k)$. Allora $(A+B)C = AC + BC$.

Lezione 2/11, 11-13, aula EF1

1. $Ae_j = A^j$.
2. $A(X+Y) = AX + AY$, $A(\lambda X) = \lambda AX$,$A0 = 0$, $0_{m\times n}X = 0$.
3. $A(B+C) = AB + AC$.
4. $(AB)C = A(BC)$.
5. In generale $AB \neq BA$.
6. Matrice identica I_n.
7. Potenze di una matrice quadrata.
8. Matrici invertibili.
9. Se $A \in M(n)$ è invertibile, allora le colonne di A sono linearmente indipendenti.
10. Se $A \in M(n)$ è invertibile, allora per ogni $B \in \mathbb{R}^n$ il sistema lineare

$$AX = B,$$

ha una soluzione unica: $X = A^{-1}B$.

11. Se $A \in M(n)$, allora le colonne di A sono linearmente indipendenti se e soltanto se il sistema lineare omogeneo $AX = 0$ ha solo la soluzione $X = 0$.

Esercitazione 4/11, 11-13, aula EF4

1. Se le colonne di A sono linearmente indipendenti, allora esiste una matrice $B \in M(n)$ tale che $AB = I_n$. Infatti $\mathscr{B} := \{A^1, \dots, A^n\}$ è una base e le colonne della matrice B sono $B^j := [e_j]_{\mathscr{B}}$.

2. $A \in M(N)$ è invertibile se e soltanto se le sue colonne formano una base se e soltanto se l'unica soluzione del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ è $X = 0$, se e soltanto se per ogni $B \in \mathbb{R}^n$ il sistema lineare $AX = B$ ha una unica soluzione.

3. Definizione di $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Se $A, B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, e allora $AB \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Inoltre $A^{-1} \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ e $(A^{-1})^{-1} = A$ e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4. Se $AB \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, allora anche $A, B \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.

5. Se $n > 1$ può succedere che due matrici $A, B \in M(n)$ siano entrambe non nulle e che invece $AB = 0$.

6. Definizione induttiva del determinante tramite lo sviluppo di Laplace secondo la prima colonna.

7. Si può sviluppare anche secondo una colonna qualsiasi o secondo una riga qualsiasi. Lo sviluppo di Laplace secondo la j-esima colonna è
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$
Lo sviluppo di Laplace secondo la k-esima riga è
$$\det A = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+k} a_{kh} \det A_{kh}.$$

8. Matrici triangolari superiori e inferiori. Il loro determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

9. $\det I_n = 1$.

10. Sia $A = (A^1|A^2|A^3|\cdots|A^n) \in M(n)$. Allora
$$\det(A^2|A^1|A^3|\cdots|A^n) = -\det A.$$

Lezione 5/11, 11-13, aula EF4

1. Proprietà del determinante:
   (a) Scambiando due colonne il determinante cambia di segno.
   (b) $\det(\lambda A^1|A^2|\cdots|A^n) = \lambda \cdot \det A$.
   (c) $\det(C_1 + C_2|A^2|\cdots|A^n) = \det(C_1|A^2|\cdots|A^n) + \det(C_2|A^2|\cdots|A^n)$.

(d) Se $A^j = 0$, allora $\det A = 0$.
(e) Se $A^i = A^j$ e $i \neq j$, allora $\det A = 0$.
(f) Se $A^i = \lambda A^j$ e $i \neq j$, allora $\det A = 0$.
(g) Se le colonne di A sono linearmente dipendenti, allora $\det A = 0$.

2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$.

3. Teorema di Binet (senzqa dimostrazione).

4. Una matrice $n \times n$ A è invertibile se e soltanto se $\det A \neq 0$.

5. Se $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, allora $A^{-1} \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ e
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

6. Se $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ e $B \in M(n)$, allora le matrici B e ABA^{-1} sono dette coniugate.

7. Matrici coniugate hanno lo stesso determinante.

8. Teorema di Cramer (senza dimostrazione).

9. Trasposta di una matrice.

10. $(AB)^T = B^T A^T$.

11. Se $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, allora $A^T \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

12. Matrici simmetriche.

13. $\det(A^T) = \det A$ (senza dimostrazione).

14. Tutte le proprietà del determinante valgono per le righe oltre che per le colonne.

15. In generale $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

16. Regola fondamentale. Sia A una matrice quadrata e siano $i < j$ due indici. Sia A' la matrice ottenuta da A sostituendo alla colonna A^i la colonna $A^i + \lambda A^j$. Allora $\det A' = \det A$. Stesso discorso per le righe.

17. Matrici a blocchi. Siano $B \in M(p), C \in M(q)$, $D \in M(p, q)$ e sia
$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \in M(p + q).$$
Allora $\det A = \det B \cdot \det C$.

Lezione 9/11, 11-13, aula EF1

1. Sia $A \in M(m,n)$. Allora $\mathrm{rg}(A) := \dim \mathrm{Span}(A^1, \ldots, A^m)$.
2. $0 \le \mathrm{rg}(A) \min(m,n)$.
3. $\mathrm{rg}(A) = m$ se e solo se $A^1, \ldots, A^n$ generano $\mathbb{R}^m$.
4. $\mathrm{rg}(A) = n$ se e solo se $A^1, \ldots, A^n$ sono linearmente indipendenti.
5. Se scambio due colonne della matrice il rango non cambia.
6. Se sommo a una colonna un multiplo di un'altra colonna, il rango non cambia.
7. Se $m = n$, allora $\mathrm{rg}(A) = n$ se e solo se $\det A \neq 0$ se e solo se $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.
8. Sottomatrici e minori.
9. Sia A una matrice e supponiamo che le colonne di A siano linearmente dipendenti: dunque esiste $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tale che $\lambda_1 A^1 + \cdots + \lambda_n A^n = 0$. Sia B la matrice ottenuta da A cancellando un certo numero di righe. Allora $\lambda_1 B^1 + \cdots + \lambda_n B^n = 0$, dunque le colonne di B rimangono linearmente dipendenti.
10. Sia $A' \subset A$ una sottomatrice quadrata $p \times p$ e sia $\det A' \neq 0$. Allora $p \le \mathrm{rg}(A)$. (Con dimostrazione.)
11. Se $r = \mathrm{rg}(A)$, allora esiste un minore non nullo di A di ordine r. (Senza dimostrazione.)
12. Sia
$$r_{MAX}(A) := \max\{p : \exists \text{ una sottomatrice } A' \subset A \text{ di ordine } p \text{ tale che } \det A' \neq 0\}.$$
13. $r_{MAX}(A) = r_{MAX}(A^T)$.
14. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T) = \dim \mathrm{Span}(A_1, \ldots, A_m)$.
15. Rango di una matrice dipendente da un parametro.

Lezione 11/11, 11-13, aula EF4

1. Sistemi lineari risolubili (o compatibili).
2. Matrice completa $\tilde{A} := (A|B)$.
3. Teorema di Rouché-Capelli: il sistema $AX = B$ è risolubile se e solo se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\tilde{A})$.
4. Sistemi equivalenti.

5. Equazioni superflue.

6. Operazioni sulle equazioni che portano a un sistema equivalente. Corrispondenti operazioni sulle colonne. Siano $B \in M(r)$ e $C \in M(r, n-r)$ $y \in \mathbb{R}^r$ e $z \in \mathbb{R}^{n-r}$. Poniamo

$$A = \begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix},$$

   Allora $AX = By + Cz$.

7. Sia A una matrice $m \times n$. Allora $S := \{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e $\dim S = n - \mathrm{rg}(A)$.

8. Sottospazi affini (o traslati).

9. Se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e $S = x_0 + W$, allora $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x - x_0 \in W\}$. Il sottospazio vettoriale W è chiamato la *giacitura* di S.

10. La dimensione di $S = x_0 + W$ è per definizione uguale alla dimensione di W.

11. Sia A una matrice $m \times n$; e sia $B \in \mathbb{R}^n$. Allora l'insieme $S := \{X \in \mathbb{R}^n : AX = B\}$ o è vuoto oppure è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ e $\dim S = n - \mathrm{rg}(A)$. In quest'ultimo caso la giacitura di S è il sottospazio $W = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0\}$, cioè lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo corrispondente.

Esercitazione 12/11, ore 11-13, EF4

1. Formula di Cramer: se $\det A \neq 0$ la soluzione di $AX = B$ è

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad x_i = \frac{\det(A^1|\cdots|B|\cdots|A^n)}{\det A}.$$

2. Sistemi quadrati non singolari. Risoluzione all'indietro di sistemi triangolari. Riduzione di un sistema quadrato non singolare alla forma triangolare mediante operazioni elementari sulle righe della matrice completa.

3. Le operazioni elementari sulle righe o sulle colonne di una matrice non cambiano il rango della matrice.

4. Matrici a scala. Pivot. Rango di una matrice a scala.

5. Risoluzione di un sistema lineare in cui la matrice dei coefficienti è a scala. I parametri sono esattamente le variabili corrispondenti alle colonne che non contengono i pivot.

6. Metodo di Gauss per la riduzione alla scala.

7. Esercizi.

Esercitazione 18/11, ore 11-13 in EF4

1. Criterio degli orlati di Kronecker (senza dimostrazione).
2. Equazioni di un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^n$.
3. Come trovare una base di $W = \text{Span}(v_1, \ldots, v_s)$ mediante la riduzione a scala.
4. Matrice del cambiamento di base.
5. Esercizi sul metodo di Gauss e sui sistemi lineari con parametro.

Lezione 19/11, 11-13 in aula EF4

1. Applicazioni lineari in $\mathbb{R}^n$.
2. Ad ogni matrice $m \times n$ è associata una applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
3. Applicazioni lineari $L : V \to W$.
4. Le due definizioni date nel caso di applicazioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ coincidono.
5. Una applicazione lineare manda combinazioni lineari in combinazioni lineari: $L(\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_k v_k) = \lambda_1 L(v_1) + \cdots \lambda_k L(v_k)$.
6. Traccia di una matrice quadrata.
7. Se $L : V \to W$ è lineare e $U \subset V$ è un sottospazio di V, allora $L(U)$ è un sottospazio di W. In particolare $L(V) = \operatorname{Im} L$ è un sottospazio.
8. Se $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una applicazione lineare, allora $\operatorname{Im} L_A = \text{Span}(A^1, \ldots, A^n)$ e $\dim \operatorname{Im} L_A = \operatorname{rg} A$.
9. Nucleo di una applicazione lineare. È un sottospazio.
10. $\ker L_A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$.
11. Teorema delle dimensioni (o teorema nullità più rango), senza dimostrazione.
12. Dimostrazione del teorema delle dimensioni nel caso di $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
13. $L : V \to W$ è iniettiva se e solo se $\ker L = \{0\}$.
14. $L : V \to W$ è suriettiva se e solo se $\operatorname{Im} L = W$ (questa è la definizione).
15. $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è suriettiva se e solo se $\operatorname{rg} A = m$.
16. $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è iniettiva se e solo se $\operatorname{rg} A = n$.
17. Se V e W sono spazi vettoriali finitamente generati della stessa dimensione, allora una applicazione lineare $L : V \to W$ è iniettiva se e solo se è suriettiva se e solo se è biunivoca.

18. Se A è quadrata di ordine n, allora $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva se e solo se è suriettiva se e solo se è biunivoca se e solo se $\operatorname{rg} A = n$.

19. Se $\{v_i\}$ sono linearmente dipendenti e $L : V \to W$ è lineare, allora $\{L(v_i)\}$ sono linearmente dipendenti.

20. Può succedere che $\{v_i\}$ siano linearmente indipendenti in V e che $\{L(v_i)\}$ siano linearmente dipendenti in W.

Esercitazione 25/11

1. Se V e W sono spazi vettoriali e $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V allora dati vettori $w_1, \dots, w_n \in W$ esiste una ed una sola applicazione lineare $L : V \to W$ tale che $L(v_i) = w_i$ per $i = 1, \dots, n$.

2. Una applicazione lineare iniettiva $L : V \to W$ manda liste di vettori linearmente indipendenti in V in liste di vettori linearmente indipendenti in W.

3. L'immagine di una base di V è una base di $\operatorname{Im} L$.

4. Isomorfismi.

5. $L : V \to w$ è un isomorfismo se e solo se manda basi di V in basi di W.

6. Spazi isomorfi hanno la stessa dimensione.

7. L'applicazione $[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$ che associa ad un vettore le sue coordinate nella base $\mathcal{B}$ è un isomorfismo.

8. Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e soltanto se hanno la stessa dimensione.

9. Matrice associata ad una applicazioni lineari rispetto a certe basi.

Lezione 26/11

1. Matrice associata a una applicazione lineare e vettori coordinate.

2. Rotazioni di angolo θ nel piano e matrici associate.

3. Matrice associata all'identità in basi diverse e matrice del cambiamento di base.

4. Determinazione di $\ker L :$ e $\operatorname{Im} L$ sfruttando la matrice associata ad L.

5. Relazione fra le matrici associate ad L rispetto a due coppie distinte di basi: $B = M^{-1}AN$.

Esercitazione 2/12

1. Matrici simili.

2. Sia $L : V \to V$ un'applicazione lineare. Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' := \{v'_1, \dots, v'_n\}$ due basi di V. Sia A la matrice associata ad L nella base $\mathcal{B}$ e sia A' la matrice associata ad L nella base $\mathcal{B}'$. Sia $M = (m_{ij})$ la matrice tale che

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} v_i.$$

   Allora

$$A' = M^{-1} A M.$$

   Dunque matrici simili rappresentano la stessa applicazione lineare rispetto a basi diverse.

3. Rango, determinante e traccia di matrici simili sono uguali.

4. Autovalori, autovettori, spettro.

5. Autospazi.

6. Polinomio caratteristico.

7. Il polinomio caratteristico di due matrici simili è lo stesso.

8. Se A è triangolare e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono i coefficienti sulla diagonale, allora $p_A(t) = (\lambda_1 - t) \cdots (\lambda_n - t)$.

Esercitazione 3/12

1. Molteplicità geometrica di un autovalore.

2. Una matrice è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale (per definizione).

3. Una matrice A è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

4. Un operatore lineare $L : V \to V$ è diagonalizzabile se esiste una base di V formata da autovettori (definizione).

5. L è diagonalizzabile se e solo se esiste una base $\mathcal{B}$ tale che la matrice associata ad L sia diagonale.

6. La matrice A è diagonalizzabile se e solo se è diagonalizzabile l'operatore $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

7. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono autovalori di L allora

$$k \leq m(\lambda_1) + \cdots + m(\lambda_k) \leq n.$$

8. Sia $L : V \to V$ un operatore lineare e sia $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ il suo spettro. Allora L è diagonalizzabile se e soltanto se

$$m(\lambda_1) + \cdots + m(\lambda_k) = n.$$

9. Se A è $n \times n$ ha n autovalori distinti, allora è diagonalizzabile.

Esercitazione 14/12, ore 9-11

1. Prodotto scalare (standard) su $\mathbb{R}^n$. È bilineare, simmetrico, definito positivo.

2. Norma. Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz. Caratterizzazione dell'uguaglianza nella disguaglianza di Cauchy-Schwarz.

3. Diseguaglianza triangolare. Distanza. Angolo fra due vettori non nulli in $\mathbb{R}^n$.

4. Vettori ortogonali in $\mathbb{R}^n$.

5. Sistemi ortogonali e ortonormali.

Lezione 16/12, ore 11-13

1. Basi ortogonali e ortonormali.

2. Coefficienti di Fourier.

3. Se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ è una base ortogonale di $V \subset \mathbb{R}^n$, allora le coordinate di un vettore $x \in V$ nella base $\mathcal{B}$ sono i coefficienti di Fourier di x.

4. Se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è un sistema ortogonale di vettori di $\mathbb{R}^n$, definiamo

$$p_{v_1,\ldots,v_k} : \mathbb{R}^n \to V, \quad p_{v_1,\ldots,v_k}(x) := \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle x, v_i \rangle}{||v_i||^2} v_i.$$

   Allora $p_{v_1,\ldots,v_k}(x) \in V$ e $x - p_{v_1,\ldots,v_k}(x)$ è ortogonale a ciascuno dei vettori $v_1, \ldots, v_k$.

5. Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

6. Se $V \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio, poniamo

$$V^{\perp} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v \rangle = 0, \forall v \in V\}.$$

   Allora $V^{\perp}$ è un sottospazio e $V \oplus V^{\perp} = \mathbb{R}^n$.

Lezione 17/12, 11-13

1. Se $x \in \mathbb{R}^n$ esistono due vettori $x' \in V$ e $x'' \in V^\perp$ tali che $x = x' + x''$. Tali vettori sono unici. x' è la *proiezione ortogonale* di x su V. Se $\{u_1, \ldots, u_k\}$ è una base ortonormale di V, allora

$$x' = p_{u_1,\ldots,u_k}(x).$$

2. Teorema di Pitagora generalizzato.

3. Matrici ortogonali. Una matrice M è ortogonale se e solo se le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ se e solo se l'applicazione $L_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conserva il prodotto scalare.

4. Classificazione delle matrici ortogonali 2×2.

5. Diagonalizzazione mediante matrice ortogonale. Una matrice A è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale se e solo se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata di autovettori di A.

6. Se A è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, allora A è simmetrica: $A^T = A$.

7. Teorema spettrale: se A è simmetrica, allora A è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, ossia esiste una base ortonormale formata da autovettori di A.

8. Se A è simmetrica e λ_1, λ_2 sono due autovalori distinti di A, allora $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$ (cioè ogni elemento di V_{λ_1} è ortogonale a ciascun elemento di V_{λ_2}).

Lezione 7/1/2016, ore 11-13

1. Forme quadratiche. Matrice di una forma quadratica.

2. Studio della positività: forme quadratiche definite positive, definite negative, semidefinite positive, semidefinite negative, indefinite.

3. Forma canonica di una forma quadratica.

4. Positività di forme quadratiche diagonali.

5. Studio della positività di forme quadratiche qualsiasi mediante il calcolo degli autovalori della matrice associata.

6. Criterio dei minori incapsulati per stabilire se una forma è definita positiva.

Esercitazione 13/1, 11-13

1. Esercizio sulle forme quadratiche.

2. Svolgimento di un tema d'esame.