Geometria e Algebra Appello del 18 febbraio 2020

☐ **0**	☐ **0**	☐ **0**	☐ **0**	☐ **0**	☐ **0**
☐ **1**	☐ **1**	☐ **1**	☐ **1**	☐ **1**	☐ **1**
☐ **2**	☐ **2**	☐ **2**	☐ **2**	☐ **2**	☐ **2**
☐ **3**	☐ **3**	☐ **3**	☐ **3**	☐ **3**	☐ **3**
☐ **4**	☐ **4**	☐ **4**	☐ **4**	☐ **4**	☐ **4**
☐ **5**	☐ **5**	☐ **5**	☐ **5**	☐ **5**	☐ **5**
☐ **6**	☐ **6**	☐ **6**	☐ **6**	☐ **6**	☐ **6**
☐ **7**	☐ **7**	☐ **7**	☐ **7**	☐ **7**	☐ **7**
☐ **8**	☐ **8**	☐ **8**	☐ **8**	☐ **8**	☐ **8**
☐ **9**	☐ **9**	☐ **9**	☐ **9**	☐ **9**	☐ **9**

$\longleftarrow$ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...) pena l'esclusione. Le domande con il segno ♣ possono avere <u>una</u> o <u>più</u> risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

....

....

Domanda [`grassmannnewA`] Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$ con $\dim U = 4$ e $\dim W = 4$. Quale delle seguenti affermazioni è *necessariamente* vera?

- ☐ $U \oplus W = \mathbb{R}^8$.
- ☐ $\dim(U + W) \leq 5$.
- ☐ $\dim U \cap W \geq 1$.
- ■ Se $U \subset W$, allora $\dim(U + W) = 4$.

Domanda [`grassmannnewB`] Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^7$ con $\dim U = 4$ e $\dim W = 4$. Quale delle seguenti affermazioni è *necessariamente* vera?

- ☐ U e W sono in somma diretta.
- ☐ $\dim(U + W) \leq 5$.
- ■ $\dim U \cap W \geq 1$.
- ☐ Se $U + W = \mathbb{R}^7$, allora $\dim(U \cap W) \geq 2$.

Domanda [`grassmannnewC`] Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$ con $\dim U = 2$ e $\dim W = 5$. Quale delle seguenti affermazioni è *necessariamente* vera?

- ☐ U e W sono in somma diretta.
- ☐ $\dim(U + W) = 7$.
- ☐ $\dim U \cap W \leq 1$.
- ■ Se $\dim(U \cap W) = 2$, allora $U + W = W$.

Domanda [`grassmannnewD`] Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^7$ con $\dim U = 2$ e $\dim W = 5$. Quale delle seguenti affermazioni è *necessariamente* vera?

- ■ Se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, allora $U + W = \mathbb{R}^7$.
- ☐ $\dim(U + W) \leq 3$.
- ☐ $\dim U \cap W \geq 2$.
- ☐ Se $\dim(U + W) = 4$, allora $U \subset W$.

Domanda [`sistemalineareA`] Sia $AX = B$ un sistema lineare di k equazioni in n incognite. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ Se il sistema ha infinite soluzioni allora $\operatorname{rg} A = n$.
- ☐ Se $\operatorname{rg} A = n$ allora il sistema ha un'unica soluzione.
- ☐ Se $k < n$, esiste almeno una soluzione.
- ■ Se $B = \mathbf{0}$ e $\operatorname{rg}(A) < n$ esiste almeno una soluzione non banale.

Domanda [`sistemalineareB`] Sia $AX = B$ un sistema lineare di k equazioni in n incognite. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- [x] Se il sistema ha infinite soluzioni, allora $\operatorname{rg} A < n$.
- [ ] Se $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B)$, allora il sistema ha un'unica soluzione.
- [ ] Se $B = \mathbf{0}$, allora il sistema ammette solo la soluzione banale $X = \mathbf{0}_n$.
- [ ] Se $B = \mathbf{0}$ e $\operatorname{rg} A$ è massimo, allora il sistema ammette un'unica soluzione.

Domanda [`sistemalineareC`] Sia $AX = B$ un sistema lineare di k equazioni in n incognite. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- [ ] Se $B \in \operatorname{Span}(A^1, \ldots, A^n)$ e $B \neq \mathbf{0}$, allora il sistema non ha soluzioni.
- [x] Se il sistema ammette una sola soluzione soluzione allora $\operatorname{rg} A = n$.
- [ ] Se $k = n$ allora il sistema ha un'unica soluzione.
- [ ] Se il sistema è risolubile allora $\operatorname{rg} A = n$.

Domanda [`sistemalineareD`] Sia $AX = B$ un sistema lineare di k equazioni in n incognite. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- [ ] Se $B = \mathbf{0}$ e $\operatorname{rg} A = k$ allora il sistema ha solo la soluzione banale.
- [x] Se $B = \mathbf{0}$ e $\operatorname{rg} A < n$ allora il sistema ha infinite soluzioni.
- [ ] Se $k = n$ e $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B)$ il sistema ha un'unica soluzione.
- [ ] Se il sistema ha un'unica soluzione allora $k = n$.

Domanda [`matrixA`] Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- [ ] Non è possibile calcolare il prodotto $B^T A^T$.
- [ ] $(AB)_{2,1} = 8$.
- [x] $(AB)_{2,1} = 26$.
- [ ] $(AB)_{2,1} = 27$.

Domanda [`matrixB`] Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- [ ] La matrice $B^T A^T$ contiene 3 righe.
- [ ] $(AB)_{1,2} = 10$.
- [ ] $(AB)_{1,2} = 26$.
- [x] $(AB)_{1,2} = 27$.

Domanda [`matrixC`] Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- [ ] Il prodotto $B^T A$ contiene 2 righe.
- [ ] $(AB)_{1,2} = 4$.
- [ ] $(AB)_{1,2} = -21$.
- [x] $(AB)_{1,2} = -14$.

Domanda [`matrixD`] Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- [ ] Non è possibile calcolare il prodotto $B^T A$.
- [ ] $(AB)_{2,1} = -20$.
- [x] $(AB)_{2,1} = -21$.
- [ ] $(AB)_{2,1} = -14$.

Domanda [UorthmultiA] ♣ Sia $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \,|\, x + y - z + t = 0\}$. Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono corrette.

?

Comunque va bene.

- [ ] $\dim U = 1$
- [x] Non esistono 3 vettori linearmente indipendenti in $U^\perp$
- [ ] Span $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = U$
- [ ] $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ è una base di $U^\perp$

Domanda [UorthmultiB] ♣ Sia $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \,|\, x + y - z + t = 0\}$. Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono corrette.

?

- [x] $\dim U^\perp = 1$
- [ ] Non esistono 3 vettori linearmente indipendenti in U
- [ ] $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in U$
- [x] $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ è una base ortogonale di U ← NO

Domanda [UorthmultiC] ♣ Sia $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \,|\, x - y = z - t = x + 2z = 0\}$. Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono corrette.

- [x] $\dim U = 1$
- [ ] Non esistono 3 vettori linearmente indipendenti in $U^\perp$
- [ ] Span $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = U^\perp$
- [ ] $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \}$ è una base ortogonale di U

Domanda [UorthmultiD] ♣ Sia $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \,|\, x - y = z - t = x + 2z = 0 \}$. Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono corrette.

- ☐ $\dim U = 3$
- ☐ Non esistono 3 vettori linearmente indipendenti in U
- ■ Span $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = U$
- ■ $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ 2 \end{pmatrix} \}$ è una base di $U^\perp$

U o $U^\perp$?

Così sarebbe vera