| CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA | 2 febbraio 2022 |
|---|---|
| Cognome e Nome: | Matricola: |

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)**

Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} k+3 & -3k-6 & -k-3 & k+3 \\ 0 & 2k & k & k \\ -k-3 & 2k+6 & k+3 & k+3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5-k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

(b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0:

(d) Sia $k = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

| $k$ | rg $A$ | rg $\tilde{A}$ | $S \neq \emptyset$? | dim $S$ |
|---|---|---|---|---|
| -3 | 2 | 2 | sì | 2 |
| 0 | 2 | 3 | no | – |
| altrim. | 3 | 3 | sì | 1 |

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 2 \text{ se } k = -3, 0 \\ 3 \text{ se } k \neq 0, -3. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 0$, $\dim \mathrm{Sol} = 0$ mai. Soluzione per $k = 2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

---

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti $P_1$, $P_2$ e $P_3$ di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ passante per $P_1, P_2, P_3$:

(b) Determinare l'equazione parametrica della retta $r$ passante per $O$ e ortogonale a $\pi$:

(c) Determinare il punto di intersezione $Q$ di $r$ con $\pi$:

(d) Determinare la distanza di $O$ da $\pi$.

$$\pi : 2x + y - z - 1 = 0, \qquad r = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}, \qquad d(O,\pi) = d(O,Q) = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

---

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di $A$

(b) Determinare gli autovalori di $A$ specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di $A$.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile $N$ tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice $B$ che abbia lo stesso polinomio caratteristico di $A$ ma che non sia simile ad $A$.

(a) $p_A(x) = -(x^3 - 4x^2 + 4x)$

(b) Autovalori $\lambda = 2$ con $\mu = 2$, $m = 1$; $\lambda = 0$ con $\mu = m = 1$

(c) $V_2 = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_0 = \text{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) $A$ non è diagonalizzabile. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

---

| CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA | 2 febbraio 2022 |
|---|---|
| Cognome e Nome: | Matricola: |

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} 3k-6 & k-3 & -k+3 & 3 \\ -3k & -k & -k & -k-3 \\ -2k+6 & -k+3 & -k+3 & k-3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5-k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

(b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

| $k$ | rg $A$ | rg $\tilde{A}$ | $S \neq \emptyset$? | dim $S$ |
|---|---|---|---|---|
| (0 | 3 | 3 | sì | 1) |
| 3 | 2 | 2 | sì | 2 |
| altrim. | 3 | 3 | sì | 1 |

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 2 \text{ se } k = 3 \\ 3 \text{ se } k \neq 3. \end{cases}$$

Risolubile per ogni $k$. $\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 3$. Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

---

2. **(8pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti $P_1$, $P_2$ e $P_3$ di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ passante per $P_1, P_2, P_3$:

(b) Determinare l'equazione parametrica della retta $r$ passante per $O$ e ortogonale a $\pi$:

(c) Determinare il punto di intersezione $Q$ di $r$ con $\pi$:

(d) Determinare la distanza di $O$ da $\pi$.

$$\pi : x + 2y - z = 2, \qquad r = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \qquad d(O, \pi) = d(O, Q) = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

---

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di $A$

(b) Determinare gli autovalori di $A$ specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di $A$.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile $N$ tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice $B$ che abbia lo stesso polinomio caratteristico di $A$ ma che non sia simile ad $A$.

(a) $p_A(x) = -(x^3 - 12x^2 + 36x)$

(b) Autovalori $\lambda = 6$ con $\mu = 2$, $m = 1$; $\lambda = 0$ con $\mu = m = 1$

(c) $V_6 = \text{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_0 = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $A$ non è diagonalizzabile. $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

| CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA | 2 febbraio 2022 |
|---|---|
| Cognome e Nome: | Matricola: |

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3k-3 & -k & k \\ k+6 & 3k+9 & k+3 & k+3 \\ -k & 2k & k & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5-k \\ k+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

(b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

| $k$ | rg $A$ | rg $\tilde{A}$ | $S \neq \emptyset$? | dim $S$ |
|---|---|---|---|---|
| (-6 | 3 | 3 | sì | 1 ) |
| (-3 | 3 | 3 | sì | 1) |
| 0 | 2 | 3 | no | – |
| altrim. | 3 | 3 | sì | 1 |

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 2 \text{ se } k = 0 \\ 3 \text{ se } k \neq 0. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 0$, $\dim \mathrm{Sol} = 1$ per $k \neq 0$. Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -11/4 \\ 10 \\ -7/2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

---

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti $P_1$, $P_2$ e $P_3$ di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ passante per $P_1, P_2, P_3$:

(b) Determinare l'equazione parametrica della retta $r$ passante per $O$ e ortogonale a $\pi$:

(c) Determinare il punto di intersezione $Q$ di $r$ con $\pi$:

(d) Determinare la distanza di $O$ da $\pi$.

$$\pi : x + y + 2z = 3, \qquad r = t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R},$$

$$Q = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}, \qquad d(O,\pi) = d(O,Q) = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

---

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix}-6 & -1 & 5\\ 2 & -3 & -5\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di $A$

(b) Determinare gli autovalori di $A$ specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di $A$.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile $N$ tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice $B$ che abbia lo stesso polinomio caratteristico di $A$ ma che non sia simile ad $A$.

(a) $p_A(x) = -(x^3 + 8x^2 + 16x)$

(b) Autovalori $\lambda = -4$ con $\mu = m = 2$; $\lambda = 0$ con $\mu = m = 1$

(c) $V_{-4} = \text{Span}\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}$, $V_0 = \text{Span}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

(d) $N = \begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

---

| CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA | 2 febbraio 2022 |
|---|---|
| Cognome e Nome: | Matricola: |

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3k-2 & k-1 & -k+1 \\ -k-1 & -3k & -k & -k \\ k-1 & -2k+2 & -k+1 & -k+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5-k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

(b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

| $k$ | rg $A$ | rg $\tilde{A}$ | $S \neq \emptyset$? | dim $S$ |
|---|---|---|---|---|
| (-1 | 3 | 3 | sì | 1) |
| (0 | 3 | 3 | sì | 1) |
| 1 | 2 | 2 | sì | 2 |
| altrim. | 3 | 3 | sì | 1 |

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 2 \text{ se } k = 1 \\ 3 \text{ se } k \neq 1. \end{cases}$$

Risolubile per ogni $k$. $\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 1$. Soluzione per $k = 2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 11/6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2/3 \\ 5/3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

2. **(8pt)**

Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti $P_1$, $P_2$ e $P_3$ di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ passante per $P_1, P_2, P_3$:

(b) Determinare l'equazione parametrica della retta $r$ passante per $O$ e ortogonale a $\pi$:

(c) Determinare il punto di intersezione $Q$ di $r$ con $\pi$:

(d) Determinare la distanza di $O$ da $\pi$.

$$\pi : x + y + z = 2, \qquad r = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \qquad d(O, \pi) = d(O, Q) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

---

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ 5 & -2 & -3 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di $A$

(b) Determinare gli autovalori di $A$ specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di $A$.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile $N$ tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice $B$ che abbia lo stesso polinomio caratteristico di $A$ ma che non sia simile ad $A$.

(a) $p_A(x) = -(x^3 - 4x^2 + 4x)$

(b) Autovalori $\lambda = 2$ con $\mu = m = 2$; $\lambda = 0$ con $\mu = m = 1$

(c) $V_2 = \text{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $N = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

---