CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	2 febbraio 2022
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+3 & -3k-6 & -k-3 & k+3 \\ 0 & 2k & k & k \\ -k-3 & 2k+6 & k+3 & k+3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5-k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0:

(d) Sia $k = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. **(6 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_1, P_2, P_3:

   (b) Determinare l'equazione parametrica della retta r passante per O e ortogonale a π:

   (c) Determinare il punto di intersezione Q di r con π:

   (d) Determinare la distanza di O da π.

---

3. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**2 febbraio 2022**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 3k-6 & k-3 & -k+3 & 3 \\ -3k & -k & -k & -k-3 \\ -2k+6 & -k+3 & -k+3 & k-3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5-k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. **(6 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_1, P_2, P_3:

   (b) Determinare l'equazione parametrica della retta r passante per O e ortogonale a π:

   (c) Determinare il punto di intersezione Q di r con π:

   (d) Determinare la distanza di O da π.

---

3. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**2 febbraio 2022**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ $\boxed{\textbf{Scrivere in modo \underline{LEGGIBILE} nome e cognome!}}$ $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3k-3 & -k & k \\ k+6 & 3k+9 & k+3 & k+3 \\ -k & 2k & k & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5-k \\ k+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. **(6 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_1, P_2, P_3:

   (b) Determinare l'equazione parametrica della retta r passante per O e ortogonale a π:

   (c) Determinare il punto di intersezione Q di r con π:

   (d) Determinare la distanza di O da π.

---

3. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A

   (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**2 febbraio 2022**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3k-2 & k-1 & -k+1 \\ -k-1 & -3k & -k & -k \\ k-1 & -2k+2 & -k+1 & -k+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5-k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

2. **(6 pt)**

Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_1, P_2, P_3:

(b) Determinare l'equazione parametrica della retta r passante per O e ortogonale a π:

(c) Determinare il punto di intersezione Q di r con π:

(d) Determinare la distanza di O da π.

---

3. **(6 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ 5 & -2 & -3 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di A

(b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

(d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A.
