ZQQ77INF018A8715K18MQ181881562337JJ	22 febbraio 2022
Cognome e Nome:	Matricola:

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & k & 1 \\ -2k+1 & -2 & -k+2 & k-1 \\ -k & 2 & k & 2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ 1+k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
$1/2$	2	3	no	–
altrim.	3	3	sì	1

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 2 \text{ se } k = 1/2 \\ 3 \text{ se } k \neq 1/2 \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 1/2$, dim Sol $= 2$ mai. Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

---

2. **(6 pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X}) = 0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.

$$\lambda_1 = 0,\ \mu_1 = 1 = m_1; \qquad \lambda_2 = -6,\ \mu_2 = 2 = m_2\,.$$

Semidefinita negativa.

$$\mathcal{B}_1 = \left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\5\\-1\end{pmatrix}\right\}; \quad N = \begin{pmatrix}2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30}\\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30}\\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30}\end{pmatrix}.$$

$$\overline{X} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

---

3. **(6 pt)** Sia $W = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : -4x + 3y + 2z = x + z = 2x - y = 0\right\}$.

(a) Determinare la dimensione e una base ortogonale di W:

$$\dim W = 1 \qquad \{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\},$$

(b) Determinare una base ortogonale di $W^{\perp}$:

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\}$$

(c) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}$ sul sottospazio W. $\boldsymbol{z}_{\parallel} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}$.

(d) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}$ sul sottospazio $W^{\perp}$: $\boldsymbol{z}_{\perp} = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$.

ZQQ77INF018A8715K18MQ181882562337JJ	22 febbraio 2022
Cognome e Nome:	**Matricola:**

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+1 & 1 \\ 3 & -1 & -k+1 & k \\ 3k+1 & 1 & k+1 & 2k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
-1/2	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 2 \text{ se } k = -1/2 \\ 3 \text{ se } k \neq 1/2. \end{cases}$$

Risolubile per ogni k. $\dim \mathrm{Sol} = 2$ per k = -1/2. Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

---

2. **(6 pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X}) = 0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.

$$\lambda_1 = 11,\ \mu_1 = 1 = m_1; \qquad \lambda_2 = 0,\ \mu_2 = 2 = m_2\,.$$

Semidefinita positiva.

$$\mathcal{B}_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\10\\-3\end{pmatrix}\right\}; \quad N = \begin{pmatrix}1/\sqrt{11} & -3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{110}\\ 1/\sqrt{11} & 0 & 10/\sqrt{110}\\ 3/\sqrt{11} & 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{110}\end{pmatrix}.$$

$$\overline{X} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

---

3. **(6 pt)** Sia $U := \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\right\}$.

(a) Determinare la dimensione e una base ortogonale di U:

$$\dim U = 2 \qquad \{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}\},$$

(b) Determinare una base ortogonale di $U^\perp$:

$$\{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\}$$

(c) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}$ sul sottospazio U: $\boldsymbol{w}_\parallel = \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$.

(d) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}$ sul sottospazio $U^\perp$: $\boldsymbol{w}_\perp = \begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$.

ZQQ77INF018A8715K18MQ181883562337JJ	22 febbraio 2022
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+2 & k-1 & 1 & 2 \\ 3k & k & 0 & 3k-1 \\ 3k+4 & k-1 & 1 & 2k+4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k+1 \\ k+2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
-1	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 2 \text{ se } k = -1 \\ 3 \text{ se } k \neq -1. \end{cases}$$

Risolubile per ogni k, $\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = -1$. Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

---

2. **(6 pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X}) = 0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.

$$\lambda_1 = 9,\ \mu_1 = 1 = m_1\,; \qquad \lambda_2 = -6,\ \mu_2 = 1 = m_2\,; \qquad \lambda_3 = 0,\ \mu_3 = 1 = m_3\,.$$

Non definita.

$$\mathcal{B}_1 = \left\{\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right\},\ \mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\},\ \mathcal{B}_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}\right\};\ N = \begin{pmatrix}2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18}\\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18}\\ -1/3 & 0 & 4/\sqrt{18}\end{pmatrix}.$$

$$\overline{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$$

---

3. **(6 pt)** Sia $W = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 3y + z = 6x - 4z = 0\right\}$.

(a) Determinare la dimensione e una base <u>ortonormale</u> di W:

$$\dim W = 1 \qquad \{\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}\},$$

(b) Determinare una base <u>ortogonale</u> di $W^{\perp}$:

$$\{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}\} \qquad \text{o anche} \qquad \{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\3\\5\end{pmatrix}\} \text{ o } \{\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix}\}.$$

(c) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix}5\\-9\\3\end{pmatrix}$ sul sottospazio W: $\quad \boldsymbol{z}_{\parallel} = \begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$.

(d) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix}5\\-9\\3\end{pmatrix}$ sul sottospazio $W^{\perp}$: $\quad \boldsymbol{z}_{\perp} = \begin{pmatrix}1\\-7\\-3\end{pmatrix}$.

ZQQ77INF018A8715K18MQ181884562337JJ	22 febbraio 2022
Cognome e Nome:	**Matricola:**

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(6 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & k-2 & 1 & 2 \\ 3k-3 & k-1 & 0 & 3k-4 \\ 3k+1 & k-2 & 1 & 2k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ k+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	3	no	–
altrim.	3	3	sì	1

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 2 \text{ se } k = 0 \\ 3 \text{ se } k \neq 0. \end{cases}$$

Risolubile per ogni $k \neq 0$. $\dim \mathrm{Sol} = 1$ per $k \neq 0$. Soluzione per $k = 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

---

2. **(6 pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 10 & -1 \\ -3 & -1 & 10 \end{pmatrix} \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sia $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(c) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(d) Determinare un vettore *non nullo* $\overline{X}$ per il quale si ha $q(\overline{X}) = 0$, o giustificare la risposta nel caso non esista.

$$\lambda_1 = 11,\ \mu_1 = 2 = m_1; \qquad \lambda_2 = 0,\ \mu_2 = 1 = m_2\,.$$

Semidefinita positiva.

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \quad N = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} & -1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{110} \\ 1/\sqrt{11} & 0 & 10/\sqrt{110} \\ 1/\sqrt{11} & 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{110} \end{pmatrix}.$$

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

3. **(6 pt)** Sia $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + y - 2z = 0 \right\}$

(a) Determinare la dimensione e una base ortogonale di U:

$$\dim U = 2 \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \text{o anche} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Determinare una base ortogonale di $U^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ sul sottospazio U: $\quad \boldsymbol{w}_\parallel = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(d) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ sul sottospazio $U^\perp$: $\quad \boldsymbol{w}_\perp = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
