| ZQQ77INlapp1F018A85K18MQ1as8ff18str1562337JJ | 23 giugno 2022 |
|---|---|
| **Cognome e Nome:** | **Matricola:** |

⟹⟹⟹⟹ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** ⟸⟸⟸⟸

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & k & 2k-1 & 2k-1 \\ -k & k & k & 1 \\ 2-k & -k & 1-2k & -2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

(b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

| $k$ | rg $A$ | rg $\tilde{A}$ | $S \neq \emptyset$? | dim $S$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | no | — |
| 1 | 2 | 2 | sì | 2 |
| altrim. | 3 | 3 | sì | 1 |

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, 1 \\ 2 \text{ se } k = 0, 1. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 0$,

$\dim \mathrm{Sol} = 3$ mai!

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8 pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti $A$ di coordinate $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e $B$ di coordinate $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta $r$ passante per $A$ e $B$.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta $r'$ parallela ad $r$ e passante per il punto $C$ di coordinate $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

   (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano $\pi$ contenente $r$ e $r'$.

   (d) Si calcoli la distanza dell'origine da $\pi$.

   (a) $r : y = 1, x + z = 2.$

   (b) $r' : y = 2, x + z = 1.$

   (c) $\pi : x + y + z = 3.$

   (d) $d(O, \pi) = \sqrt{3}.$

---

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix}7 & -4 & -3\\5 & -2 & -3\\5 & -4 & -1\end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di $A$

   (b) Determinare gli autovalori di $A$ specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di $A$.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile $N$ tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice $B$ che abbia lo stesso polinomio caratteristico di $A$ ma che non sia simile ad $A$.

(a) $p_A(x) = -(x^3 - 4x^2 + 4x)$
(b) Autovalori $\lambda = 2$ con $\mu = m = 2$; $\lambda = 0$ con $\mu = m = 1$
(c) $V_2 = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}$, $V_0 = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
(d) $N = \begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\0 & 3 & 1\\5 & -4 & 1\end{pmatrix}$

---

| ZQQ77INlapp1F018A85K18MQ1as8ff18str2562337JJ | 23 giugno 2022 |
|---|---|
| **Cognome e Nome:** | **Matricola:** |

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} k-3 & k & 2k-1 & 2k-1 \\ -k & k & k & 1 \\ 2-k & -k & 1-2k & 1-2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

(b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

| $k$ | rg $A$ | rg $\tilde{A}$ | $S \neq \emptyset$? | dim $S$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | sì | 2 |
| altrim. | 3 | 3 | sì | 1 |

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 1 \\ 2 \text{ se } k = 1. \end{cases}$$

Risolubile per ogni $k$.

$\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k = 1$.

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti $A$ di coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $B$ di coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta $r$ passante per $A$ e $B$.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta $r'$ parallela ad $r$ e passante per il punto $C$ di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano $\pi$ contenente $r$ e $r'$.

   (d) Si calcoli la distanza dell'origine da $\pi$.

   (a) $r : y = -1, x - z = 3.$

   (b) $r' : y = -2, x - z = 2.$

   (c) $\pi : x - y - z = 4.$

   (d) $d(O, \pi) = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$

---

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di $A$

   (b) Determinare gli autovalori di $A$ specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di $A$.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile $N$ tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice $B$ che abbia lo stesso polinomio caratteristico di $A$ ma che non sia simile ad $A$.

(a) $p_A(x) = -(x^3 + 8x^2 + 16x)$
(b) Autovalori $\lambda = -4$ con $\mu = m = 2$; $\lambda = 0$ con $\mu = m = 1$
(c) $V_{-4} = \text{Span}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_0 = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
(d) $N = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

| ZQQ77INlapp1F018A85K18MQ1as8ff18str3562337JJ | 23 giugno 2022 |
|---|---|
| **Cognome e Nome:** | **Matricola:** |

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & k-3 & 2k-3 & 2k-3 \\ k-1 & 1-k & k-1 & 1 \\ 1-k & 3-k & 3-2k & 2-2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

(b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

| $k$ | rg $A$ | rg $\tilde{A}$ | $S \neq \emptyset$? | dim $S$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | no | — |
| 2 | 2 | 2 | sì | 2 |
| altrim. | 3 | 3 | sì | 1 |

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 1, 2 \\ 2 \text{ se } k = 1, 2. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 1$,

$\dim \mathrm{Sol} = 1$ per $k \neq 1, 2$.

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8 pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti $A$ di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B$ di coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta $r$ passante per $A$ e $B$.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta $r'$ parallela ad $r$ e passante per il punto $C$ di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano $\pi$ contenente $r$ e $r'$.

   (d) Si calcoli la distanza dell'origine da $\pi$.

   (a) $r : y = 2, x + z = 3$.

   (b) $r' : y = 3, x + z = 2$.

   (c) $\pi : x + y + z = 5$.

   (d) $d(O, \pi) = \dfrac{5}{3}\sqrt{3}$.

---

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di $A$

   (b) Determinare gli autovalori di $A$ specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di $A$.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile $N$ tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice $B$ che abbia lo stesso polinomio caratteristico di $A$ ma che non sia simile ad $A$.

   (a) $p_A(x) = -(x^3 - 12x^2 + 36x)$
   (b) Autovalori $\lambda = 6$ con $\mu = 2$, $m = 1$; $\lambda = 0$ con $\mu = m = 1$
   (c) $V_6 = \text{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_0 = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (d) $A$ non è diagonalizzabile. $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

| ZQQ77INlapp1F018A85K18MQ1as8ff18str4562337JJ | 23 giugno 2022 |
|---|---|
| **Cognome e Nome:** | **Matricola:** |

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, $A$ e $B$ sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale $k$:

$$A = \begin{pmatrix} -k & 3-k & 5-2k & 5-2k \\ k-3 & 3-k & 3-k & 1 \\ k-1 & k-3 & 2k-5 & 2k-5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di $A$ al variare di $k$:

(b) Determinare per quali valori di $k$ il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di $k$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

| $k$ | rg $A$ | rg $\tilde{A}$ | $S \neq \emptyset$? | dim $S$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 3 | no | – |
| altrim. | 3 | 3 | sì | 1 |

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 2 \\ 2 \text{ se } k = 2. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 2$.

$\dim \text{Sol} = 1$ per $k \neq 2$.

Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. **(8pt)** Fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo, si considerino i punti $A$ di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $B$ di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini l'equazione cartesiana della retta $r$ passante per $A$ e $B$.

   (b) Si determini l'equazione cartesiana della retta $r'$ parallela ad $r$ e passante per il punto $C$ di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Si determini l'equazione cartesiana del piano $\pi$ contenente $r$ e $r'$.

   (d) Si calcoli la distanza dell'origine da $\pi$.

   (a) $r : y = -2, x + z = 1$.

   (b) $r' : y = -3, x + z = 2$.

   (c) $\pi : x + y + z = -1$.

   (d) $d(O, \pi) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

---

3. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di $A$

   (b) Determinare gli autovalori di $A$ specificandone molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di $A$.

   (d) Discutere se esiste una matrice invertibile $N$ tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice $B$ che abbia lo stesso polinomio caratteristico di $A$ ma che non sia simile ad $A$.

(a) $p_A(x) = -(x^3 - 4x^2 + 4x)$
(b) Autovalori $\lambda = 2$ con $\mu = 2$, $m = 1$; $\lambda = 0$ con $\mu = m = 1$
(c) $V_2 = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_0 = \text{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
(d) $A$ non è diagonalizzabile. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$