Prova scritta di Algebra 2 - 13/6/2022

Esercizio 1. Poniamo

$$A_1 := \mathbb{Z}/18 \times \mathbb{Z}/2, \qquad A_2 := \mathbb{Z}/36,$$
$$A_3 := \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/108, \mathbb{Z}/144), \qquad A_4 := \mathbb{Z}/9 \times (\mathbb{Z}/2)^2.$$

(1) Quali fra i gruppi A_i sono isomorfi?
(2) Per $i = 1, 2, 3, 4$, quanti sono i sottogruppi di A_i isomorfi a $\mathbb{Z}/18$?

(1)

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/(3^2), \\ A_2 &= \mathbb{Z}/(2^2) \times \mathbb{Z}/(3^2), \\ A_3 &\cong \mathbb{Z}/(108, 144) = \mathbb{Z}/36 = \\ &= \mathbb{Z}/(2^2) \times \mathbb{Z}/(3^2), \\ A_4 &= \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/(3^2). \end{aligned}$$

Quindi $A_1 \cong A_4 \ncong A_2 \cong A_3$.

(2) $A_2 = A_3 \cong \mathbb{Z}/36$ è ciclico e $18|36$, dunque contiene un solo sottogruppo ciclico di ordine 18. Invece il gruppo $A_1 = A_4$ contiene 3 sottogruppi isomorfi a $\mathbb{Z}/18$. Infatti sia $H \subset A_4$ un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}/18$. Allora H contiene un elemento di ordine 9. Ma A_4 contiene un solo sottogruppo di ordine 9, e cioè $K := \langle([0]_2, [0]_2, [1]_9)\rangle \cong \mathbb{Z}/9$. Dunque $K \subset H$ e H/K è un sottogruppo di ordine 2 in $A_4/K \cong \mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$. Pertanto K è uno dei seguenti tre sottogruppi

$$\mathbb{Z}/2 \times \{0\} = \langle([1]_2, [0]_2)\rangle, \qquad \{[0]_2\} \times \mathbb{Z}/2 = \langle([0]_2, [1]_2)\rangle,$$
$$\langle([1]_2, [1]_2)\rangle.$$

Per ciascuno di questi 3 sottogruppi di A_4/K otteniamo un sottogruppo distinto di A_4, e cioè

$$\langle [1]_9, [1]_2, [0]_2\rangle, \qquad \langle [1]_9, [0]_2, [1]_2\rangle, \qquad \langle [1]_9, [1]_2, [1]_2\rangle.$$

Esercizio 2. (1) Classificare i gruppi di ordine 153.
(2) Classificare i gruppi di ordine 306 che hanno un 3-Sylow ciclico e normale.

(1) $153 = 3^2 \cdot 17$. Quindi $n_{17} = 1 + 17k$ e $n_{17}|9$. Dunque l'unica possibilità è $n_{17} = 1$, quindi $P_{17} \lhd G$. Per n_3 il ragionamento è molto simile: $n_3 = 1 + 3k$ e $n_3|17$. L'unica possibilità è $n_3 = 1$, dunque $P_3 \lhd G$. Concludiamo che G è il prodotto dei sui sottogruppi di Sylow: $G \cong P_3 \times P_9$ e ho solo due gruppi possibili:

$$G = \mathbb{Z}/17 \times \mathbb{Z}/9, \qquad G = \mathbb{Z}/17 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3.$$

(2) Sia G un gruppo di ordine 306. Fissiamo un 3-Sylow P_3 ed un 17-Sylow P_{17}. Osserviamo che $N := P_{17} \cdot P_3$ è un sottogruppo perché $P_3 \lhd G$. Dunque N è un gruppo di ordine 153. Siccome P_3 deve essere ciclico, per il punto precedente $N = \mathbb{Z}/17 \times \mathbb{Z}/9$. Inoltre N è normale in G perché ha indice 2. Dunque $G = N \rtimes P_2 = (\mathbb{Z}/17 \times \mathbb{Z}/9) \rtimes_\theta \mathbb{Z}/2$ dove

$$\theta : \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/17 \times \mathbb{Z}/9).$$

Sia $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/17 \times \mathbb{Z}/9)$. Consideriamo le proiezioni

$$\pi_1 : \mathbb{Z}/17 \times \mathbb{Z}/9 \to \mathbb{Z}/17 \qquad \pi_2 : \mathbb{Z}/17 \times \mathbb{Z}/9 \to \mathbb{Z}/9,$$

e le inclusioni

$$i_1 : \mathbb{Z}/17 \hookrightarrow \mathbb{Z}/17 \times \mathbb{Z}/9 \qquad i_2 : \mathbb{Z}/9 \hookrightarrow \mathbb{Z}/17 \times \mathbb{Z}/9.$$

Allora $\pi_2 \circ f \circ i_1 : \mathbb{Z}/17 \to \mathbb{Z}/9$ è necessariamente nulla e lo stesso per $\pi_1 \circ f \circ i_2 : \mathbb{Z}/9 \to \mathbb{Z}/17$. Dunque se poniamo $f_i := \pi_i \circ f \circ i_i$, allora $f_1 \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}/17$, $f_2 \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}/9$ e $f(x, y) = (f(x), f(y))$. Abbiamo dimostrato che

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/17 \times \mathbb{Z}/9) = \mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}/17 \times \mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}/9 \cong \mathbb{Z}/16 \times \mathbb{Z}/6.$$

In $\mathbb{Z}/16$ ci sono 2 elementi di ordine 2: $[0]_{16}$ e $[8]_{16}$, in $\mathbb{Z}/6$ altri due: $[0]_6, [3]_6$. In totale ho 4 possibilità per θ:

(1) $\theta([1]_2) = ([0]_{16}, [0]_6) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/17\times\mathbb{Z}/9}$
$G_1 = \mathbb{Z}/17 \times \mathbb{Z}/9 \times \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}/306.$

(2) $\theta([1]_2) = ([8]_{16}, [0]_6)$
$G_2 = (\mathbb{Z}/17 \rtimes \mathbb{Z}/2) \times \mathbb{Z}/9 = D_{17} \times \mathbb{Z}/9.$

(3) $\theta([1]_2) = ([0]_{16}, [3]_6)$
$G_3 = \mathbb{Z}/17 \times (\mathbb{Z}/9 \rtimes \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/17 \times D_9.$

(4) $\theta([1]_2) = ([8]_{16}, [3]_6)$
$G_4 = (\mathbb{Z}/17 \times \mathbb{Z}/9) \rtimes \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}/153 \rtimes \mathbb{Z}/2 = D_{153}.$

Dobbiamo controllare che questi quattro gruppi siano fra loro non isomorfi. G_1 è l'unico abeliano. Ricordando che il centro di D_n è banale se n è dispari, vediamo che $Z(G_2) = \mathbb{Z}/9$, $Z(G_3) = \mathbb{Z}/17$ e $Z(D_{153}) = \{1\}$. Quindi i centri sono tutti fra loro non isomorfi e lo stesso vale per i gruppi.

Esercizio 3. Consideriamo il polinomio

$$f(X) = X^5 - 2X^4 - 5X^3 + 10X^2 + 5X - 10.$$

(1) Determinare esplicitamente il campo di spezzamento E di f su $\mathbb{Q}$, ossia individuare degli elementi $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ tali che $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
(2) Calcolare $[E : \mathbb{Q}]$.
(3) Determinare il gruppo di Galois di f su $\mathbb{Q}$.
(4) Quanti sono i campi intermedi fra $\mathbb{Q}$ ed E?

(1) $f(X) = (X-2)(X^4-5X^2+5)$. Osserviamo che $q(X) = X^4-5X^2+5$ è irriducibile per Eisenstein. E è generato dalle radici di f cioè dalle radici di q, visto che $2 \in \mathbb{Q}$. Per trovare le radici di q osserviamo che è un polinomio biquadratico. Cioè risolviamo l'equazione quadratica $y^2 - 5y + 5 = 0$ e troviamo

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Entrambe le soluzioni sono positive. Poniamo

$$\alpha = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Allora le radici di q sono $\pm\alpha, \pm\beta$. Dunque $E = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.
(2) Per calcolare $[E : \mathbb{Q}]$ cerchiamo di semplificare questa rappresentazione. Osserviamo che

$$\alpha^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}, \qquad \sqrt{5} = 2\alpha^2 - 5.$$

dunque $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Inoltre

$$\alpha\beta = \sqrt{\frac{25-5}{4}} = \sqrt{5}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{5}}{\alpha} = 2\alpha - \frac{5}{\alpha}.$$

Dunque anche $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ e $E = \mathbb{Q}(\alpha)$. Siccome q è irriducibile, $q = m_{\alpha,\mathbb{Q}}$, quindi $[E : \mathbb{Q}] = 4$.
(3) $E/\mathbb{Q}$ è di Galois perché E è il campo di spezzamento di f e di q.

Allora $|\operatorname{Gal}(E/\mathbb{Q})| = 4$. Bisogna capire se è il gruppo di Klein o $\mathbb{Z}/4$. Si può procedere scrivendo gli elementi del gruppo di Galois:

$$\sigma_1(\alpha) = \alpha, \quad \sigma_2(\alpha) = -\alpha, \quad \sigma_3(\alpha) = \beta, \quad \sigma_4(\alpha) = -\beta.$$

Calcoliamo

$$\sigma_4^2(\alpha) = \sigma_4(-\beta) = \sigma_4(-2\alpha + 5/\alpha) = 2\beta - 5/\beta = \frac{2\beta^2 - 5}{\beta},$$

$$2\beta^2 - 5 = 2\,\frac{5 - \sqrt{5}}{2} - 5 = -\sqrt{5},$$

$$\sigma_4^2(\alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{\alpha} = -\alpha.$$

Dunque σ_4 ha ordine 4 e $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/4$.
(4) Siccome $E/\mathbb{Q}$ è di Galois, la corrispondenza di Galois è biunivoca, dunque i campi intermedi sono tanti quanti i sottogruppi di $\mathbb{Z}/4$, ossia 3 (compresi quello banale e $\mathbb{Z}/4$ stesso).