Prova scritta di Algebra 2 - 8/9/2022

Esercizio 1.

(1) Classificare i gruppi abeliani di ordine 20.
(2) Calcolare la cardinalità dell'anello degli endomorfismi di ciascuno dei gruppi trovati.

Esercizio 2.

Sia G un gruppo di ordine $1265 = 5 \cdot 11 \cdot 23$.

(1) Dimostrare che G possiede un sottogruppo normale.

Supponiamo ora che esista un morfismo non banale $f : G \to \mathbb{Z}/46$.

(2) Dimostrare che esiste un sottogruppo normale di G di ordine 55.
(3) Dimostrare che esiste un sottogruppo normale di G di ordine 11.

Esercizio 3.

Sia E/F una estensione di campi e siano $\alpha, \alpha' \in E$.

(1) Per $f(X) \in F[X]$ e $\beta \in F(\alpha)$ definiamo un prodotto
$$f(X) \cdot \beta := f(\alpha)\beta$$
dove il prodotto a destra è quello di E. Verificare che con questo prodotto $F(\alpha)$ è un $F[X]$-modulo e calcolare il suo annullatore.
(2) Nello stesso modo definiamo una struttura di $F[X]$-modulo su $F(\alpha')$:
$$f(X) \cdot \beta' := f(\alpha')\beta', \qquad f(X) \in F[X], \beta' \in F(\alpha').$$
Dimostrare che se esiste un isomorfismo di campi $\eta : F(\alpha) \to F(\alpha')$ che è F-lineare e che soddisfa $\eta(\alpha) = \alpha'$, allora $F(\alpha)$ ed $F(\alpha')$ sono isomorfi come $F[X]$-moduli.
(3) Supponiamo che E sia il campo di spezzamento di un polinomio monico $f(X) \in F[X]$, che $\mathrm{Gal}(E/F)$ agisca transitivamente sulle radici di f. Dimostrare che allora $f(X) = p(X)^m$ dove $p(X)$ è un polinomio irriducibile.