Analisi Matematica di Base: addenda

Gianni Gilardi

Queste pagine costituiscono un complemento al libro *Analisi Matematica di Base* e a questo fanno riferimento sistematico: di ogni paragrafo, infatti, viene precisata la collocazione naturale rispetto al testo. Per quanto riguarda le citazioni, alcune di esse iniziano con un numero romano (o con una lettera), altre no: le prime si riferiscono al libro e il numero romano ne indica il capitolo (appendice nel caso della lettera), mentre le altre sono interne a queste stesse pagine.

Queste aggiunte si sono rese necessarie in seguito all'aumento del numero di crediti attribuiti ai corsi di Analisi Matematica del primo anno e al conseguente ritocco dei programmi. Questo aumento comporta sia un numero maggiore di ore di esercitazione e uno spostamento da un semestre all'altro di alcuni argomenti, sia un maggiore approfondimento a diffusione capillare dei contenuti e queste pagine riguardano le variazioni di maggior rilievo.

1. Coordinate polari, cilindriche e sferiche

Questa sezione introduce alcuni sistemi di coordinate alternativi a quelli cartesiani e di grande interesse nelle applicazioni. Data la sostanziale mancanza di prerequisiti, la collocazione di questo paragrafo, che rispetto al libro usa maggior dettaglio, è piuttosto libera.

1.1. Coordinate polari. Identifichiamo il piano con $\mathbb{R}^2$, pensando di avervi fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Se $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, le *coordinate polari* di x sono i due numeri reali ρ e ϑ verificanti $\rho \geq 0$ e le formule

$$x_1 = \rho \cos \vartheta \qquad \text{e} \qquad x_2 = \rho \sin \vartheta. \tag{1.1}$$

Controlliamo l'esistenza di tali coordinate polari. Per quanto riguarda ρ prendiamo

$$\rho = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,. \tag{1.2}$$

Se $x = (0,0)$, allora le (1.1) sono soddisfatte da ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$. Se invece $x \neq (0,0)$, allora $\rho > 0$ e $|x/\rho| = 1$. Dunque x/ρ è un punto della circonferenza avente centro nell'origine e raggio 1, per cui esso ha la forma $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ per almeno un $\vartheta \in \mathbb{R}$. Chiaramente le coppie (ρ, ϑ) costruite in tal modo verificano le (1.1). Si noti che, per costruzione nel caso $x \neq (0,0)$, ϑ ha il significato di angolo (orientato) che la semiretta uscente dall'origine e passante per x forma con il semiasse delle ascisse positive.

Veniamo allo studio della corrispondenza fra coordinate cartesiane e polari. Chiaramente la coppia (ρ, ϑ) individua la coppia (x_1, x_2) data dalle (1.1). Al contrario, non vale il viceversa. Dato infatti $x = (x_1, x_2)$ abbiamo necessariamente la (1.2), come si vede quadrando e sommando membro a membro le (1.1), mentre la coordinata ϑ non è univocamente determinata. Se x è l'origine ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$ verifica le (1.1). Nel caso opposto ϑ non è arbitraria ma nemmeno univocamente determinata. Essa è determinata solo se le si impone un vincolo, ad esempio $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

Chiaramente, fissati $\rho_0 > 0$ e $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, i punti che verificano $\rho = \rho_0$ costituiscono la circonferenza di centro l'origine e raggio ρ_0, mentre i punti che verificano $\vartheta = \vartheta_0$ formano una semiretta uscente dall'origine.

1.2. Coordinate cilindriche. Ora consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^3$ e introduciamo le *coordinate cilindriche* (ρ, ϑ, z), con $\rho \geq 0$, del suo generico punto x. La coppia (ρ, ϑ) è quella delle coordinate polari del punto (x_1, x_2) di $\mathbb{R}^2$, mentre $z = x_3$. Abbiamo dunque

$$x_1 = \rho \cos \vartheta, \qquad x_2 = \rho \sin \vartheta \qquad \text{e} \qquad x_3 = z \tag{1.3}$$

e non occorre spendere altre parole, viste ormai le coordinate polari.

Notiamo solo che, fissati $\rho_0 > 0$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ e $z_0 \in \mathbb{R}$, i punti che verificano $\rho = \rho_0$ costituiscono la superficie cilindrica avente per asse l'asse x_3 e raggio ρ_0, i punti che verificano $\vartheta = \vartheta_0$ formano un semipiano uscente dall'asse x_3 e i punti che verificano $z = z_0$ costituiscono il piano di equazione cartesiana $x_3 = z_0$, che dunque è parallelo al piano coordinato x_1x_2.

1.3. Coordinate sferiche. Ancora in $\mathbb{R}^3$, del generico punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ si può considerare anche la terna $(\rho, \vartheta, \varphi)$ (con $\rho \geq 0$) delle *coordinate sferiche*. Esse sono legate alle coordinate cartesiane dalle formule

$$x_1 = \rho \cos\vartheta \cos\varphi, \qquad x_2 = \rho \sin\vartheta \cos\varphi \qquad \text{e} \qquad x_3 = \rho \sin\varphi \tag{1.4}$$

e vengono chiamate usualmente *altitudine*, *longitudine* e *latitudine* rispettivamente. Se si immagina la Terra con il centro nell'origine e poli sull'asse x_3, si capisce dalla costruzione che ora eseguiamo il motivo di tali nomi. Segnaliamo che le coordinate sferiche sono spesso dette anche *coordinate polari* nello spazio.

Per costruire le coordinate sferiche a partire dalle coordiante cartesiane iniziamo a prendere come ρ la distanza di x dall'origine, cioè

$$\rho = |x| \tag{1.5}$$

per ogni punto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Più complessa è invece la definizione delle coordinate angolari ϑ e φ, la quale richiede la distinzione di vari casi. Nel primo x è l'origine. Allora $\rho = 0$ e le (1.4) sono soddisfatte con scelte arbitrarie di ϑ e di φ. Nel secondo caso x appartiene all'asse x_3 ma è diverso dall'origine: in tali condizioni abbiamo $x_1 = x_2 = 0$ e $x_3 \neq 0$. Allora $\rho > 0$ e le (1.4) sono soddisfatte con ϑ arbitriario e, ad esempio, con $\varphi = \pm\pi/2$ a seconda che x_3 sia positivo o negativo. Nell'ultimo caso x non è un punto dell'asse x_3. Conviene allora introdurre delle coordinate ausiliarie momentanee.

Sia $\mathcal{P}$ il semipiano avente l'asse x_3 come origine passante per x. Nel piano $\mathcal{P}'$ che contiene $\mathcal{P}$ introduciamo un riferimento cartesiano avente come origine il punto $(0,0,0)$, come asse delle ordinate l'asse x_3 e come asse delle ascisse l'intersezione di $\mathcal{P}'$ con il piano x_1x_2, asse che orientiamo in modo che l'ascissa, che chiamiamo r, risulti non negativa nei punti del semipiano $\mathcal{P}$:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,. \tag{1.6}$$

Denotiamo con (ρ, φ) la coppia delle coordinate polari in $\mathcal{P}$ (o meglio nel piano $\mathcal{P}'$, ma di questo usiamo solo il semipiano $\mathcal{P}$) associata a tale riferimento cartesiano. Valgono allora le formule

$$r = \rho\cos\varphi \quad \text{e} \quad x_3 = \rho\sin\varphi \tag{1.7}$$

nelle quali conviene imporre la restrizione $|\varphi| \leq \pi/2$. Si noti che

$$\rho = \sqrt{r^2 + x_3^2}$$

(per cui c'è concordanza grazie alla (1.6) con la scelta (1.5) fatta in ogni caso) e che la seconda delle (1.7) fornisce la terza delle (1.4). Sia infine (r', ϑ) il sistema di coordinate polari nel piano x_1x_2 associato alle coordinate cartesiane x_1 e x_2. Per il punto $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ associato a x abbiamo dunque

$$x_1 = r'\cos\vartheta, \quad x_2 = r'\sin\vartheta \quad \text{e} \quad r' = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{1.8}$$

Per ricavare le prime due delle (1.4), riuniamo il tutto ed eliminiamo r e r'. Confrontando la (1.6) con la terza delle (1.8), deduciamo $r' = r$. Allora le prime due delle (1.8) diventano $x_1 = r\cos\vartheta$ e $x_2 = r\sin\vartheta$ e sostituendo r con il valore dato dalla prima delle (1.7) otteniamo le formule volute.

Anche in questo caso è opportuno studiare la corrispondenza fra i due sistemi di coordinate. Come nei casi precedenti, le nuove coordinate individuano le coordinate cartesiane, mentre non vale il viceversa. Dato il punto x, si ha necessariamente $\rho = |x|$, come si vede quadrando e sommando membro a membro le (1.4), e che, invece, le coordinate angolari ϑ e φ non sono univocamente determinate, a meno che non si impongano limitazioni, quali ad esempio $\vartheta \in [0, 2\pi)$ e la condizione già richiesta $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Questi vincoli consentono di individuare ϑ e φ nel caso in cui x non appartiene all'asse x_3. Per i punti di questo asse, invece, il valore di ϑ rimane completamente indeterminato, mentre φ è determinato tranne che nel caso dell'origine.

Notiamo poi che, fissati $\rho_0 > 0$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ e $z_0 \in \mathbb{R}$, i punti che verificano $\rho = \rho_0$ costituiscono la superficie sferica avente centro nell'origine e raggio ρ_0, i punti che verificano $\vartheta = \vartheta_0$ formano un semipiano uscente dall'asse x_3 e i punti che verificano $\varphi = \varphi_0$ costituiscono un cono semi-infinito avente per asse l'asse x_3. In particolare, su ogni superficie sferica di centro l'origine, il semipiano $\vartheta = \vartheta_0$ e il cono $\varphi = \varphi_0$ individuano oggetti che ragionevolmente si possono chiamare meridiano e parallelo. Segnaliamo infine che spesso viene usata la cosiddetta *colatitudine* $\varphi' = \pi/2 - \varphi$, che varia in $[0, \pi]$ se φ varia in $[-\pi/2, \pi/2]$.

Vediamo infine i legami fra le coordinate sferiche e cilindriche. Se, dato x, denotiamo con $(\rho, \vartheta, \varphi)$ la terna delle sue coordinate sferiche e con (r, ϑ', z) quella delle coordinate cilindriche, si vede immediatamente che valgono le formule

$$r = \rho \cos \varphi \qquad \text{e} \qquad z = \rho \sin \varphi.$$

Se poi x non appartiene all'asse x_3, risulta anche $\vartheta' = \vartheta$ a meno di multipli di 2π, mentre ϑ e ϑ' sono reali arbitrari nel caso opposto.

2. Equazioni algebriche

Quanto segue è un breve complemento al Paragrafo A.5: la prima sezione riguarda l'introduzione dei numeri complessi, con una motivazione a carattere storico; il resto concerne la decomposizione dei polinomi in fattori e può essere collocato alla fine del paragrafo citato.

2.1. Le equazioni di terzo grado. Le estensioni successive del concetto di numero, dai numeri naturali fino ai reali e ai complessi, sono motivate sia dalla necessità di risolvere problemi non risolubili se il concetto disponibile di numero è troppo restrittivo sia dall'opportunità di costruire strutture algebriche più efficienti, cioè che possano tornare utili nella produzione di matematica.

Consideriamo ad esempio il problema di trovare una formula esplicita per la somma dei quadrati perfetti da 1^2 a n^2 (cioè la somma dei numeri del tipo k^2 con $k = 1, \ldots, n$), problema che, ovviamente, riguarda l'ambito dei numeri naturali. Ebbene, detta somma vale $n(n+1)(2n+1)/6$ e la giustificazione di questo fatto è agevole se si dispone anche dei razionali (anziché dei soli naturali), dato che nel loro ambito è (quasi) sempre possibile effettuare divisioni.

I numeri complessi costituiscono una struttura che, per molti versi, è più efficiente dell'ambito reale e che ha trovato applicazioni in tutti i campi della matematica.

Una motivazione per l'introduzione di questa classe numerica si ha nello studio delle equazioni di secondo grado (a coefficienti reali), le quali possono non avere soluzioni reali. Ebbene nell'ambito dei numeri complessi si possono risolvere anche tali equazioni. Per vedere una motivazione più forte, tuttavia, è opportuno considerare il problema delle equazioni di terzo grado. Consideriamo l'equazione generale

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{2.1}$$

Con il cambiamento di incognita $x = x' - a/3$ si ottiene un'equazione analoga, nella quale però manca il termine di secondo grado. Possiamo dunque supporre $a = 0$ nella (2.1) senza perdita di generalità e considerare l'equazione

$$x^3 + 3px + 2q = 0. \tag{2.2}$$

Verso la metà del '500 Cardano (ma c'è parecchia storia alle sue spalle, per cui la paternità del risultato non è univoca) diede per l'equazione (2.2) la formula risolutiva seguente:

$$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{r}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{r}} \qquad \text{ove} \qquad r = p^3 + q^2. \tag{2.3}$$

Ebbene, se consideriamo l'equazione $x^3-8=0$, abbiamo $p=0$ e $q=-4$, da cui $r=16$ e $x=2$, e le cose vanno bene. Per l'equazione $x^3-9x=0$, che ha addirittura tre soluzioni ($x=0,\pm 3$), abbiamo invece $p=-3$ e $q=0$, da cui $r=-27$, e siamo fermi dato che $r<0$.

Eppure, se immaginiamo di non accorgerci che la radice di r può non esistere e procediamo come se tutti i calcoli di uso corrente fossero leciti, sostituendo il valore fornito dalla (2.3) nella (2.2), vediamo, sia pure con un po' di lavoro, che l'equazione è effettivamente soddisfatta. Da qui la necessità impellente di attribuire un senso alla radice di un numero negativo, senza che vengano sovvertite, per quanto possibile, le usuali regole dell'algebra. □

Il risultato successivo, che enunciamo soltanto, va ben oltre le equazioni di secondo e di terzo grado. Notiamo però che esso non dice nulla su eventuali formule risolutive e a questo proposito va osservato che, se il grado dell'equazione è ≥ 5, in generale non bastano le estrazioni di radice per calcolare le soluzioni a partire dai coefficienti.

2.2. Teorema (fondamentale dell'algebra). *Sia $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polinomio a coefficienti complessi con $a_n \neq 0$. Allora esiste $(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n$ in modo che risulti*

$$P(z)=a_n(z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_n) \tag{2.4}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$. □

I numeri complessi $z_1,\ldots,z_n$ risolvono l'equazione algebrica $P(z)=0$ di incognita $z\in\mathbb{C}$ e costituiscono le sole soluzioni possibili. Essi sono univocamente determinati da P a meno di loro permutazioni. Tuttavia essi possono non essere tutti distinti fra loro: ad esempio, nel caso dell'equazione $z^n=0$ abbiamo $z_k=0$ per $k=1,\ldots,n$. Conviene allora introdurre la nozione di *molteplicità* di una soluzione z' dell'equazione $P(z)=0$: essa è il numero di fattori uguali a $z-z'$ che compaiono nella decomposizione (2.4). Si usa anche dire che l'equazione ha sempre n soluzioni se contate secondo le loro molteplicità. Nel caso dell'equazione $z^n=w$, abbiamo n soluzioni semplici se $w\neq 0$ e una sola soluzione, ma di molteplicità n, se $w=0$.

2.3. Corollario. *Ogni polinomio in una indeterminata a coefficienti reali può essere decomposto nel prodotto di fattori che hanno tutti grado ≤ 2.* □

Dimostrazione. Diamo solo un cenno. Il punto fondamentale è osservare che valgono le formule

$$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w} \quad \text{e} \quad \overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w} \quad \text{per ogni } z,w\in\mathbb{C} \quad \text{e} \quad \overline{z}=z \quad \text{se } z\in\mathbb{R}.$$

In particolare $\overline{cz^k}=\overline{c}\,(\overline{z})^k=c\,(\overline{z})^k$ per ogni $c\in\mathbb{R}$ e $z\in\mathbb{C}$. Siccome i coefficienti di P sono reali, deduciamo che $P(z)=0$ se e solo se $P(\overline{z})=0$ (e si può vedere che due soluzioni coniugate fra loro hanno anche la stessa molteplicità). Allora i fattori della decomposizione (2.4) relativi alle soluzioni z_k non reali si possono abbinanare a due a due in modo da formare prodotti del tipo

$$(z-(\alpha+i\beta))(z-(\alpha-i\beta))=(z-\alpha)^2+\beta^2$$

che sono polinomi di secondo grado a coefficienti reali. □

3. Intorni e continuità

Questo paragrafo è un complemento al Capitolo 3 e riguarda una nota sulla nozione di intorno e qualche aggiunta sulle funzioni continue. Le nozioni di *aperto* e di *chiuso*, usate in queste pagine, sono precisate nelle successive Definizioni IV.7.1 e V.3.19 rispettivamente, ma conviene anticiparle.

3.1. Intorni e basi di intorni. In tutto il libro di testo il termine "intorno" ha un significato preciso (Definizione III.1.5). Tuttavia può essere conveniente dare alla parola un significato più generale. L'intorno di x di raggio r (nel senso appena richiamato) è detto anche *palla chiusa* di centro x e raggio r. Si usa invece il termine *palla di centro x_0 e raggio r* (*palla* senza aggettivi, oppure *palla aperta*) per denotare l'insieme dei punti $y\in\mathbb{R}^n$ verificanti $|y-x|<r$. Notazioni correnti per la palla sono $B_r(x)$ e $B(x,r)$.

Detto ciò, se $x \in \mathbb{R}^n$, chiameremo *intorno di* x, e a questa generalizzazione ci riferiremo in queste pagine, ogni insieme $I \subseteq \mathbb{R}^n$ che gode della proprietà seguente:

$$\textit{esiste } r > 0 \textit{ tale che la palla } B_r(x) \textit{ sia inclusa in } I . \tag{3.1}$$

Sono allora intorni di x ogni intorno nel senso precedente, ogni palla centrata in x, ogni soprainsieme di insiemi di questo tipo. Ad esempio l'intero spazio è un intorno di ogni suo punto e, più in generale, ogni aperto è intorno di ogni suo punto.

Vale la pena di definire anche che cosa si intende per *base di intorni* di un punto $x \in \mathbb{R}^n$. Una base di intorni di x è una famiglia $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che gode delle due proprietà seguenti, nelle quali la parola "intorno" va intesa nel senso generale introdotto sopra dalla (3.1): *i) ogni elemento $B \in \mathcal{B}$ è un intorno di x; ii) per ogni intorno I di x esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $B \subseteq I$.*

Una base di intorni di x è costituita da tutti i suoi intorni in senso vecchio; un'altra base è costituita da tutte le palle di centro x; una terza base è costituita dalla famiglia di tutti i rettangoli n-dimensionali di centro $x = (x_1, \ldots, x_n)$, cioè dagli insiemi prodotto cartesiano di n intervalli del tipo $[x_i - \delta_i, x_i + \delta_i]$ ottenuta lasciando variare i parametri δ_i ad arbitrio fra i reali positivi; una quarta base si ottiene scegliendo fra i rettangoli precedenti solo quelli corrispondenti alle scelte $\delta_i = 1/k$ (ad esempio con lo stesso k per ogni i) e lasciando variare k fra gli interi positivi.

Se si riflette un attimo, si vede che la doppia interpretazione della parola "intorno" non provoca nessuna confusione nelle definizioni di tutti i concetti collegati, come quelli di limite e di continuità, di aperto e di chiuso, eccetera (vedi anche Definizione VI.1.1): infatti essi non cambiano di significato se il termine "intorno" si legge nel senso più esteso che abbiamo deciso di adottare. Più in generale tutti questi concetti espressi non cambiano se, fissata una base di intorni per ciascuno dei punti che intervengono, gli intorni di tali punti si intendono come elementi della base fissata. □

Di seguito diamo due risultati. Il primo di essi è una versione più completa del Teorema III.2.12, alla quale facciamo seguire un esercizio; il secondo è una caratterizzazione delle funzioni continue ovunque in termini del loro comportamento in relazione agli aperti e ai chiusi.

3.2. Teorema. *Siano A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, x_0 un punto di A, f una funzione definita in A a valori in $\mathbb{R}^m$. Allora f è continua in x_0 se e solo se vale la condizione seguente: per ogni successione $\{a_k\}$ di elementi di A convergente a x_0, la successione $\{f(a_k)\}$ converge a $f(x_0)$.* □

Dimostrazione. Per comodità denotiamo con il simbolo (C) la condizione espressa dall'enunciato. Supponiamo f continua in x_0 e dimostriamo che vale la (C). Siano dunque $\{a_k\}$ una successione di elementi di A convergente a x_0 e I un intorno di $f(x_0)$: dobbiamo trovare un indice k^* tale che $f(a_k) \in I$ per ogni $k \geq k^*$. Grazie all'ipotesi, esiste un intorno J di x_0 tale che $f(x) \in J$ per ogni $x \in A \cap J$. Siccome $\{a_k\}$ converge a x_0, troviamo un indice k^* tale che $a_k \in J$ per ogni $k \geq k^*$. Per tali k si ha allora $a_k \in A \cap J$ e dunque $f(a_k) \in I$.

Viceversa, supponendo che valga la (C), dobbiamo dimostrare che f è continua in x_0. Procediamo per assurdo: supponiamo f discontinua in x_0 e dimostriamo che la (C) non vale, cioè che esiste una successione $\{a_k\}$ di elementi di A convergente a x_0 tale che la successione $\{f(a_k)\}$ non converge a $f(x_0)$. Fissiamo dunque un intorno I_0 di $f(x_0)$ tale che per ogni $\delta > 0$ esista $x \in A$ verificante $|x - x_0| \leq \delta$ e $f(x) \notin I_0$. Scegliendo in particolare $\delta = 1/k$ per $k = 1, 2, \ldots$, costruiamo una successione $\{a_k\}$ di elementi di A tale che $|a_k - x_0| \leq 1/k$ e $f(a_k) \notin I_0$ per ogni k. Tale successione è nelle condizioni richieste: infatti essa converge a x_0 mentre $\{f(a_k)\}$ non converge a $f(x_0)$ in quanto addirittura tutti i suoi elementi cadono fuori di un intorno di $f(x_0)$. □

3.3. Esercizio. Imitare la dimostrazione del teorema precedente per dimostrare un risultato (di cui si chiede una precisazione) del tipo: perché $f(x)$ tenda a ℓ per x tendente a x_0 è necessario e sufficiente che, per ogni successione $\{a_k\}$ di elementi di $A \setminus \{x_0\}$ convergente a x_0, la successione $\{f(a_k)\}$ converga a ℓ.

3.4. Proposizione. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Allora le condizioni*

$$f \textit{ è continua in ogni punto} \tag{3.2}$$

$$f^{-1}(A) \textit{ è un aperto di } \mathbb{R}^n \textit{ per ogni aperto } A \textit{ di } \mathbb{R}^m \tag{3.3}$$

$$f^{-1}(C) \textit{ è un chiuso di } \mathbb{R}^n \textit{ per ogni chiuso } C \textit{ di } \mathbb{R}^m \tag{3.4}$$

sono equivalenti. □

Dimostrazione. Supponiamo che valga la (3.2) e dimostriamo la (3.3). Sia dunque $A \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto: dobbiamo dimostrare che l'insieme $A' = f^{-1}(A)$ è aperto. Sia dunque $x_0 \in A'$. Siccome A contiene $f(x_0)$ ed è aperto, esso è un intorno di $f(x_0)$. Esiste allora un intorno J di x_0 tale che $f(x) \in A$ per ogni $x \in J$. Dunque J è un intorno di x_0 incluso in A', per cui x_0 è interno ad A'.

Viceversa, supponiamo che valga la (3.3) e dimostriamo la (3.2). Siano dunque x_0 un punto di $\mathbb{R}^n$ e I un intorno di $f(x_0)$. Fissiamo un aperto $A \subseteq I$ che contiene $f(x_0)$ (ad esempio una palla) e consideriamo $J = f^{-1}(A)$. Allora J è un aperto che contiene x_0, dunque un intorno di x_0, tale che $f(x) \in A \subseteq I$ per ogni $x \in J$.

La dimostrazione dell'equivalenza fra le condizioni (3.3) e (3.4) viene dal fatto che gli aperti sono esattamente i complementari dei chiusi e dalla formula

$$f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus E) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(E)$$

valida per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^m$. □

Questo risultato ha estensioni al caso in cui f sia definita solo in un sottoinsieme. L'estensione generale si ottiene introducendo le nozioni di "aperto relativamente a" e di "chiuso relativamente a". Noi ci limitiamo a osservare che le (3.2) e (3.3) sono equivalenti se $\operatorname{dom} f$ è aperto e che le (3.2) e (3.4) sono equivalenti se $\operatorname{dom} f$ è chiuso, lasciando la dimostrazione (non difficile) al lettore volonteroso.

4. Tangenza

Questo è un complemento al Paragrafo IV.1 e sostituisce la Sezione IV.1.13, arricchendola notevolmente. La sua collocazione ottimale è dopo il Teorema IV.1.15.

4.1. Definizione. *Siano S un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ e s_0 un punto di S che sia anche di accumulazione per S. Diciamo che un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ è tangente a S in s_0 quando vale una delle due condizioni seguenti: i) $\mathbf{v} = \mathbf{0}$; ii) $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ed esiste una successione $\{s_k\}$ di elementi di S diversi da s_0 convergente a s_0 tale che*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s_k - s_0}{|s_k - s_0|} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \tag{4.1}$$

Un vettore è poi detto normale a S in s_0 quando esso è ortogonale a ogni vettore tangente a S in s_0. L'insieme dei vettori tangenti a S nel punto s_0 è detto cono tangente a S in s_0 e viene denotato con $T_{s_0}S$. L'insieme dei vettori normali a S in s_0 è denotato con $N_{s_0}S$ e detto spazio normale a S in s_0. □

Ricordiamo che due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ sono ortogonali fra loro quando vale la condizione $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ (si dice anche che ciascuno dei due è ortogonale all'altro).

4.2. Esempio. Consideriamo di nuovo il caso in cui S sia il grafico della parabola di equazione $y = x^2$ e cerchiamo i vettori tangenti a S nel punto $s_0 = (1,1)$. Una successione $\{s_k\}$ nelle condizioni della definizione deve essere data dalla formula $s_k = (x_k, y_k)$ con $x_k \neq 1$ e $y_k = x_k^2$ per ogni k e $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 1$. Posto $h_k = x_k - 1$, abbiamo con un semplice calcolo

$$\frac{s_k - s_0}{|s_k - s_0|} = \frac{(h_k, 2h_k + h_k^2)}{\sqrt{5h_k^2 + 4h_k^3 + h_k^4}} = \frac{h_k(1, 2 + h_k)}{|h_k|\sqrt{5 + 4h_k + h_k^2}}.$$

La successione di questi versori oscilla se $\{h_k\}$ cambia continuamente segno, mentre essa converge a $\pm(1,2)/\sqrt{5}$ se la successione $\{h_k\}$ degli incrementi ha segno costante positivo o negativo rispettivamente. Deduciamo che i vettori tangenti $\mathbf{v}$ non nulli sono tutti e soli quelli verificanti $\mathbf{v}/|\mathbf{v}| = \pm(1,2)/\sqrt{5}$. Tenendo conto del vettore tangente nullo vediamo che il cono tangente $T_{s_0}S$ è costituito dai vettori $\mathbf{v} = c\,(1,2)$ con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. Si noti che quella che abbiamo chiamato retta tangente a S in s_0 è proprio la retta passante per s_0 e parallela a questi vettori.

4.3. Osservazione. Le nozioni introdotte hanno carattere locale: se I è un intorno di s_0, allora S e $S \cap I$ hanno gli stessi vettori tengenti e gli stessi vettori normali in s_0. Nelle condizioni della definizione il cono tangente non è mai ridotto al solo vettore nullo, come si può dimostrare usando il Teorema di Bolzano–Weierstrass che introdurremo in un capitolo successivo. Si vede poi immediatamente che $N_{s_0}S$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ (cioè che la somma di due vettori normali e il prodotto di un vettore normale per uno scalare sono ancora vettori normali) il che giustifica il termine "spazio" usato nella definizione. Al contrario, per $T_{s_0}S$ abbiamo utilizzato il termine 'cono" (da intendersi "unione di semirette") in quanto vale in generale solo la proprietà seguente (di verifica banale): se $\mathbf{v} \in T_{s_0}S$, allora anche $c\mathbf{v} \in T_{s_0}S$ per ogni reale $c \geq 0$. Infatti non è detto che l'opposto di un vettore tangente e la somma di vettori tangenti siano essi stessi tangenti. Solo quando $T_{s_0}S$ è uno spazio vettoriale esso viene detto *spazio tangente*. In tali condizioni, come si può dimostrare, vale la formula

$$\dim T_{x_0}S + \dim N_{x_0}S = N. \tag{4.2}$$

Notiamo che nel caso di un generico sottoinsieme S di $\mathbb{R}^N$ (e basterebbe $N = 2$) la situazione può essere molto varia e presentare situazioni lontane da "oggetti diritti" (semirette di vettori tangenti non allineate e/o più numerose che nel caso regolare) o addirittura estreme (ogni vettore è tangente). Ciò può avvenire, in particolare, già nel caso in cui S è il grafico di una funzione scalare non differenziabile di una variabile. □

Le righe successive intendono caratterizzare, nel caso regolare e in ipotesi opportune, certi coni tangenti. Partiamo dal caso in cui S sia l'immagine di una funzione e premettiamo un lemma, che enunciamo soltanto. Anch'esso, infatti, è una conseguenza del Teorema di Bolzano–Weierstrass di cui tratteremo più avanti. Qualche commento sulle ipotesi di questi risultati viene dato di seguito.

4.4. Lemma. *Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}$ una funzione definita almeno in un intorno I di x_0 a valori in $\mathbb{R}^m$, S la sua immagine e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ tangente a S in $\mathbf{f}(x_0)$. Se $\mathbf{f}$ è iniettiva e se $\mathbf{f}$ e $\mathbf{f}^{-1}$ sono continue in x_0 e in $\mathbf{f}(x_0)$ rispettivamente, allora esiste una successione $\{x_k\}$ di elementi di $I \setminus \{x_0\}$ verificante le condizioni seguenti: i) la successione $\{x_k\}$ converge a x_0 e vale la (4.1) con $s_k = \mathbf{f}(x_k)$; ii) la successione $\{(x_k - x_0)/|x_k - x_0|\}$ converge.* □

4.5. Teorema. *Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f}$ una funzione definita almeno in un intorno I di x_0 a valori in $\mathbb{R}^m$ differenziabile in x_0 e S l'immagine di $\mathbf{f}$. Allora ogni elemento dell'immagine del differenziale $d\mathbf{f}_{x_0}$ è un vettore tangente a S in $\mathbf{f}(x_0)$. Viceversa, se $\mathbf{f}$ e $d\mathbf{f}(x_0)$ sono applicazioni iniettive e se $\mathbf{f}^{-1}$ è continua in $\mathbf{f}(x_0)$, allora ogni vettore tangente a S in $\mathbf{f}(x_0)$ appartiene all'immagine del differenziale $d\mathbf{f}(x_0)$.* □

Dimostrazione. Poniamo $L = d\mathbf{f}(x_0)$ per semplificare le notazioni. Siccome il vettore nullo è contemporaneamente vettore tangente all'immagine e elemento dell'immagine di L, possiamo passare al caso dei vettori non nulli.

Supponiamo $\mathbf{v}$ non nullo e appartenente all'immagine di L. Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{v} = L\mathbf{u}$, da cui $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ dato che $L\mathbf{0} = \mathbf{0}$, e prendiamo $x_k = x_0 + (\mathbf{u}/k)$ assumendo senz'altro k grande quanto basta perché $x_k \in I$. Siccome $\{x_k\}$ converge a x_0, vediamo che esiste una successione $\{\mathbf{q}_k\}$ infinitesima tale che

$$\mathbf{f}(x_k) = \mathbf{f}(x_0) + L(x_k - x_0) + |x_k - x_0|\mathbf{q}_k. \tag{4.3}$$

Deduciamo in particolare $k(\mathbf{f}(x_k) - \mathbf{f}(x_0)) = L\mathbf{u} + |\mathbf{u}|\mathbf{q}_k = \mathbf{v} + |\mathbf{u}|\mathbf{q}_k$, da cui $\mathbf{f}(x_k) \neq \mathbf{f}(x_0)$ per k abbastanza grande. Tenendo conto della linearità di L, abbiamo infine

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{f}(x_k) - \mathbf{f}(x_0)}{|\mathbf{f}(x_k) - \mathbf{f}(x_0)|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{v} + |\mathbf{u}|\mathbf{q}_k}{|\mathbf{v} + |\mathbf{u}|\mathbf{q}_k|} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Dunque $\mathbf{v}$ è tangente in $\mathbf{f}(x_0)$ all'immagine di $\mathbf{f}$.

Viceversa, valgano anche le ipotesi della seconda parte e sia $\mathbf{v}$, sempre non nullo, tangente all'immagine di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{f}(x_0)$. Osservato che $\mathbf{f}$ è continua in x_0 in quanto differenziabile, sia $\{x_k\}$ la successione data dal lemma precedente. Poniamo

$$\mathbf{u}_k = \frac{x_k - x_0}{|x_k - x_0|} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{u} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{u}_k$$

osservando che $|\mathbf{u}| = 1$. Lo sviluppo del primo ordine di $\mathbf{f}(x)$ con $x = x_k$ è del tipo (4.3) con un'opportuna successione $\{\mathbf{q}_k\}$ infinitesima e $L\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ dato che L è iniettivo. Osserviamo inoltre che, con le notazioni del Lemma IV.1.14, abbiamo $|L\mathbf{u}_k - L\mathbf{u}| \le M|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}|$, per cui $\{L\mathbf{u}_k\}$ converge a $L\mathbf{u}$. Usando la linearità di L, abbiamo allora

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} &= \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{f}(x_k) - \mathbf{f}(x_0)}{|\mathbf{f}(x_k) - \mathbf{f}(x_0)|} = \lim_{k\to\infty} \frac{L(x_k - x_0) + |x_k - x_0|\mathbf{q}_k}{|L(x_k - x_0) + |x_k - x_0|\mathbf{q}_k|} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{L\mathbf{u}_k + \mathbf{q}_k}{|L\mathbf{u}_k + \mathbf{q}_k|} = \frac{L\mathbf{u}}{|L\mathbf{u}|}\end{aligned}$$

e deduciamo che

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \frac{L\mathbf{u}}{|L\mathbf{u}|} = L \frac{|\mathbf{v}|\mathbf{u}}{|L\mathbf{u}|}.$$

Dunque $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di L. □

4.6. Osservazione. La seconda parte del Teorema 4.5 ha numerose ipotesi senza le quali le cose possono andare diversamente, già nel caso $n = 1$. Illuminante, a questo proposito, è la seguente interpretazione cinematica: la variabile indipendente, che chiamiamo t, è il tempo, $\mathbf{f}$ è la legge oraria di un moto in $\mathbb{R}^m$ (si considerino i casi $m = 2$ e $m = 3$ volendo rimanere nel concreto), l'immagine S di $\mathbf{f}$ è la traiettoria descritta dal punto mobile al variare del tempo e t_0 è l'istante nel quale studiamo il cono tangente a S. Il generico vettore $\mathbf{v}$ dell'immagine del differenziale è del tipo $\mathbf{v} = d\mathbf{f}_{t_0} h$ con $h \in \mathbb{R}$ ed è tangente a S in $\mathbf{f}(t_0)$ in base alla prima parte del teorema. Nella Figura 15 del Paragrafo IV.1 è illustrata una situazione di questo tipo con $n = 3$ e il vettore tangente è pensato come vettore applicato al punto della traiettoria in cui il punto mobile passa all'istante considerato. D'altra parte è in generale falso che ogni vettore tangente sia del tipo appena detto, e ciò per più di un motivo. Si consideri infatti il caso in cui $\mathbf{f}$ non sia iniettiva: proprio per quanto è stato appena detto, anche i vettori del tipo $d\mathbf{f}_{t_*} h$ saranno tangenti all'immagine di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{f}(t_0)$ se $\mathbf{f}(t_*) = \mathbf{f}(t_0)$. Una situazione di questo genere si presenta nel caso in cui il punto mobile passa più volte in una stessa posizione ma con direzioni diverse: i vettori tangenti alla traiettoria descritta costituiscono l'unione di più rette. Ciò avviene ad esempio nel caso della funzione $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$ definita per $t \in \mathbb{R}$ dalle formule $x(t) = 1 - t^2$ e $y(t) = t^2 - t^3$ che descrive una sorta di nodo. Il punto mobile in $\mathbb{R}^2$ passa per l'origine nei due istanti $t = \pm 1$ e con direzioni diverse nei due casi, in quanto $y(t)/x(t) = t \simeq \pm 1$ se $t \simeq \pm 1$. Ora una situazione simile si può presentare anche con $\mathbf{f}$ iniettiva se cade l'ipotesi di continuità di $\mathbf{f}^{-1}$. Si restringa infatti all'intervallo $(-\infty, 1)$ la funzione $\mathbf{f}$ appena introdotta: il punto mobile nel piano passa per $(0,0)$ all'istante $t = -1$, non ripassa mai due volte nella stessa posizione, ma al tendere di t a 1 esso tende di nuovo all'origine (senza raggiungerla) lungo una direzione diversa dalla precedente. In questo caso, il cono tangente alla traiettoria nell'origine è l'unione di una retta e di una semiretta. Si noti che $\mathbf{f}^{-1}$ è discontinua in $(0,0)$ in quanto, posto $t_k = 1 - 1/k$ e $s_k = \mathbf{f}(t_k)$, sia ha che s_k tende a $(0,0)$, mentre $\mathbf{f}^{-1}(s_k) = t_k$ tende a 1 e $f^{-1}(0,0) = -1$. Ebbene le ipotesi della seconda parte del teorema (e del lemma) escludono appunto queste due situazioni. Veniamo infine all'ipotesi di iniettività del differenziale e consideriamo il caso estremo in cui il differenziale è l'applicazione nulla. Allora la sua immagine è ridotta al vettore nullo mentre l'insieme dei vettori tangenti all'immagine può essere ben più ricco dato che, in generale, è ricca l'immagine stessa della funzione. Un esempio in proposito è dato dalla funzione $\mathbf{f}(t) = t^3\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$, ove $\mathbf{v}$ è un vettore non nullo: l'immagine di $\mathbf{f}$ è una retta, in ogni punto della quale i vettori tangenti sono esattamente i multipli di $\mathbf{v}$, mentre $d\mathbf{f}(0)$ è nullo.

4.7. Corollario. *Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f}$ una funzione definita almeno in un intorno I di x_0 a valori in $\mathbb{R}^m$ differenziabile in x_0. Allora il cono tangente al grafico di $\mathbf{f}$ nel punto $(x_0, \mathbf{f}(x_0))$ coincide con il grafico di $d\mathbf{f}(x_0)$.* □

Dimostrazione. Sia $\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^{n+m}$ data dalla formula $\mathbf{g}(x) = (x, \mathbf{f}(x))$. Allora $\mathbf{g}$ è iniettiva, la sua immagine coincide con il grafico di $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}^{-1}$ è continua in quanto è data dalla formula $\mathbf{g}^{-1}(x, y) = x$. D'altra parte, scritto lo sviluppo del primo ordine di $\mathbf{f}$ e posto $L = d\mathbf{f}(x_0)$ per semplicità, deduciamo che, per un'opportuna funzione $\mathbf{q}$ infinitesima, vale per $\mathbf{g}$ lo sviluppo

$$\mathbf{g}(x_0 + \mathbf{h}) = (x_0 + \mathbf{h}, \mathbf{f}(x_0) + L\mathbf{h} + |\mathbf{h}|\mathbf{q}(\mathbf{h})) = \mathbf{g}(x_0) + (\mathbf{h}, L\mathbf{h}) + |\mathbf{h}|(\mathbf{0}, \mathbf{q}(\mathbf{h}))$$

il quale mostra che $\mathbf{g}$ differenziabile in x_0 e che $d\mathbf{g}(x_0)$ è l'applicazione $\mathbf{h} \mapsto (\mathbf{h}, L\mathbf{h})$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. In particolare il differenziale $d\mathbf{g}(x_0)$ è iniettivo e l'immagine di $d\mathbf{g}(x_0)$ coincide con il grafico di L, cioè di $d\mathbf{f}(x_0)$. Allora la tesi segue immediatamente dal Teorema 4.5. □

4.8. Osservazione. Nelle condizioni del Teorema 4.5 e del Corollario 4.7, i coni tangenti considerati sono spazi vettoriali di dimensione n, sottospazi di $\mathbb{R}^m$ e di $\mathbb{R}^{n+m}$ rispettivamente. Per tale motivo, nelle situazioni dette, si preferisce parlare di spazio tangente anziché genericamente di cono tangente, come già è stato osservato. Consideriamo ora l'insieme $\mathcal{T}$ che generalizza ciò che nel caso $n = m = 1$ è la retta tangente nel senso intuitivo del termine. La sua precisazione è la seguente: un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ appartiene a $\mathcal{T}$ se e solo se il vettore $(x - x_0, y - y_0)$, che rappresenta l'incremento da attribuire al punto $s_0 = (x_0, \mathbf{f}(x_0))$, è tangente in s_0 al grafico di $\mathbf{f}$. Grazie al corollario precedente vediamo che, nel caso della differenziabilità, la condizione detta equivale al fatto che il vettore $(x - x_0, y - y_0)$ appartenga al grafico del differenziale $d\mathbf{f}(x_0)$, cioè che valga la (IV.1.8). $\mathcal{T}$ viene anche chiamato n-piano tangente. Va da sé che 1-piano e 2-piano significano retta e piano (nel senso usuale della geometria elementare) quando l'ambiente è bidimensionale o tridimensionale.

5. Note sul calcolo differenziale

Questo paragrafo è un po' ibrido. Il primo punto è un risultato (apparentemente insignificante ma in realtà decisivo nei rapporti fra derivazione e integrazione) che si colloca dopo il Teorema IV.4.3. Seguono un'osservazione di un certo rilievo sul Teorema IV.8.3 e qualche nota sulle rappresentazioni di funzioni in diversi sistemi di coordinate, che possono essere lette dopo il Teorema IV.8.3.

5.1. Teorema (della derivata nulla). *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Allora f è una funzione costante.* □

Dimostrazione. La derivata è contemporaneamente ≥ 0 e ≤ 0. Quindi la funzione è contemporaneamente non decrescente e non crescente, dunque costante. □

Notiamo che nei Teoremi IV.4.3 e 5.1 l'ipotesi che il dominio I di f sia un intervallo è essenziale: ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita dalle formule $f(x) = 1$ se $x > 0$ e $f(x) = -1$ se $x < 0$ (detta *funzione segno*) ha derivata nulla ma non è costante.

5.2. Sul Teorema IV.8.3. La grande generalità delle ipotesi consente di trattare anche le operazioni algebriche su funzioni come casi particolari di operazioni di composizione e di ritrovare le regole elementari di derivazione attraverso la formula di derivazione delle funzioni composte. Basti un esempio: la formula di Leibniz per il prodotto di due funzioni scalari. Siano φ e ψ due funzioni reali definite in uno stesso intervallo I. Allora la funzione prodotto $\varphi\psi$ può essere vista come la composizione $g \circ \mathbf{f}$ delle funzioni $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ date dalle formule

$$\mathbf{f}(x) = (\varphi(x), \psi(x)), \quad x \in I, \qquad \text{e} \qquad g(y, z) = yz, \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2.$$

Ora se φ e ψ sono differenziabili in un punto $x_0 \in I$, tale risulta $\mathbf{f}$. D'altra parte g è differenziabile ovunque e $J\mathbf{g}(y, z) = [\, z \ y \,]$ in ogni $(y, z) \in \mathbb{R}^2$. Allora il teorema assicura che $\varphi\psi$ è differenziabile in x_0 e che valgono le formule (IV.8.3), la seconda delle quali diventa ora

$$(\varphi\psi)'(x_0) = [\, \psi(x_0) \ \varphi(x_0) \,]\, [\, \varphi'(x_0) \ \psi'(x_0) \,]^t = \varphi'(x_0)\psi(x_0) + \varphi(x_0)\psi'(x_0).$$

Il lettore può ritrovare, ad esempio, la formula della derivata della somma.

5.3. Coordinate polari, cilindriche e sferiche (seguito). Quando fissiamo un punto x del piano o dello spazio, pensiamo immediatamente alle sue coordinate, dato che siamo portati a identificare il piano stesso con $\mathbb{R}^2$ e lo spazio con $\mathbb{R}^3$. Nelle applicazioni ad esempio alla fisica le cose non vanno così e anche dal punto di vista matematico si può pensare di procedere diversamente, in quanto l'ambiente (piano o spazio) può essere visto come completamente svincolato da un riferimento cartesiano, il quale costituisce un accessorio deliberatamente aggiunto perché si possa descrivere l'ambiente stesso in termini di (coppie o terne di) numeri reali. In particolare possono essere scelti vari riferimenti cartesiani, ciascuno dei quali porta a diverse identificazioni del piano con $\mathbb{R}^2$ o dello spazio con $\mathbb{R}^3$. Tuttavia si possono considerare anche sistemi di riferimento non cartesiani, come il sistema di coordinate polari nel piano e i sistemi di coordinate cilindriche e sferiche nello spazio (vedi Paragrafo 1).

Consideriamo ora una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se $\mathbb{R}^2$ è pensato come modello di un piano fisico, f fa corrispondere un numero reale a ogni punto del piano. Ma nello stesso piano possiamo pensare di introdurre un diverso sistema di riferimento e descrivere tramite quest'ultimo l'azione della funzione considerata. Ora si capisce che, in un discorso di tipo matematico, è inopportuno chiamare la funzione ancora f, dato che, ad esempio, $f(1,2)$ non avrebbe significato univoco, non essendo specificato nel simbolo se $(1,2)$ è la coppia delle vecchie o delle nuove coordinate. Consideriamo per fissare le idee il caso delle coordinate polari e introduciamo

$$f^*(\rho,\vartheta) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta), \quad \rho \ge 0, \quad \vartheta \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Allora f e f^* hanno lo stesso valore se l'argomento di f^* è la coppia di coordinate polari del punto le cui coordinate cartesiane costituiscono l'argomento di f. Possiamo chiamare f^* "rappresentazione in coordinate polari" di f (avvertiamo però il lettore che, nonostante ciò che abbiamo appena detto, non pochi usano per f e f^* lo stesso simbolo). Nel caso di una funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ possiamo procedere analogamente considerando le coordinate cilindriche oppure quelle sferiche. Le funzioni (che denotiamo con lo stesso simbolo usato nella (5.1) per uniformità e delle quali sottintendiamo i domini)

$$f^*(\rho,\vartheta,z) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, z) \tag{5.2}$$

$$f^*(\rho,\vartheta,\varphi) = f(\rho\cos\vartheta\cos\varphi, \rho\sin\vartheta\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \tag{5.3}$$

possono essere chiamate rappresentazioni di f in coordinate cilindriche e sferiche rispettivamente. Il Teorema IV.8.3 consente di calcolare le derivate delle funzioni asteriscate rispetto alle loro variabili in termini delle derivate delle funzioni originarie rispetto alle variabili del sistema cartesiano iniziale.

6. Funzioni implicite

Talvolta è necessario calcolare le derivate di funzioni che si costruiscono come soluzioni di equazioni o sistemi non lineari dipendenti dal parametro scalare o vettoriale x. Tuttavia, in generale, non vi è modo di scrivere tali funzioni mediante formule esplicite.

Ad esempio, una funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verificante $u^3(x) + 4u(x) = x_1 \cos x_2$ risolve l'equazione $y^3 + 4y = x_1 \cos x_2$ e, se si disegna un grafico qualitativo della funzione $y \mapsto y^3 + 4y$, $y \in \mathbb{R}$, si intuisce immediatamente che l'equazione considerata ha effettivamente una e una sola soluzione qualunque siano i valori reali x_1 e x_2, per cui la funzione u in questione è effettivamente ben definita in tutto $\mathbb{R}^2$. Si parla di *funzione implicita*, cioè di funzione definita implicitamente dall'equazione considerata anziché data direttamente da una formula.

Tuttavia il fatto non è generale, come mostra l'esempio dell'equazione $x^2 + y^2 = 1$ pensata nell'incognita y. Questa, infatti, non ha soluzioni se $|x| > 1$ e ne ha due se $|x| < 1$. Dunque, in generale, non possiamo garantire che la soluzione y di un'equazione del tipo $f(x,y) = 0$ corrispondente a un certo valore x del parametro effettivamente esista e sia unica, cioè che l'equazione definisca implicitamente una funzione, nemmeno nel caso delle variabili x e y entrambe scalari e quando f è un polinomio.

Sempre nel caso, solo per semplicità, delle variabili scalari, supponiamo ora di partire da una soluzione y_0 dell'equazione $f(x,y) = 0$ ottenuta in corrispondenza di un certo valore x_0 del parametro x e di scrivere la funzione f tramite il suo sviluppo del primo ordine. L'equazione $f(x,y)=0$ assume allora la forma

$$f(x_0,y_0)+D_xf(x_0,y_0)(x-x_0)+D_yf(x_0,y_0)(y-y_0)+o(|(x-x_0,y-y_0)|)=0$$

che può essere riscritta in modo equivalente

$$D_yf(x_0,y_0)(y-y_0)=-D_xf(x_0,y_0)(x-x_0)-o(|(x-x_0,y-y_0)|)$$

dato che $f(x_0,y_0)=0$ per ipotesi. Ora, se si immagina di trascurare l'"o piccolo", si ottiene un'equazione lineare in y, la cosiddetta *linearizzata*, e si vede che la sua risolubilità rispetto a y dipende dal fatto che la derivata $D_yf(x_0,y_0)$ non si annulli. D'altra parte l'"o piccolo" potrà essere trascurato al più per valori di x e di y vicini a x_0 e a y_0 rispettivamente. Si configura allora la possibilità di risolvere univocamente l'equazione data solo per valori di x vicino a x_0 con il vincolo che la soluzione y sia vicina a y_0, cioè di riuscire ad avere una funzione implicita definita solo in un intorno di x_0, unica se si impone che i suoi valori siano vicini a y_0.

Se una situazione analoga si ha se la variabile x è vettoriale, un po' più complesso è invece il caso in cui y sia una variabile vettoriale, nel quale l'equazione precedente diventa

$$\sum_{j=1}^{m} D_{y_j}\mathbf{f}(x_0,y_0)(y_j-y_{0j})=-D_x\mathbf{f}(x_0,y_0)(x-x_0)-o(|(x-x_0,y-y_0)|).$$

Siccome le incognite y_j sono ora in numero di m, occorrerà che altrettante siano le equazioni, cioè che la funzione $\mathbf{f}$ assuma valori in $\mathbb{R}^m$. Allora l'equazione linearizzata è un sistema e occorrerà supporre che la sua matrice, che è la jacobiana della funzione $y\mapsto\mathbf{f}(x_0,y)$ valutata nel punto y_0, non sia singolare già per poter risolvere il sistema linearizzato. Ebbene questa ipotesi garantisce la risolubilità anche del sistema $\mathbf{f}(x,y)=0$, ma locale, come afferma il risultato enunciato di seguito (senza dimostrazione per mancanza attuale di strumenti adeguati), il quale fornisce anche la regolarità C^1 della funzione $x\mapsto y$ che al generico x associa la soluzione y. Se però si è interessati solo a risolvere l'equazione, basta meno: la maggior regolarità può essere richiesta solo rispetto alla variabile y. In queste ipotesi si ha comunque la continuità della funzione $x\mapsto y$.

6.1. Teorema (del Dini, o della funzione implicita). *Denotate con x e y le variabili in $\mathbb{R}^n$ e in $\mathbb{R}^m$ rispettivamente, siano (x_0,y_0) un punto di $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ e $\mathbf{f}$ una funzione definita in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ contenente (x_0,y_0), a valori in $\mathbb{R}^m$ continua e dotata di dervate parziali $\partial\mathbf{f}/\partial y_i$ ($i=1,\ldots,m$) continue. Se la funzione $y\mapsto\mathbf{f}(x_0,y)$ ha jacobiana non singolare in y_0, allora esistono un intorno aperto Ω' di x_0 e un intorno aperto Ω'' di y_0 verificanti le condizioni seguenti: i) il prodotto $\Omega'\times\Omega''$ è incluso in Ω; ii) per ogni $x\in\Omega'$, il sistema $\mathbf{f}(x,y)=0$ nell'incognita $y\in\mathbb{R}^m$ ha in Ω'' una e una sola soluzione; iii) la funzione $\varphi:\Omega'\to\Omega''$ che a ogni $x\in\Omega'$ associa tale soluzione è continua. Se, in aggiunta alle ipotesi fatte, $\mathbf{f}$ è di classe C^1, allora esiste un intorno di x_0 in cui anche φ è di classe C^1.* □

La tesi della prima parte del teorema può essere sintetizzata nella frase seguente: l'insieme degli zeri della funzione $\mathbf{f}$ è, vicino al punto (x_0,y_0), il grafico di una funzione continua φ di n variabili a valori in $\mathbb{R}^m$.

L'ipotesi di non singolarità può essere riformulata come segue: i vettori dati dalle derivate $\partial\mathbf{f}/\partial y_i$ in (x_0,y_0) sono indipendenti. Nel caso in cui $\mathbf{f}$ è regolare questi vettori sono colonne della matrice jacobiana $J\mathbf{f}(x_0,y_0)$.

6.2. Esempio. Riprendiamo l'equazione $x^2+y^2=1$, che riscriviamo nella forma $f(x,y)=0$ ove $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ è data dalla formula $f(x,y)=x^2+y^2-1$. Chiaramente la derivata D_yf nel generico punto (x,y) vale $2y$ e si annulla nei punti del tipo $(x,0)$. Un punto (x_0,y_0) nelle condizioni dell'enunciato, dunque, deve verificare $x_0^2+y_0^2=1$ e $y_0\neq 0$, da cui anche $|x_0|<1$. In tali ipotesi resta definita la funzione implicita φ in un intorno di x_0, funzione che, nel nostro caso semplice, si calcola esplicitamente: supponendo per esempio $y_0<0$ abbiamo $\varphi(x)=-\sqrt{1-x^2}$.

Questa formula fornisce una delle due soluzioni dell'equazione data, precisamente quella "vicina" a y_0, se x appartiene all'intervallo $(-1,1)$. Possiamo cioè prendere, ad esempio, $\Omega' = (-1,1)$ e $\Omega'' = (-2,0)$. Si noti che la funzione φ è di classe C^1. Se invece $y_0 = 0$, abbiamo $D_y f(x_0, y_0) = 0$ e $x_0 = \pm 1$. Si noti allora che non vi è alcun intorno di x_0 in cui si possa definire la funzione implicita.

6.3. Osservazione. Nelle condizioni dell'ultima parte del Teorema del Dini, la funzione implicita è di classe C^1 almeno in un intorno di x_0. La dimostrazione di questo fatto si basa sulla considerazione dell'insieme Ω_1 costituito dai punti $x \in \Omega'$ tali che la jacobiana della funzione $y \mapsto \mathbf{f}(x,y)$ non è singolare nel punto $y = \varphi(x)$. Ebbene ciò che si dimostra è che Ω_1 è un intorno aperto di x_0 (e ciò è facile da controllare in quanto la condizione di non singolarità equivale al fatto che il deteminante della matrice non si annulla) e che, effettivamente, φ è di classe C^1 in Ω_1. Si noti che da $\mathbf{f}(x,\varphi(x)) = 0$ per ogni $x \in \Omega_1$, dalla regolarità C^1 di $\mathbf{f}$ e di φ e dalla formula di derivazione delle funzioni composte deduciamo che, per $i = 1, \ldots, n$, vale l'identità

$$D_{x_i}\mathbf{f}(x,\varphi(x)) + D_y\mathbf{f}(x,\varphi(x))\, D_{x_i}\varphi(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in \Omega_1 \tag{6.1}$$

nella quale $D_y\mathbf{f}(x,\varphi(x))$ denota la matrice jacobiana della funzione $y \mapsto \mathbf{f}(x,y)$ nel punto $y = \varphi(x)$. Ora, se $x \in \Omega_1$, la matrice $D_y\mathbf{f}(x,\varphi(x))$ non è singolare e il sistema (6.1) nell'incognita $D_{x_i}\varphi(x) \in \mathbb{R}^m$ ha una e una sola soluzione. Questa procedura può dunque essere utilizzata in tutti i casi concreti, con la sicurezza che essa è corretta se x varia in un certo intorno di x_0, e permette di calcolare le derivate di φ in x in funzione del valore $\varphi(x)$. Naturalmente questo valore è noto esplicitamente solo se $x = x_0$, nel qual caso esso vale y_0. □

Dal Teorema del Dini deduciamo il risultato seguente di invertibilità locale. L'esempio successivo mostra che l'invertibilità globale può essere falsa.

6.4. Teorema (della funzione inversa). *Siano Ω_0 sia un aperto di $\mathbb{R}^m$, $y_0 \in \Omega_0$ e $\mathbf{g} : \Omega_0 \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1 la cui jacobiana non sia singolare in nessun $y \in \Omega_0$. Allora esistono un intorno aperto Ω' di $\mathbf{g}(y_0)$ e un intorno aperto Ω'' di y_0 incluso in Ω_0 tali che la restrizione $\mathbf{g}|_{\Omega''}$ sia iniettiva, abbia Ω' come immagine e abbia inversa $\mathbf{u}$ di classe C^1. Vale inoltre la formula $J\mathbf{u}_x = (J\mathbf{g}_{\mathbf{u}(x)})^{-1}$ per ogni $x \in \Omega'$.* □

Dimostrazione. Poniamo $x_0 = \mathbf{g}(y_0)$ per comodità e consideriamo la funzione

$$\mathbf{f}(x,y) = \mathbf{g}(y) - x, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^m \times \Omega_0$$

osservando che essa è di classe C^1 e che la jacobiana di $y \mapsto \mathbf{f}(x,y)$ nel generico punto (x,y) coincide con la jacobiana di $\mathbf{g}$ in y. In particolare è lecito applicare il Teorema del Dini a $\mathbf{f}$ (dunque nel caso $n = m$) relativamente al punto (x_0, y_0). Troviamo due aperti Ω' e Ω_0'' di $\mathbb{R}^m$ contenenti x_0 e y_0 rispettivamente, con $\Omega_0'' \subseteq \Omega_0$, tali che per ogni $x \in \Omega'$ esista uno e un solo $y \in \Omega_0''$ verificante $\mathbf{g}(y) = x$. Denotiamo con $\mathbf{u}$ la funzione di Ω' in Ω_0'' che a ogni $x \in \Omega'$ associa l'unico $y \in \Omega_0''$ verificante $\mathbf{g}(y) = x$ e poniamo $\Omega'' = \mathbf{u}(\Omega')$. Allora $\mathbf{g}|_{\Omega''}$ è iniettiva e ha Ω' come immagine e $\mathbf{u}$ come inversa. Dimostriamo ora che Ω'' è aperto. Fissato $y_* \in \Omega''$ e posto $x_* = \mathbf{u}(y_*)$, consideriamo la funzione $\mathbf{f}_* : \Omega' \times \Omega_0'' \to \mathbb{R}^m$ definita dalla formula

$$\mathbf{f}_*(x,y) = \mathbf{g}(y) - x, \qquad (x,y) \in \Omega' \times \Omega_0''$$

e osserviamo che, essendo $\Omega' \times \Omega_0''$ aperto, anche in questo caso possiamo applicare il Teorema del Dini, ora relativamente al punto (x_*, y_*). Deduciamo che esistono un intorno aperto ω' di x_* incluso in Ω' e un intorno aperto ω'' di y_* incluso in Ω_0'' tali che per ogni $x \in \omega'$ esista uno e un solo $y \in \omega''$ verificante $\mathbf{g}(y) = x$. Ora, se $x \in \omega' \subseteq \Omega'$ e $y \in \omega'' \subseteq \Omega_0''$ sono legati dall'equazione $\mathbf{g}(y) = x$, risulta $y = \mathbf{u}(x)$ per definizione di $\mathbf{u}$, il che implica $y \in \Omega''$ per definizione di Ω''. Dunque ω'' è un intorno di y_* incluso in Ω''. Per l'arbitrarietà di y_*, Ω'' è aperto. Infine dobbiamo dimostrare che $\mathbf{u}$ è di classe C^1 e cha vale la formula dell'enunciato. Preso ad arbitrio $x^* \in \Omega'$ e riapplicato il Teorema del Dini, deduciamo che $\mathbf{u}$ è di classe C^1 in un intorno di x^* e l'arbitrarietà di x^* permette di concludere la regolarità C^1 di $\mathbf{u}$. Per quanto riguarda la formula, basta osservare che $\mathbf{g}(\mathbf{u}(x)) = x$ per ogni $x \in \Omega'$ e applicare il Teorema IV.8.3 di derivazione delle funzioni composte. □

6.5. Esempio. Consideriamo la funzione $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita dalla formula

$$\mathbf{g}(y_1, y_2) = (e^{y_1} \cos y_2, e^{y_1} \sin y_2).$$

un semplice calcolo permette di concludere che $J\mathbf{g}$ non è mai singolare. Ciò nonostante $\mathbf{g}$ non è iniettiva, dato che è periodica rispetto alla seconda variabile. Ciò mostra che un teorema di inversione globale necessiterebbe di ipotesi supplementari. Si noti che, se si identifica $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$ nel modo usuale, la funzione $\mathbf{g}$ viene a coincidere con l'esponenziale complesso.

6.6. Osservazione. Anche nel caso monodimensionale si possono costruire funzioni non iniettive con jacobiana mai singolare, cioè con derivata mai nulla, e un esempio è dato da $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$. Come però si nota, il dominio della funzione considerata non è l'intera retta, mentre nel caso dell'Esempio 6.5 il dominio era l'intero piano. Consideriamo ora una funzione reale f definita e di classe C^1 in un intervallo (e il caso dell'intera retta resta un caso particolare): usando strumenti che introdurremo in un capitolo successivo, si vede che f' non può cambiare segno, per cui si può applicare il Teorema IV.4.3 e concludere che f è strettamente monotona, dunque invertibile. In tali condizioni si può anche dimostrare che l'immagine di f è esso stesso un intervallo e che la funzione inversa è pure strettamente monotona, con lo stesso tipo di monotonia di f.

6.7. Esercizio. Si interpretino le (1.1) come un sistema nell'incognita (ρ, ϑ), ove le variabili $x = (x_1, x_2)$ e (ρ, ϑ) vengono lasciate variare in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e in $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ rispettivamente. Si dimostri che, per ogni x_0 e (ρ_0, ϑ_0) ammessi e legati fra loro dalle (1.1), sono verificate le ipotesi del Teorema della funzione inversa e si deduca che esistono intorni aperti dei due punti considerati fra i quali le (1.1) stabiliscono una corrispondenza biunivoca. Detta $x \mapsto (\rho(x), \vartheta(x))$ un'inversa locale qualunque della funzione $(\rho, \vartheta) \mapsto x$ definita dalle (1.1) nell'aperto $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$, dimostrare che valgono le formule $D_1\vartheta = -x_2/|x|^2$ e $D_2\vartheta = x_1/|x|^2$.

6.8. Esercizio. Si proceda analogamente per le (1.3). Ora x varia nell'aperto ottenuto privando $\mathbb{R}^3$ dell'asse x_3, mentre (ρ, ϑ, z) varia in $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^2$. Ancora si consideri un'inversa locale del tipo $x \mapsto (\rho(x), \vartheta(x), z(x))$ e si dimostrino le formule $D_1\vartheta = -x_2/(x_1^2 + x_2^2)$, $D_2\vartheta = x_1/(x_1^2 + x_2^2)$ e $D_3\vartheta = 0$.

7. Sul gradiente di una funzione scalare

Queste righe estendono e precisano il contenuto del Paragrafo IV.10.1. Segue una breve digressione su un argomento importante che però non ha potuto trovare spazio nel libro.

7.1. Teorema. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e x_0 un punto di Ω in cui ∇f non si annulla. Sia poi Γ l'insieme di livello di f che contiene x_0. Allora il cono $T_{x_0}\Gamma$ tangente a Γ in x_0 è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-1$ e $\nabla f(x_0)$ è normale a Γ in x_0.* □

Dimostrazione. Poniamo $c = f(x_0)$ in modo che $\Gamma = \Gamma_c$. Essendo $\nabla f(x_0)$ non nullo, una delle derivate parziali di f non è nulla in x_0. Per semplificare le notazioni supponiamo che questa sia la derivata $D_n f$ di f rispetto alla variabile x_n e, se x è il generico punto di $\mathbb{R}^n$, scriviamo x nella forma $x = (x', x_n)$ con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_n \in \mathbb{R}$. Siccome f è di classe C^1, la derivata $D_n f$ è continua. Allora esiste un intorno aperto di x_0 in tutti i punti del quale $D_n f$ non si annulla. Rimpiazzato Ω con tale intorno abbiamo $D_n f(x) \neq 0$ per ogni $x \in \Omega$ con il nuovo significato di Ω.

Premesso questo, possiamo applicare il Teorema del Dini alla funzione f e al punto $x_0 = (x_0', x_{0n})$ e risolvere localmente l'equazione $f(x', x_n) - c = 0$ rispetto alla variabile x_n. Esistono dunque un intorno aperto Ω' di x_0' e un intorno Ω_n di x_{0n} verificanti le condizioni seguenti: il prodotto $\Omega' \times \Omega_n$ è incluso in Ω; per ogni $x' \in \Omega'$ esiste uno e un solo $x_n \in \Omega_n$ verificante l'equazione $f(x', x_n) - c = 0$; la funzione $\varphi : \Omega' \to \Omega_n$ che al generico $x' \in \Omega'$ associa il corrispondente x_n è di classe C^1. Costruiamo ora la funzione $\mathbf{u} : \Omega' \to \mathbb{R}^n$ mediante la formula $\mathbf{u}(x') = (x', \varphi(x'))$. Essa è iniettiva e di classe C^1 con l'inversa, la sua jacobiana non è mai singolare e $\Gamma \cap (\Omega' \times \Omega_n)$ è l'immagine di Ω' tramite $\mathbf{u}$.

A questo punto possiamo caratterizzare l'insieme dei vettori tangenti grazie al Teorema 4.5: il cono $T_{x_0}\Gamma$ tangente a Γ in x_0 è uno spazio vettoriale di dimensione $n-1$, precisamente l'immagine del differenziale di $\mathbf{u}$ in x_0', cioè il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle derivate parziali di $\mathbf{u}$ nel punto x_0'.

Rimane da dimostrare che $\nabla f(x_0)$ è normale a $T_{x_0}\Gamma$, cioè normale a ogni vettore tangente. Per questo basta controllare che $\nabla f(x_0)$ è normale ai vettori di una base e come base prendiamo quella costituita dalle derivate parziali di $\mathbf{u}$ di cui sopra. Ebbene, essendo $f(\mathbf{u}(x')) = c$ per ogni $x' \in \Omega'$, la formula (IV.8.5) di derivazione delle funzioni composte fornisce subito

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} \frac{\partial u_k(x_0')}{\partial x_j} = \nabla f(x_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(x_0')}{\partial x_j}$$

per $j = 1, \ldots, n-1$, cioè l'ortogonalità desiderata. □

7.2. Potenziali. Siano $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (nelle applicazioni denota un campo vettoriale) e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. Se φ è differenziabile e $\nabla\varphi = \mathbf{f}$, si dice che φ è un potenziale di $\mathbf{f}$ (di $-\mathbf{f}$ secondo i fisici). Il Teorema 7.1 dice allora che il campo $\mathbf{f}$ è normale agli insiemi di livello del suo potenziale φ.

Ci concediamo una digressione riguardante la questione dell'esistenza di un potenziale, che è problematica, senza tuttavia giustificare le nostre affermazioni in questa sede.

Se $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^1, è condizione necessaria per l'esistenza del potenziale il sistema di uguaglianze $D_i f_j = D_j f_i$ per $i, j = 1, \ldots, n$, che di solito non è verificato se $n > 1$ (si provi con una funzione regolare presa a caso). Se questa condizione è soddisfatta e se la palla $B_r(x_0)$ è inclusa in Ω, allora $\mathbf{f}$ ha un *potenziale locale* definito in $B_r(x_0)$ e due potenziali locali φ e ψ differiscono per una costante (per $x \in B_r(x_0)$ fissato si applichi il Teorema della derivata nulla a $\lambda(t) = \varphi(\mathbf{r}(t)) - \psi(\mathbf{r}(t))$, $t \in [0,1]$, ove $\mathbf{r}(t) = x_0 + t(x - x_0)$). L'esistenza di un potenziale globale, cioè definito in tutto Ω, dipende allora dalla possibilità di coordinare le scelte delle costanti additive in modo che i vari potenziali locali "si incollino" in un'unica funzione, e questa possibilità *dipende dalla forma di* Ω (e solo da quella). Una condizione sufficiente su Ω perché la condizione detta sulle derivate di $\mathbf{f}$ sia sufficiente per l'esistenza di un potenziale globale è che Ω *sia un aperto semplicemente connesso*. In termini vaghi, questa ipotesi significa che ogni curva chiusa di Ω deve poter essere ridotta a un punto con una deformazione continua nell'ambito di Ω, oppure, equivalentemente e in termini altrettanto vaghi, che non vi siano curve chiuse di Ω "allacciate" al complementare di Ω. L'ipotesi di semplice connessione è soddisfatta ad esempio dagli aperti $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, ma non da $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$: non vi è modo di ridurre a un punto una circonferenza centrata nell'origine senza "uscire" da Ω (cioè senza passare per l'origine) durante la deformazione, dato che tale circonferenza è "allacciata" al complementare (l'origine). Nelle stesse condizioni è lo spazio tridimensionale privato di una retta.

Possiamo anche dare l'idea di un controesempio all'esistenza del potenziale globale in ciascuno di questi due casi appena citati. Nel primo di essi prendiamo $\mathbf{f}(x) = (-x_2, x_1)/|x|^2$. Allora $D_1 f_2 = D_2 f_1$, come si verifica eseguendo semplici calcoli, ma $\mathbf{f}$ non ha potenziali globali in quanto i vari potenziali locali φ sono connessi con le componenti ϑ delle inverse locali considerate nell'Esercizio 6.7 mediante formule del tipo $\varphi = \vartheta + c$ con c costante. Ora l'esistenza di un potenziale globale equivale alla possibilità di definire globalmente una ϑ corrispondente, il che non riesce in alcun modo visto il significato di ϑ.

Nel caso in cui Ω è lo spazio $\mathbb{R}^3$ privato dell'asse x_3 si ottiene una situazione perfettamente analoga (si controlli) con $\mathbf{f}(x) = (-x_2, x_1, 0)/(x_1^2 + x_2^2)$: i potenziali locali fanno intervenire la seconda coordinata cilindrica dell'Esercizio 6.8.

8. Applicazioni della teoria dell'integrazione

Questo paragrafo sostituisce ed estende il Paragrafo V.8. Se lo si colloca dopo il Paragrafo V.4 si possono giustificare praticamente tutte le affermazioni, tranne quelle dell'ultima sezione, che fa riferimento ai Paragrafi V.9 e V.7. Tuttavia può essere opportuno leggere queste righe subito dopo il Paragrafo V.3.

La teoria astratta dell'integrazione che abbiamo introdotto nel Paragrafo V.3 non richiede, almeno in linea di principio, che gli oggetti del discorso siano in qualche modo legati agli spazi euclidei. Naturalmente, in questo contesto generale, non abbiamo la nozione di continuità e non ha senso chiedersi se le funzioni continue siano integrabili. I primi degli esempi che proponiamo vogliono appunto rendere l'idea della situazione astratta, completamente sganciata dal contesto degli spazi euclidei.

D'altra parte, la nozione di integrale è assolutamente fondamentale nella descrizione in termini matematici di varie situazioni applicative e le sezioni successive forniscono qualche esemplificazione.

8.1. Masse concentrate. Consideriamo un insieme A costituito da un numero finito di elementi $x_1, \ldots, x_N$. Ad esempio A può essere un sacco di patate, $x_1, \ldots, x_N$ essendo le singole patate. Fissiamo inoltre N numeri positivi $m_1, \ldots, m_N$. Come semianello $\mathcal{E}$ prendiamo l'insieme 2^A costituito da tutti i sottoinsiemi di A (vuoto e A compresi) e come misura $m(E)$ dell'insieme elementare E scegliamo quella definita dalla formula

$$m(E) = \sum_{x_i \in E} m_i. \tag{8.1}$$

La scrittura (8.1) significa la somma dei valori m_i estesa a quegli indici i tali che $x_i \in E$, con la convenzione che la somma sia nulla se l'insieme di tali indici è vuoto. Ad esempio, se $N = 10$ e l'insieme E contiene i tre punti x_2, x_4 e x_5 dei dieci fissati e non altri, la misura di E vale $m_2 + m_4 + m_5$. Nel caso del sacco di patate, m_i potrebbe essere il peso della patata x_i. In tali condizioni la misura m ha il significato di peso e viene applicata a tutti i possibili insiemi di patate che si possono prendere dal sacco.

Nella situazione astratta considerata, tutte le funzioni sono a scala e l'applicazione delle definizioni della teoria a questo caso porta alla formula

$$\int_A f(x)\, dm = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, m_i \tag{8.2}$$

se $f : A \to \mathbb{R}$ è, appunto, una funzione qualunque.

In una direzione analoga si va prendendo come A un insieme che contiene non solo gli elementi $x_1, \ldots, x_N$ ma anche altri punti e definendo la misura ancora tramite la (8.1) su un ragionevole semianello di sottoinsiemi di A. In tali condizioni i punti di A diversi dai punti x_i privilegiati non contano ai fini della misura. Ad esempio, se A è un rettangolo tridimensionale, $\mathcal{E}$ potrebbe essere il semianello dei rettangoli inclusi in A e una possibile interpretazione modellistica di quanto stiamo facendo è la seguente: la misura m ha il significato di massa e tutta la massa è concentrata nei punti x_i fissati in accordo con valori m_i assegnati. In tal caso, però, non è più vero che tutte le funzioni sono a scala, ovviamente.

8.2. Esercizio. In relazione alla seconda parte della Sezione 8.1, si verifichi la validità della (8.2) nel caso delle funzioni a scala. Il lettore interessato agli aspetti più teorici può poi dimostrare che, in questo caso, tutte le funzioni limitate sono integrabili e che la (8.2) vale appunto per ogni funzione limitata.

8.3. Una misura atomica. Consideriamo un insieme non vuoto A e fissiamo un numero finito di sottoinsiemi $A_1, \ldots, A_N$ di A a due a due disgiunti e altrettanti numeri reali positivi $m_1, \ldots, m_N$. Come semianello $\mathcal{E}$ prendiamo quello definito dalla condizione seguente: un sottoinsieme $E \subseteq A$ appartiene ad $\mathcal{E}$ se e solo se, per $i = 1, \ldots, N$, il sottoinsieme A_i è incluso in E oppure è disgiunto da E (cioè non avviene che E contenga solo una parte di A_i). Definiamo infine la misura m mediante la formula

$$m(E) = \sum_{A_i \subseteq E} m_i \tag{8.3}$$

il cui significato è analogo a quello della (8.1). Ad esempio, se $N = 10$ e l'insieme E include i tre insiemi A_2, A_4 e A_5 ed è disgiunto dagli altri fissati, la misura di E vale $m_2 + m_4 + m_5$.

Così facendo si ottiene uno spazio elementare di misura, ma il semianello e la misura “vedono” ciascuno degli A_i come un “atomo inscindibile”, cioè come se esso fosse un singolo punto, e le funzioni a scala devono assumere valore costante su ciascuno degli A_i.

Ancora funziona l'interpretazione delle patate e del loro peso, ma qui le patate sono sottoinsiemi e non elementi e il sacco può contenere altro. Chi sta pesando si rifiuta di pesare patate a pezzi, mentre è disposto anche a sbriciolare il resto.

8.4. Masse distribuite. Consideriamo un rettangolo A dello spazio tridimensionale e l'usuale semianello $\mathcal{E}$ dei rettangoli inclusi in A, ma definiamo la misura $m(E)$ del generico $E \in \mathcal{E}$ per mezzo di un integrale. Poniamo

$$m(E) = \int_E \rho(x)\, dx$$

ove ρ è una funzione definita in A a valori reali non negativi integrabile e l'integrale è un integrale triplo usuale, cioè costruito a partire dalla misura-volume, fatto segnalato dall'uso di dx. Effettivamente m è una misura elementare (vedi Paragrafo V.4), per cui possiamo parlare di integrali. Se si vuole attribuire a $m(E)$ il significato di *massa di* E, occorre pensare che ρ denoti la *densità di volume*. Senza indagare ora sul significato dell'integrabilità, segnaliamo che l'integrale è espresso dalla formula

$$\int_A f(x)\, dm = \int_A f(x)\rho(x)\, dx$$

per una vasta classe di funzioni.

8.5. Masse distribuite su curve e superfici. Sostituiamo ora il rettangolo dell'esempio precedente con una curva del piano o dello spazio oppure con una superficie dello spazio, curva o superficie che continuiamo a chiamare A per conservare la notazione generale. Possiamo riferirci, per fissare le idee, alle situazioni elementari delle Sezioni V.3.4 e V.3.6, ma il caso del cilindro sarebbe perfettamente analogo. Conserviamo allora la scelta del semianello $\mathcal{E}$ degli insiemi elementari fatta in quei casi, ma modifichiamo la definizione della misura prendendo come $m(E)$ gli integrali di linea o di superficie

$$m(E) = \int_E \rho(x)\, ds \qquad \text{e} \qquad m(E) = \int_E \rho(x)\, dS$$

nel caso della circonferenza e della sfera rispettivamente. Nei due casi ρ è una funzione definita sulla circonferenza o sulla sfera a valori reali non negativi integrabile e gli integrali scritti sono costruiti a partire dalla misura-lunghezza e dalla misura-area rispettivamente, come indicano i termini ds e dS. In ciascuno dei due casi si può dimostrare che m è ancora una misura elementare (vedi Paragrafo V.4) e che, per una vasta classe di funzioni f, l'integrale corrispondente è espresso dalle formule

$$\int_A f(x)\, dm = \int_A f(x)\rho(x)\, ds \qquad \text{e} \qquad \int_A f(x)\, dm = \int_A f(x)\rho(x)\, dS$$

rispettivamente nel caso della circonferenza e della sfera. Se ancora vogliamo parlare di massa, la funzione ρ è una *densità lineare* e una *densità superficiale* rispettivamente. Stiamo dunque descrivendo in termini matematici ciò che usualmente viene chiamata *curva materiale* o *superficie materiale* nei due casi.

8.6. Masse su curve e superfici: un altro approccio. Illustriamo il caso di una massa uniformemente distribuita su una circonferenza, ma considerazioni analoghe si possono fare in altre situazioni, ad esempio per la sfera. Fissiamo dunque una circonferenza C del piano $\mathbb{R}^2$ e cerchiamo di vedere gli integrali su C rispetto alla lunghezza d'arco non direttamente come è stato fatto nella Sezione V.3.4 ma come integrali sull'intero piano rispetto a una misura m opportuna. Prendiamo allora come ambiente $\mathbb{R}^2$ e come semianello $\mathcal{E}$ degli insiemi elementari quello costituito dai consueti rettangoli e, se $E \in \mathcal{E}$, definiamo $m(E)$ come segue: osservato che $E \cap C$ è o un arco di C (eventualmente degenere, ad esempio vuoto) o l'unione di due archi di C, denotiamo con

$m(E)$ la lunghezza complessiva di $E \cap C$. In tal modo si ottiene uno spazio elementare di misura e la formula

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, dm = \int_C f(x)\, ds$$

vale per una vasta classe di funzioni. □

Gli esempi precedenti suggeriscono una generalizzazione della teoria che comprenda non solo le masse, concentrate o distribuite, ma anche le cariche elettriche. Dovremmo dunque parlare di *misure relative*, cioè di misure che possono assumere valori negativi. Ci limitiamo a segnalare che questa teoria esiste e preferiamo non andare oltre queste parole.

8.7. Misure composite. Consideriamo due spazi di misura $(A, \mathcal{E}, m_1)$ e $(A, \mathcal{E}, m_2)$ aventi lo stesso insieme ambiente e lo stesso semianello di insiemi elementati ma, in generale, due diverse misure. Se poniamo

$$m(E) = m_1(E) + m_2(E) \qquad \text{per } E \in \mathcal{E} \tag{8.4}$$

anche $(A, \mathcal{E}, m)$ è uno spazio di misura, come si verifica immediatamente. Prendiamo ad esempio come A un rettangolo tridimensionale e come $\mathcal{E}$ il semianello dei rettangoli inclusi in A e scegliamo come m_1 e m_2 due misure corrispondenti a masse distribuite su una curva Γ e su una superficie Σ rispettivamente (vedi Sezione 8.4). Stiamo allora introducendo un modello di un oggetto materiale, unione di Γ e di Σ, sul quale è concentrata tutta la massa presente nel rettangolo.

8.8. Lavoro e flusso. Riteniamo opportuno segnare fin d'ora due casi importanti di integrali di linea e di superficie

$$\int_\Gamma \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{t}(x)\, ds \qquad \text{e} \qquad \int_\Sigma \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{n}(x)\, dS. \tag{8.5}$$

In queste formule Γ e Σ sono una curva e, rispettivamente, una superficie di $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}$ è una funzione assegnata a valori in $\mathbb{R}^3$, che nelle applicazioni è un campo vettoriale, e $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ sono due funzioni definite e *continue* (questa ipotesi è importante) su Γ e su Σ rispettivamente verificanti le condizioni seguenti: per ogni $x \in \Gamma$, $\mathbf{t}(x)$ è un *versore tangente* a Γ in x; per ogni $x \in \Sigma$, $\mathbf{n}(x)$ è un *versore normale* a Σ in x. Notiamo che, se $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ sono in queste condizioni, nelle stesse condizioni sono i loro opposti $-\mathbf{t}$ e $-\mathbf{n}$. In generale la determinazione di $\mathbf{t}$ corrisponde a una scelta del *verso di percorrenza* di Γ, mentre la scelta di $\mathbf{n}$ corrisponde a privilegiare una "pagina" della superficie Σ (la si pensi come un foglio).

Naturalmente tutto ciò è a livello intuitivo nel caso generale e può avere un significato preciso, almeno per ora, solo nelle situazioni in cui lo spazio di misura è stato effettivamente introdotto. Così, se Γ è la circonferenza della Sezione V.3.4 oppure un suo arco, una scelta di $\mathbf{t}$ è data da $\mathbf{t}(x) = (-x_2, x_1)/R$ e corrisponde al verso di percorrenza antiorario. Se Σ è l'emisfero superiore ($x_3 \geq 0$) della sfera della Sezione V.3.6, la "pagina superiore" di Σ è individuata dalla scelta di $\mathbf{n}$ data dalla formula $\mathbf{n}(x) = x/R$. Questa stessa formula, nel caso dell'intera sfera, determinerebbe quella che può essere chiamata "pagina esterna".

Se $\mathbf{f}$ ha il significato di forza, il primo degli integrali (8.5) si interpreta come *lavoro* della forza in corrispondenza allo spostamento lungo la curva Γ orientata come descritto da $\mathbf{t}$. Allora il lavoro cambia di segno se si inverte l'orientamento di Γ, cioè se si prende $-\mathbf{t}$ al posto di $\mathbf{t}$, dato che di segno cambia la funzione integranda $\mathbf{f} \cdot \mathbf{t}$ (vedi Paragrafo V.4 per il caso generale, ma l'affermazione si giustifica facilmente nel caso dell'integranda a scala).

Indipendentemente dal significato della funzione $\mathbf{f}$, se Γ è una curva chiusa (come una circonferenza) il primo degli integrali (8.5) si chiama anche *circuitazione* di $\mathbf{f}$ lungo Γ. Per evidenziare anche nel simbolo il fatto che Γ è chiusa si usa anche la notazione

$$\oint_\Gamma \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{t}(x)\, ds.$$

Il secondo degli integrali (8.5) si chiama in generale *flusso* del campo $\mathbf{f}$ attraverso la superficie Σ nella direzione indicata da $\mathbf{n}$. Segnaliamo che alcuni usano le notazioni

$$\int_\Gamma \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{ds} \quad \Big(\text{o con il simbolo } \oint \text{ se } \Gamma \text{ è chiusa}\Big) \quad \text{e} \quad \int_\Sigma \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{dS}$$

in sostituzione delle rispettive (8.5). Dunque gli oggetti **ds** e **dS** sono pensati come un vettore tangente alla curva di lunghezza ds e, rispettivamente, come un vettore normale alla superficie di area dS. Naturalmente queste sono da pensare come notazioni simboliche, dato che non abbiamo mai attribuito a ds e a dS un senso che vada oltre la notazione appunto.

8.9. Baricentri. La nozione di media si estende con la stessa formula al caso in cui la funzione integranda assume valori vettoriali e, fra le tante applicazioni possibili di questo concetto, segnaliamo la definizione di *baricentro*. Se lo spazio di misura ha ambiente A incluso in $\mathbb{R}^3$, il generico sottoinsieme B di A può essere pensato come un corpo. Questo sarà un solido nel senso intuitivo del termine se A è, ad esempio, l'intero spazio o un rettangolo e la misura è il volume oppure una massa distribuita (vedi Sezione 8.4), ma può essere anche un oggetto sottile (vedi Sezione 8.5). Se, in ciascuno di questi casi, attribuiamo alla misura m il significato di massa, il baricentro di B è il punto $G \in \mathbb{R}^3$ dato dalla formula

$$G = \fint_B x\,dm$$

e può appartenere o meno a B. Le sue coordinate sono date dalle formule

$$x_i(G) = \fint_B x_i\,dm, \quad i = 1,2,3$$

e corrispondono al caso particolare della media della funzione $x \mapsto x_i$. Nel caso poi di un corpo costituito da un numero finito di punti (vedi Sezione 8.1) il baricentro è una loro media pesata.

9. Confronti fra teorie dell'integrazione

Questo paragrafo è un complemento al Paragrafo V.5 e riguarda il confronto fra diverse teorie dell'integrazione. Il primo dei due risultati che presentiamo fa intervenire due spazi di misura sullo stesso insieme e fornisce condizioni perché le corrispondenti teorie dell'integrazione e della misura siano le stesse; il secondo concerne l'integrazione su sottoinsiemi.

9.1. Teorema. *Siano $(A, \mathcal{E}', m')$ e $(A, \mathcal{E}'', m'')$ due spazi di misura costruiti sullo stesso insieme A. Siano $\mathcal{I}'$ e $\mathcal{I}''$ le due classe delle funzioni integrabili e $\mathcal{M}'$ e $\mathcal{M}''$ le due classi degli insiemi misurabili. Allora sono equivalenti le tre condizioni seguenti:*

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I}'' \quad \text{e} \quad \int_A f\,dm' = \int_A f\,dm'' \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{I}' \tag{9.1}$$

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M}'' \quad \text{e} \quad m'(B) = m''(B) \quad \text{per ogni } B \in \mathcal{M}' \tag{9.2}$$

$$\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{M}'', \quad \mathcal{E}'' \subseteq \mathcal{M}' \quad \text{e} \quad m'(E) = m''(E) \quad \text{per ogni } E \in \mathcal{E}' \cup \mathcal{E}''. \ \square \tag{9.3}$$

Dimostrazione. Supponiamo la (9.1) e dimostriamo la (9.2). Sia $B \in \mathcal{M}'$ e sia χ la funzione caratteristica di B. Allora $\chi \in \mathcal{I}'$. Usando l'ipotesi deduciamo $\chi \in \mathcal{I}''$, cioè $B \in \mathcal{M}''$. Ciò mostra che $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}''$ e l'inclusione opposta si ottiene scambiando i ruoli dei due spazi. Per quanto riguarda l'uguaglianza delle due misure, basta applicare l'ipotesi di uguaglianza degli integrali alle funzioni caratteristiche degli insiemi misurabili.

Supponiamo ora che sia verificata la condizione (9.2) e dimostriamo la (9.3). Ma ciò è immediato, date le inclusioni $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{M}'$ e $\mathcal{E}'' \subseteq \mathcal{M}''$.

Per concludere supponiamo che valga la (9.3) e dimostriamo la (9.1). Visto il ruolo simmetrico giocato dai due spazi, è sufficiente dimostrare che, se $f \in \mathcal{I}'$, allora $f \in \mathcal{I}''$ e i due integrali di f coincidono. Siano dunque $f \in \mathcal{I}'$ e I il suo integrale nel senso del primo spazio. Dimostriamo che $f \in \mathcal{I}''$ e che il suo integrale nel senso del secondo spazio vale I usando la Proposizione V.4.3. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo due funzioni $s''_\pm$ a scala nel senso del secondo spazio tali che $s''_- \le f \le s''_+$ e verificanti le due disuguaglianze

$$\int_A s'_-(x)\,dm'' \ge I - \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \int_A s''_+(x)\,dm'' \le I + \varepsilon. \tag{9.4}$$

Costruiamo, ad esempio, solo la funzione s''_+ verificando quanto la riguarda, dato che quanto occorre fare relativamente a s''_- è del tutto analogo. Per definizione di integrale esiste una funzione s'_+ a scala nel senso del primo spazio tale che $s'_+ \geq f$ e verificante la disuguaglianza

$$\int_A s'_+(x)\, dm' \leq I + \varepsilon. \tag{9.5}$$

Rappresentata tale funzione come prescritto dalla Definizione V.3.8, troviamo un numero finito p di insiemi $E'_k \in \mathcal{E}'$ a due a due disgiunti e altrettante costanti c_k tali che $f(x) = c_k$ se $x \in E'_k$ ($k = 1, \dots, p$) e $f(x) = 0$ se x non appartiene ad alcuno degli insiemi E'_k. Osserviamo che, detta χ_k la funzione caratteristica di E'_k, risulta

$$s'_+ = \sum_{k=1}^{p} c_k \chi_k.$$

Ora, per ipotesi, abbiamo che $E'_k \in \mathcal{M}''$ e $m''(E'_k) = m'(E'_k)$ per ogni k. Allora, sempre per ogni k, la funzione χ_k è integrabile nel senso del secondo spazio e il suo integrale vale $m''(E'_k)$. Per il Teorema di linearità è integrabile anche s'_+ e si ha

$$\int_A s'_+(x)\, dm'' = \sum_{k=1}^{p} c_k\, m''(E'_k) = \sum_{k=1}^{p} c_k\, m'(E'_k) = \int_A s'_+(x)\, dm'.$$

Applicando ora la definizione di integrale (nel senso del secondo spazio) a s'_+ troviamo una funzione s''_+ a scala (nel senso del secondo spazio appunto) tale che $s''_+ \geq s'_+$ e verificante la disuguaglianza

$$\int_A s''_+(x)\, dm'' \leq \int_A s'_+(x)\, dm'' + \varepsilon. \tag{9.6}$$

Allora $s''_+ \geq s'_+ \geq f$ e, combinando la (9.6) con la (9.5), deduciamo la seconda delle (9.4) con 2ε anziché con ε. □

L'interesse del teorema precedente è chiaro: per decidere che le due teorie dell'integrazione e della misura sono le stesse (e il significato preciso di questo è dato dalle (9.1) e (9.2)) è sufficiente verificare la (9.3), che è quella che fra le tre condizioni sembra di più facile controllo.

Consideriamo ad esempio il caso degli integrali doppi e immaginiamo di prendere due diversi sistemi cartesiani di riferimento. Se il passaggio dall'uno all'altro è dato semplicemente da una traslazione di assi, allora il significato della parola "rettangolo" è lo stesso nei due casi e tutta la teoria che ne consegue è ovviamente la stessa. Questa conclusione, al contrario, non è affatto ovvia (anche se plausibile) se il cambiamento di coordinate comporta anche una rotazione di assi, dato che, in questo caso, sono diverse le famiglie degli insiemi elementari. Allora, per verificare che le due conseguenti teorie sono le stesse, è sufficiente, fissato un riferimento cartesiano che porta, diciamo, al primo spazio di misura, controllare che anche ogni rettangolo con lati non paralleli agli assi (in questa categoria ci sono tutti i rettangoli dell'altro spazio di misura) è misurabile e che la sua area si ottiene moltiplicando le lunghezze di due suoi lati perpendicolari (che è quanto si ottiene misurando nel senso del secondo spazio gli insiemi elementari del secondo spazio appunto). Ovviamente questo tipo di controllo può essere fatto senza difficoltà particolari, ma noi preferiamo soprassedere.

Una situazione del tutto analoga, anche se più complessa dal punto di vista tecnico, si ha per quanto riguarda gli integrali multipli su $\mathbb{R}^n$ e gli integrali sulla sfera. In quest'ultimo caso il cambiamento di riferimento cartesiano nello spazio ambiente comporta un diverso dignificato dei termini "meridiano" e "parallelo", dunque effettivamente una scelta diversa degli insiemi elementari.

9.2. Teorema. *Siano $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio elementare di misura e $B \subseteq A$ un sottoinsieme misurabile non vuoto. Si introducano la famiglia $\mathcal{E}'$ e la funzione $m' : \mathcal{E}' \to \mathbb{R}$ come segue*

$$\mathcal{E}' = \{E \cap B : \ E \in \mathcal{E}\} \quad e \quad m'(E') = m(E') \quad per\ E' \in \mathcal{E}'. \tag{9.7}$$

Allora $(B, \mathcal{E}', m')$ è uno spazio elementare di misura. Inoltre un sottoinsieme $C \subseteq B$ è misurabile nel senso dello spazio $(B, \mathcal{E}', m')$ se e solo se esso è misurabile nel senso dello spazio $(A, \mathcal{E}, m)$ e, in caso di misurabilità, $m'(C) = m(C)$. Infine una funzione $f : B \to \mathbb{R}$ è integrabile nel senso dello spazio $(B, \mathcal{E}', m')$ se e solo se essa è integrabile nel senso dello spazio $(A, \mathcal{E}, m)$ e, in caso di integrabilità, gli integrali nei due sensi coincidono. □

Dimostrazione. Osserviamo che ogni elemento di $\mathcal{E}'$ è intersezione di due insiemi misurabili nel senso dello spazio $(A, \mathcal{E}, m)$. In particolare la definizione di m' ha senso e resta inteso che il significato di $m'(C)$ nella seconda tesi è nel senso della teoria della misura di sottoinsiemi costruita a partire dallo spazio $(B, \mathcal{E}', m')$. La verifica delle proprietà richieste dalla definizione di spazio elementare di misura è laboriosa ma priva di difficoltà. A titolo esemplificativo dimostriamo la meno immediata delle proprietà di semianello. Siano $E^*, E_* \in \mathcal{E}'$. Dobbiamo mostrare che esiste un numero finito di insiemi $E'_k \in \mathcal{E}'$ a due a due disgiunti la cui unione sia $E^* \setminus E_*$. Per definizione abbiamo $E^* = E^\bullet \cap B$ e $E_* = E_\bullet \cap B$ per certi $E^\bullet, E_\bullet \in \mathcal{E}$. Siccome $\mathcal{E}$ è un semianello, esistono $E_1, \ldots, E_p \in \mathcal{E}$ a due a due disgiunti la cui unione sia $E^\bullet \setminus E_\bullet$. Poniamo $E'_k = E_k \cap B$ per $k = 1, \ldots, p$. Allora ogni E'_k appartiene a $\mathcal{E}'$ e tali insiemi sono a due a due disgiunti. Abbiamo poi

$$E^* \setminus E_* = (E^\bullet \cap B) \setminus (E^\bullet \cap B) = (E^\bullet \setminus E^\bullet) \cap B = \left(\bigcup_{k=1}^{p} E_k \right) \cap B = \bigcup_{k=1}^{p} (E_k \cap B) = \bigcup_{k=1}^{p} E'_k.$$

Per comodità, fino alla fine della dimostrazione usiamo le abbreviazioni seguenti: diciamo *nel senso di* A e *nel senso di* B per intendere nel senso della teoria costruita a partire dagli spazi $(A, \mathcal{E}, m)$ e $(B, \mathcal{E}', m')$ rispettivamente. Osserviamo poi che la seconda tesi si ottiene dalla terza considerando la funzione caratteristica del sottoinsieme C considerato, per cui basta dimostrare la terza tesi appunto.

Sia dunque $f : B \to \mathbb{R}$. Supponiamo f integrabile nel senso di A e denotiamo con I il suo integrale. Dobbiamo dimostrare che f è integrabile nel senso di B e che il suo integrale in questo senso è ancora I e, a tale scopo, usiamo la Proposizione V.4.3. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo due funzioni $s'_\pm : B \to \mathbb{R}$ a scala nel senso di B tali che $s'_- \le f \le s'_+$ e verificanti le due disuguaglianze

$$\int_B s'_-(x)\, dm' \ge I - \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \int_B s'_+(x)\, dm' \le I + \varepsilon.$$

Anche in questo caso costruiamo solo, ad esempio, la funzione s'_+. Per definizione di I esiste $s_+ : A \to \mathbb{R}$ a scala nel senso di A tale che $s_+ \ge \widetilde{f}$ e verificante la disuguaglianza

$$\int_A s_+(x)\, dm \le I + \varepsilon.$$

Denotiamo con s'_+ la restrizione di s_+ a B e verifichiamo che s'_+ è a scala nel senso di B. Rappresentata s_+ con gli insiemi $E_1, \ldots, E_q \in \mathcal{E}$ a due a due disgiunti e con altrettante costanti $c_1, \ldots, c_q$ in accordo con la definizione di funzione a scala, rinumeriamo se necessario gli insiemi E_k in modo che $E_k \cap B$ sia non vuoto se $k \le p$ e vuoto altrimenti e poniamo $E'_k = E_k \cap B$ e $c'_k = c_k$ per $k = 1, \ldots, p$. Verifichiamo che tali insiemi e tali costanti fanno al caso nostro. Tali E'_k appartengono a $\mathcal{E}'$ e sono a due a due disgiunti. Se $k \le p$ e $x \in E'_k$ allora $x \in B$ e $x \in E_k$, per cui $s'_+(x) = s(x) = c_k = c'_k$. Se $x \in B$ ma x non appartiene ad alcuno degli insiemi $E'_1, \ldots, E'_p$, allora x non appartiene nemmeno a uno degli insiemi $E_1, \ldots, E_q$, per cui $s'_+(x) = s_+(s) = 0$. Ciò mostra che s'_+ è a scala nel senso di B. Inoltre $s'_+(x) = s_+(x) \ge \widetilde{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in B$. Osservato che $s_+(x) \ge \widetilde{f}(x) = 0$ per ogni $x \in A \setminus B$, abbiamo infine

$$\begin{aligned} \int_B s'_+(x)\, dm' &= \sum_{k=1}^{p} c'_k m'(E'_k) = \sum_{k=1}^{p} c_k m(E_k \cap B) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \int_{E_k \cap B} s_k(x)\, dm = \int_B s_k(x)\, dm \le \int_A s_k(x)\, dm \le I + \varepsilon. \end{aligned}$$

Viceversa, supponiamo f integrabile nel senso di B con integrale I e dimostriamo che f è integrabile nel senso di A con lo stesso integrale. Ancora usiamo la Proposizione V.4.3 e, fissato $\varepsilon > 0$, costruiamo la funzione $s_+ : A \to \mathbb{R}$ a scala nel senso di A verificante $s_+ \geq \widetilde{f}$ e avente integrale $\leq I + 2\varepsilon$. Per definizione di I esiste una funzione $s'_+ : B \to \mathbb{R}$ a scala nel senso di B verificante $s'_+ \geq f$ in B e tale che

$$\int_B s'_+(x)\,dm' \leq I + \varepsilon.$$

In particolare s'_+ è integrabile su B nel senso di A, in quanto essa è costante su insiemi, in numero finito, del tipo $E \cap B$ con $E \in \mathcal{E}$ e tali insiemi sono misurabili nel senso di A, per cui si può usare la proprietà additiva e dedurre sia l'integrabilità voluta sia il fatto che i suoi integrali nel senso di A e nel senso di B coincidono. Esiste dunque una funzione $s_+ : A \to \mathbb{R}$ a scala nel senso di A tale che $s_+ \geq \widetilde{f}$ e verificante la disuguaglianza

$$\int_A s_+(x)\,dm \leq \int_A \widetilde{s'_+}(x)\,dm + \varepsilon.$$

Abbiamo allora

$$\int_A s_+(x)\,dm \leq \int_B s'_+(x)\,dm + \varepsilon \leq \int_B s'_+(x)\,dm' + \varepsilon \leq I + 2\varepsilon$$

e la dimostrazione è conclusa. □

Il risultato precedente assicura ad esempio che, nel caso degli integrali doppi su un sottoinsieme B del piano, non ha importanza la scelta dello spazio di misura ambiente nell'ambito dei rettangoli con la misura usuale.

10. Integrazione delle funzioni razionali

Questo paragrafo sostituisce estendendolo il Paragrafo VIII.4 e mostra come la possibilità di calcolare l'integrale di una funzione razionale dipenda esclusivamente da questioni di carattere algebrico.

Supponiamo che l'integrando sia il quoziente $P(x)/Q(x)$ di due polinomi senza fattori comuni. La situazione "buona" riguarda il caso in cui il grado p di P sia minore del grado q di Q, ma a questo caso possiamo sempre ricondurci facilmente. Infatti, se $p \geq q$, possiamo eseguire la divisione con resto e trovare due nuovi polinomi R e S, di gradi rispettivi r e s, tali che

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x) \qquad \text{e} \qquad r < q.$$

Abbiamo pertanto

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad \text{e} \qquad r < q.$$

D'ora in poi supponiamo allora $p < q$. Esaminiamo il caso in cui il denominatore si presenti come prodotto di tipo particolare di polinomi di primo grado:

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_q)}$$

ove supponiamo che i punti $x_1, \ldots, x_q$ sono *tutti diversi fra loro*. Allora si possono cercare numeri reali $c_1, \ldots, c_q$ tali che risulti

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_q)} = \frac{c_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{c_q}{x-x_q}.$$

Operativamente si eliminano i denominatori nell'ultima uguaglianza e si porta tutto in un membro. Se il grado di $P(x)$ è $< q$, si ottiene un'uguaglianza del tipo $\mathcal{P}(x) = 0$ ove $\mathcal{P}(x)$ è un polinomio di grado $q-1$ i cui coefficienti, il cui numero è allora q, dipendono linearmente dai parametri c_k. L'uguaglianza è allora soddisfatta se i coefficienti di $\mathcal{P}(x)$ sono tutti nulli. Imponendo ciò si ottiene un sistema lineare di q equazioni in altrettante incognite $c_1, \ldots, c_q$ e si può dimostrare che tale sistema ha una e una sola soluzione proprio quando i punti $x_1, \ldots, x_q$ sono distinti. Abbiamo ad esempio

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} \overset{?}{=\!=} \frac{c_1}{x-2} + \frac{c_2}{x-3}$$

e il procedimento indicato porta all'uguaglianza

$$(c_1 + c_2)x - 3c_1 - 2c_2 - 1 = 0.$$

Questa equivale al sistema $c_1 + c_2 = 3c_1 + 2c_2 + 1 = 0$, la soluzione del quale è data da $c_1 = -1$ e $c_2 = 1$. Il corrispondente integrale si calcola allora direttamente con il Teorema VIII.1.5. Ad esempio

$$\int_4^5 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = -\int_4^5 \frac{dx}{x-2} + \int_4^5 \frac{dx}{x-3} = -\ln 3 + \ln 2 + \ln 2 - \ln 1 = 2\ln 2 - \ln 3.$$

Tuttavia un polinomio a coefficienti reali non è necessariamente fattorizzabile nella forma ora considerata, sia perché alcune delle sue radici complesse non sono reali, sia perché le varie radici possono avere una molteplicità. A meno di una costante moltiplicativa (che si raccoglie e si porta fuori dall'integrale) la situazione generale è la seguente:

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{\mu_k} \prod_{k=1}^{n} \left((x - a_k)^2 + b_k^2\right)^{\nu_k}.$$

Questa decomposizione corrisponde alle radici complesse dell'equazione $Q(x) = 0$ ripartite come segue: x_k con $k = 1, \ldots, m$ sono le radici reali e μ_k sono le rispettive molteplicità; $a_k \pm ib_k$ con $k = 1, \ldots, n$ e $b_k > 0$ sono le radici non reali (coniugate a due a due) e ν_k sono le rispettive molteplicità. Naturalmente se le radici fossero tutte di uno stesso tipo occorrerebbe ignorare uno dei due prodotti nella fattorizzazione scritta sopra. Anche in questo caso generale è possibile decomporre la frazione P/Q in una somma che meglio si presta all'operazione di integrazione. Abbiamo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x) \tag{10.1}$$

ove le funzioni φ_k ($k = 1, \ldots, m$) e ψ_k ($k = 1, \ldots, n$) sono date dalle formule

$$\varphi_k(x) = \sum_{j=0}^{\mu_k - 1} \frac{c_{kj}}{(x - x_k)^j} \qquad \text{e} \qquad \psi_k(x) = \sum_{j=0}^{\nu_k - 1} \frac{d_{kj}x + e_{kj}}{((x - a_k)^2 + b_k^2)^j} \tag{10.2}$$

per opportune costanti c_{kj}, d_{kj}, e_{kj}. Si noti che il numero di tali costanti è dato da $\sum_{k=1}^{m} \mu_k + \sum_{k=1}^{n} 2\nu_k$ e dunque vale il grado q di Q. Si noti inoltre che, se si riuniscono tutte queste formule per ricostruire il secondo membro della (10.1) e si riduce questo ad una unica frazione di denominatore Q, al numeratore compare un polinomio di grado $\leq q - 1$ e si ottiene una situazione simile a quella del primo membro. Dunque, anche in questo caso generale, la procedura di determinazione delle costanti è la stessa dal punto di vista operativo: si eliminano i denominatori nella (10.1) e si porta tutto in un membro. Ancora si ottiene un'uguaglianza del tipo $\mathcal{P}(x) = 0$, nella quale è inteso che il polinomio $\mathcal{P}$ vada riordinato secondo le potenze decrescenti (o crescenti) in modo da evidenziare i suoi coefficienti, che sono in numero di q e dipendono dalle costanti da determinare. Ancora il fatto che $\mathcal{P}$ sia identicamente nullo è certamente garantito se i suoi coefficienti sono tutti nulli. Imponendo ciò si ottiene un sistema *lineare* le cui incognite sono le q costanti da determinare e, per quanto detto sopra, il numero delle equazioni è pari a quello delle incognite. Ebbene si può dimostrare che tale sistema ha una e una sola soluzione. Illustriamo la procedura considerando la frazione

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x^4+2}{x^3(x^2+x+1)^2}$$

che corrisponde al caso $q=7$, $m=n=1$, $\mu_1=3$ e $\nu_1=2$. Abbiamo allora

$$\varphi_1(x) = \frac{c_{11}}{x} + \frac{c_{12}}{x^2} + \frac{c_{13}}{x^3} \quad \text{e} \quad \psi_1(x) = \frac{d_{11}x+e_{11}}{x^2+x+1} + \frac{d_{12}x+e_{12}}{(x^2+x+1)^2}\,.$$

Il polinomio $\mathcal{P}$ che deve risultare nullo è allora dato dalla formula

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x) = 3x^4 + 2 - (c_{11}x^2 + c_{12}x + c_{13})(x^2+x+1)^2 \\ - x^3(d_{11}x+e_{11})(x^2+x+1) - x^3(d_{12}x+e_{12})\end{aligned}$$

e ha grado 6, dunque 7 coefficienti nella sua scrittura come somma di monomi a potenze decrescenti (o crescenti). Annullando tali coefficienti si ottengono pertanto 7 equazioni, che chiaramente risultano lineari, aventi come incognite le costanti da determinare, che pure sono in numero di 7 e che, come si è detto, restano individuate univocamente.

Ora ciascuna delle funzioni φ_k della (10.2) è di integrazione immediata: le primitive sono logaritmi nel caso di radici semplici e somme di logaritmi e di funzioni razionali nel caso di radici multiple. Più complessa è, invece, l'integrazione delle funzioni ψ_k, per ciascuna delle quali conviene usare una sostituzione diversa. Dunque, operativamente, conviene integrare queste funzioni una alla volta e riunire i risultati dell'integrazione solo in un secondo momento. La sostituzione che conviene usare nell'integrazione di ψ_k è la seguente: $x = a_k + b_k y$. Per il generico addendo di ψ_k abbiamo allora

$$\int_\alpha^\beta \frac{d_{kj}x + e_{kj}}{((x-a_k)^2+b_k^2)^j}\,dx = \int_{\alpha'_k}^{\beta'_k} \frac{d'_{kj}y + e'_{kj}}{(y^2+1)^j}\,dy$$

ove i nuovi estremi di integrazione e i nuovi coefficienti possono essere calcolati esplicitamente. Rimane allora da calcolare l'integrale cui si è pervenuti. Dobbiamo dunque, in generale, dare un metodo per il calcolo dell'integrale

$$\int_a^b \frac{cx+d}{(x^2+1)^n}\,dx = \int_a^b \frac{cx}{(x^2+1)^n}\,dx + \int_a^b \frac{d}{(x^2+1)^n}\,dx$$

qualunque siano $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e n intero positivo. Il primo integrale è immediato, mentre il secondo lo è solo se $n=1$, nel qual caso la primitiva dell'integranda è l'arcotangente. Se $n>1$ esso può essere ricondotto al calcolo di un analogo integrale nel quale compare $n-1$ al posto di n. In tal modo, in $n-1$ passi siamo ricondotti al caso $n=1$, cioè all'integrale immediato. Supponendo dunque $n>1$ e usando anche un'integrazione per parti, abbiamo

$$\begin{aligned}&\int_a^b \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int_a^b \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^n}\,dx = \int_a^b \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} + \int_a^b x\,\frac{x}{(x^2+1)^n}\,dx \\ &= \int_a^b \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2-2n}\int_a^b \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2-2n}\left[x\,\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\right]_a^b \\ &= \frac{1-2n}{2-2n}\int_a^b \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2-2n}\left[\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}\right]_a^b\end{aligned}$$

cioè la relazione richiesta.

11. Massimo e minimo limite

Questo paragrafo può esser collocato alla fine del Paragrafo VI.2. Sia $\{a_n\}$ una successione reale. Diciamo che un elemento λ della retta estesa $\overline{\mathbb{R}}$ è un *punto limite* di $\{a_n\}$ quando $\{a_n\}$ ha una sottosuccessione che tende a λ. Denotiamo per comodità con $\mathcal{L}$ l'insieme dei punti limite di $\{a_n\}$ e poniamo

$$\ell' = \inf \mathcal{L} \qquad \text{e} \qquad \ell'' = \sup \mathcal{L}$$

osservando che ℓ' e ℓ'' sono due ben definiti elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ e che $\ell' \le \ell''$, in quanto $\mathcal{L}$ è un sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$ (Esercizio VI.2.7.2). Tali elementi vengono detti *minimo limite* e *massimo limite* della successione data e denotati comunemente con

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n$$

rispettivamente. Sono però usate anche altre notazioni, ad esempio

$$\lim_{n\to\infty}{}' \, a_n, \quad \varliminf_{n\to\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty}{}'' \, a_n, \quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n$$

rispettivamente. Dunque, mentre una successione può non avere limite, il suo massimo limite e il suo minimo limite esistono sempre, eventualmente infiniti.

Se $\{a_n\}$ ha limite ℓ, finito o meno, allora (con le notazioni brevi introdotte sopra) risulta $\mathcal{L} = \{\ell\}$, da cui $\ell' = \ell'' = \ell$ per la (VI.2.1). Viceversa, non è difficile dimostrare che, se il massimo e il minimo limite coincidono, cioè se $\mathcal{L}$ ha un solo elemento ℓ, allora $\{a_n\}$ ha limite ℓ. Quindi le successioni che non hanno limite sono caratterizzate dalla disuguaglianza stretta $\ell' < \ell''$. Abbiamo ad esempio

$$\liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1 \qquad \text{e} \qquad \limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1.$$

Avvertiamo il lettore che valgono le formule

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} a_k = \sup_{n\ge 0} \inf_{k\ge n} a_k \\ \limsup_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} a_k = \inf_{n\ge 0} \sup_{k\ge n} a_k \end{aligned} \tag{11.1}$$

spesso usate come definizioni stesse di minimo e massimo limite, in alternativa a quanto abbiamo fatto noi. Esse meritano un commento e consideriamo, per fissare le idee, la prima delle due. Per ogni n è ben definito l'elemento $a'_n = \inf\{a_k : \; k \ge n\}$, ma esso può essere $-\infty$. Dunque $\{a'_n\}$ è una successione di elementi della retta estesa. Generalizzate in modo naturale le nozioni di monotonia e di limite al caso di successioni di questo tipo, vale ancora il Teorema fondamentale delle successioni monotone. Osservato poi che la successione $\{a'_n\}$ è non decrescente, per essa limite ed estremo superiore coincidono.

Due parole, infine, sulle notazioni e sui termini usati. Chiaramente le (11.1) giustificano le notazioni $\liminf$ e $\limsup$. Per quanto riguarda gli aggettivi “massimo” e “minimo” abbiamo quanto segue: il massimo e il minimo limite sono essi stessi punti limite della successione data $\{a_n\}$, per cui, ad esempio, il minimo limite è anche il minimo dei punti limite e non solo l'estremo inferiore.

Sia ora f una funzione reale definita in un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^N$ e sia $a \in \mathbb{R}^N$ un punto di accumulazione per A. Si possono allora introdurre i concetti di massimo limite e di minimo limite di f, ora per x tendente ad a. Ancora essi sono gli estremi superiore e inferiore (di fatto, come sopra, il massimo e il minimo) di un sottoinsieme $\mathcal{L}$ di $\overline{\mathbb{R}}$. Ora $\mathcal{L}$ è definito come segue: un elemento $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ appartiene a $\mathcal{L}$ se e solo se esiste una successione $\{x_n\}$ di elementi di A diversi da a tendente ad a e tale che la successione $\{f(x_n)\}$ tenda a λ. Le notazioni usate e le proprietà sono analoghe a quelle viste per le successioni. Analogamente, quando l'insieme A non è limitato, si tratta il caso in cui $|x|$ tende a infinito. Segnaliamo che, ad esempio, la prima delle (11.1) diventa ora

$$\liminf_{x\to a} f(x) = \sup_{r>0} \inf_{0<|x-a|<r} f(x) \qquad \text{e} \qquad \liminf_{|x|\to\infty} f(x) = \sup_{r>0} \inf_{|x|>r} f(x)$$

rispettivamente nei casi $x \to a$ e $|x| \to \infty$ (con l'intesa che x sia soggetto al vincolo $x \in A$ nell'estremo inferiore) e, ancora, l'estremo superiore rispetto a r coincide con il limite, per $r \to 0^+$ e per $r \to +\infty$ nei due casi, grazie alla monotonia dell'estremo inferiore rispetto a r.

12. Complementi su compattezza e continuità

Aggiungiamo un paio di risultati sulle funzioni continue definite in sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$. Il primo di essi contiene il Teorema VI.3.10.

12.1. Teorema. *Siano K un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ e f una funzione definita in K a valori in $\mathbb{R}^m$ continua. Allora l'insieme immagine $f(K)$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^m$ e il grafico di f è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.* □

Dimostrazione. Per dimostrare la prima parte usiamo il Teorema VI.3.1. Sia $\{y_k\}$ una successione di punti di $f(K)$: dimostriamo che essa ha una sottosuccessione convergente a un punto di $f(K)$. Per ogni k esiste un punto $x_k \in K$ tale che $f(x_k) = y_k$. La successione $\{x_k\}$ così costruita è dunque una successione di elementi di K e l'ipotesi fatta su K e il Teorema VI.3.1 assicurano che essa ha una sottosuccessione $\{x_{k_i}\}$ convergente a un certo punto $x_0 \in K$. Consideriamo allora la successione $\{y_{k_i}\}$ costruita a partire da $\{y_k\}$ utilizzando gli indici k_i appena estratti: essa è una sottosuccessione di $\{y_k\}$ e, grazie alla continuità di f in x_0 e al Teorema III.2.12, converge a $f(x_0)$, cioè a un punto di $f(K)$.

Per dimostrare la seconda parte consideriamo la funzione $g : K \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ definita dalla formula $g(x) = (x, f(x))$. Allora g è continua e la sua immagine è il grafico di f. Dunque la tesi segue applicando a g la prima parte del teorema. □

12.2. Corollario. *Siano K un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$, f una funzione definita in K a valori in $\mathbb{R}^m$ continua e iniettiva e K' la sua immagine. Allora la funzione inversa $g = f^{-1} : K' \to \mathbb{R}^n$ è continua.* □

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo g discontinua in un punto $y_0 \in K'$ e poniamo $x_0 = g(y_0)$. Allora esistono un intorno aperto I di x_0 e una successione $\{y_k\}$ di elementi di K' convergente a y_0 tali che, posto $x_k = g(y_k)$, risulti $x_k \in K \setminus I$ per ogni k. Osservato che $K \setminus I$ è chiuso e limitato, grazie al Teorema VI.3.1 possiamo estrarre da $\{x_k\}$ una sottosuccessione $\{x_{k_j}\}$ convergente a un punto $x_* \in K \setminus I$. Allora $\{y_{k_j}\}$ converge a $f(x_*)$ per la continuità di f. D'altra parte la stessa sottosuccessione converge anche a $f(x_0)$. Deduciamo che $f(x_*) = f(x_0)$ e contraddiciamo l'iniettività di f. Infatti $x_* \neq x_0$ dato che $x_0 \in I$ e $x_* \notin I$. □

12.3. Osservazione. L'ipotesi che il dominio K di f sia chiuso e limitato è essenziale. Si consideri infatti la funzione $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definita dalla formula $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Allora f è continua e iniettiva e la sua immagine è la circonferenza avente centro in $(0,0)$ e raggio 1. Ora la funzione inversa è discontinua nel punto $x_0 = (1,0)$. Considerate infatti le successioni $\{t_k\}$ e $\{x_k\}$ definite dalle formule $t_k = 2\pi - 1/k$ e $x_k = f(t_k)$, abbiamo $t_k = f^{-1}(x_k)$. D'altra parte $\{x_k\}$ converge a x_0, $\{t_k\}$ converge a 2π e $f^{-1}(x_0) = 0 \neq 2\pi$. Ciò mostra la necessità dell'ipotesi di chiusura. Per quanto riguarda quella di limitatezza, possiamo considerare la composizione $\varphi = f \circ \psi$ della funzione f appena costruita con la funzione $\psi : [0, +\infty) \to [0, 2\pi)$ data dalla formula $\psi(y) = 4 \arctan y$. Allora anche φ^{-1} è discontinua nello stesso punto x_0, dato che, considerate le stesse successioni $\{t_k\}$ e $\{x_k\}$, si ha $\varphi^{-1}(x_0) = 0$ e $\varphi^{-1}(x_k) = \tan(t_k/4)$ e questa successione diverge invece di essere infinitesima.

13. Complemento sulla continuità uniforme

Questo paragrafo può essere collocato alla fine del Paragrafo VI.6 costituendone un complemento. Esso fa uso del Paragrafo VI.4.

13.1. Teorema. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato. Allora una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$ è uniformemente continua se e solo ha un prolungamento $F : \overline{A} \to \mathbb{R}^m$ continuo.* □

Dimostrazione. Se F è come nell'enunciato, osservato che $\overline{A}$ è chiuso e limitato, deduciamo che F è uniformemente continua. Dunque la sua restrizione f pure lo è.

Viceversa, supponiamo f uniformemente continua e dimostriamo l'esistenza di un prolungamento continuo F. Innanzi tutto costruiamo F, e ciò richiede un certo lavoro.

Fissiamo $x \in \overline{A}$. Allora esiste una successione $\{x_k\}$ di elementi di A convergente a x. Dimostriamo che $\{f(x_k)\}$ è una successione di Cauchy. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ (dato dalla continuità uniforme) tale che $|f(y) - f(z)| \le \varepsilon$ per ogni coppia di punti $x, y \in A$ verificanti $|y - z| \le \delta$. Siccome $\{x_k\}$ è di Cauchy in quanto convergente, esiste un indice k^* tale che $|x_{k'} - x_{k''}| \le \delta$ per ogni $k', k'' \ge k^*$. Allora per tali k' e k'' abbiamo anche $|f(x_{k'}) - f(x_{k''})| \le \varepsilon$. Dunque $\{f(x_k)\}$ è una successione di Cauchy, di conseguenza convergente per il Criterio VI.4.1 di Cauchy. Ora controlliamo che il limite di $\{x_k\}$ non dipende dalla particolare successione $\{x_k\}$ convergente a x che si considera. Sia infatti $\{y_k\}$ un'altra successione convergente a x. Allora anche $\{f(y_k)\}$ converge, per quanto appena dimostrato. Costruiamo una terza successione $\{z_k\}$ come segue: per $i \in \mathbb{N}$ poniamo $z_{2i} = x_i$ e $z_{2i+1} = y_i$. Dato che, come si vede facilmente, $\{z_k\}$ converge a x, deduciamo (sempre per quanto appena visto) che $\{f(z_k)\}$ converge. Allora $\{f(x_k)\}$ e $\{f(y_k)\}$ hanno lo stesso limite in quanto entrambe sottosuccessioni della successione convergente $\{f(z_k)\}$. Questo controllo ci autorizza a definire $F(x) = \lim f(x_k)$ ove $\{x_k\}$ è una successione di elementi di A convergente al punto x fissato. Siccome però x è arbitrario in $\overline{A}$, resta definita in tal modo una funzione $F : \overline{A} \to \mathbb{R}^m$ e ora controlliamo che F è la funzione che stavamo cercando.

Innanzi tutto F prolunga f. Se infatti $x \in A$, come successione $\{x_k\}$ possiamo scegliere quella definita da $x_k = x$ per ogni k e concludere che $F(x) = f(x)$. Dimostriamo ora che F è continua usando il Teorema III.2.12. Siano dunque $x \in \overline{A}$ e $\{x_k\}$ una successione di elementi di $\overline{A}$ convergente a x: dobbiamo dimostrare che $\{F(x_k)\}$ converge a $F(x)$. Per ogni k consideriamo una successione $\{x_{k,i}\}$ di punti di A convergente a x_k per $i \to \infty$. Allora, per $i \to \infty$, $\{f(x_{k,i})\}$ converge a $F(x_k)$ per definizione di $F(x_k)$. Per ogni k scegliamo i tale che $|x_{k,i} - x_k| \le 1/k$ e $|f(x_{k,i}) - F(x_k)| \le 1/k$ e poniamo $x'_k = x_{k,i}$ ove i è l'indice scelto in funzione di k. Allora anche $\{x'_k\}$ converge a x e quindi $\{f(x'_k)\}$ converge a $F(x)$ per definizione di $F(x)$. D'altra parte $|f(x'_k) - F(x_k)| \le 1/k$ per costruzione, per cui anche $\{F(x_k)\}$ converge a $F(x)$. □

Ad esempio, se A è l'intervallo aperto limitato (a, b), una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ continua è uniformemente continua se e solo se essa ha i limiti finiti $f(a^+)$ e $f(b^-)$.

Si noti inoltre che il risultato precedente esclude per altra via che sia uniformemente continua la funzione sign dell'Esempio VI.6.2: se essa fosse uniformente continua, lo sarebbe anche la sua restrizione all'insieme limitato $A = [-1, 1] \setminus \{0\}$ e questa dovrebbe avere limite finito in 0, che è un punto della chiusura di A.

14. Moltiplicatori di Lagrange

Un caso notevole, che comprende quelli della Sezione VII.6.5 da noi trattati in modo artigianale, è quello in cui la funzione reale f che consideriamo è definita e di classe C^1 in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ ma ne vogliamo considerare la restrizione a un sottoinsieme Γ (vincolo) che si possa presentare nella forma
$$\Gamma = \{x \in \Omega : \ \mathbf{g}(x) = \mathbf{0}\}$$
ove $\mathbf{g} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è una funzione di classe C^1 e $m < n$. Nei casi del bordo del disco e del segmento S_3 considerati nella Sezione VII.6.5 possiamo prendere come g le due funzioni scalari
$$g(x) = |x|^2 - R^2 \qquad \text{e} \qquad g(x) = x_1 + x_2 - 1 \tag{14.1}$$
rispettivamente. Un altro esempio semplice si ottiene considerando una funzione f definita in $\mathbb{R}^3$ e cercando i punti di minimo o di massimo della sua restrizione a una retta, che possiamo presentare come intersezione di due piani: in questo caso $m = 2$ e $\mathbf{g}$ è una funzione le cui due componenti sono polinomi di primo grado. Nel caso generale prospettato il criterio dell'annullamento del gradiente va sostituito come precisato nel teorema dato di seguito. Le componenti λ_j del vettore λ dato dal teorema sono dette *moltiplicatori di Lagrange*.

14.1. Teorema (dei moltiplicatori di Lagrange). *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{g} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1 con $m < n$ e si ponga*
$$\Gamma = \{x \in \Omega : \ \mathbf{g}(x) = \mathbf{0}\}.$$

Siano infine $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1 *e* $x_0 \in \Gamma$ *. Se* x_0 *è un punto di massimo o di minimo relativo per la restrizione di* f *a* Γ *e se la matrice jacobiana* $J\mathbf{g}(x_0)$ *ha rango esattamente* m *, allora* $\nabla f(x_0)$ *è normale a* Γ *in* x_0 *ed esiste uno e un solo vettore* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ *tale che*

$$\nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \nabla g_j(x_0). \ \square \tag{14.2}$$

Dimostrazione. Osserviamo che l'ipotesi sul rango significa quanto segue:

i gradienti $\nabla g_j(x_0)$ $(j = 1, \ldots, m)$ delle componenti di $\mathbf{g}$ sono indipendenti; (14.3)

la jacobiana $J\mathbf{g}(x_0)$ ha m colonne indipendenti. (14.4)

Per rendere più trasparente il discorso distinguiamo quattro tappe: (a) rappresentiamo Γ vicino a x_0 come immagine di un'applicazione regolare, dimostriamo che il cono tangente $T_{x_0}\Gamma$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - m$, ne costruiamo una base e deduciamo che lo spazio normale N_{x_0} ha dimensione m; (b) dimostriamo che i gradienti $\nabla g_j(x_0)$ formano una base per $N_{x_0}\Gamma$; (c) dimostriamo che $\nabla f(x_0)$ è normale a Γ in x_0; (d) dimostriamo che il vettore λ esiste ed è unico.

(a) Procediamo come nella dimostrazione del Teorema 7.1. In riferimento alla (14.4), per semplificare le notazioni, supponiamo che siano indipendenti le ultime m colonne e scriviamo il generico vettore $x \in \mathbb{R}^n$ nella forma $x = (y, z)$ con $y \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $z \in \mathbb{R}^m$. Poniamo in accordo $x_0 = (y_0, z_0)$. Allora l'equazione che definisce Γ diventa $\mathbf{g}(y, z) = \mathbf{0}$ e la jacobiana della funzione $z \mapsto \mathbf{g}(y_0, z)$ nel punto z_0 è non singolare. Dunque possiamo applicare il Teorema del Dini e trovare un intorno aperto Ω' di y_0 e un intorno aperto Ω'' di z_0 verificanti le condizioni seguenti: $\Omega' \times \Omega'' \subseteq \Omega$; per ogni $y \in \Omega'$ esiste uno e un solo $z \in \Omega''$ tale che $\mathbf{g}(y, z) = \mathbf{0}$; la funzione $\varphi : \Omega' \to \Omega''$ che a ogni $y \in \Omega'$ associa il corrispondente punto z è di classe C^1. Definiamo ora $\mathbf{u} : \Omega' \to \mathbb{R}^n$ mediante la formula $\mathbf{u}(y) = (y, \varphi(y))$. Allora $\mathbf{u}$ è iniettiva e di classe C^1, ha inversa continua, le sue derivate parziali sono indipendenti (addirittura in ogni punto) e $\Gamma \cap (\Omega' \times \Omega'')$ è esattamente l'immagine di $\mathbf{u}$. Possiamo dunque usare il Teorema 4.5 e concludere quanto segue: $T_{x_0}\Gamma$ è uno spazio vettoriale di dimensione $n - m$, precisamente il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle derivate parziali di $\mathbf{u}$ nel punto y_0, e $N_{x_0}\Gamma$ è uno spazio vettoriale di dimensione m.

(b) Consideriamo ciascuno dei vettori $\nabla g_j(x_0)$ ($j = 1, \ldots, m$). Siccome $\mathbf{u}(y) \in \Gamma$ per ogni $y \in \Omega'$, risulta $g_j(\mathbf{u}(y)) = 0$ per ogni $y \in \Omega'$ e la formula di derivazione delle funzioni composte fornisce

$$\nabla g_j(x_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(y_0)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{per } i = 1, \ldots, n - m$$

il che mostra che $\nabla g_j(x_0)$ è ortogonale a tutti i vettori di una base per $T_{x_0}\Gamma$, dunque un vettore normale a Γ in x_0. Ora questa conclusione vale per $j = 1, \ldots, m$. D'altra parte vale la (14.3). Siccome il numero dei vettori $\nabla g_j(x_0)$ è pari alla dimensione di $N_{x_0}\Gamma$, essi formano una base per $N_{x_0}\Gamma$.

(c) Consideriamo, per fissare le idee il caso del punto di minimo e fissiamo un intorno aperto I di x_0 tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in I \cap \Gamma$. Siccome $\mathbf{u}$ è continua nell'aperto Ω' e $\mathbf{u}(y_0) = x_0$, la controimmagine $J = \mathbf{u}^{-1}(I)$ è un intorno aperto di y_0 incluso in Ω'. Siccome per ogni $y \in J$ si ha $\mathbf{u}(y) \in I \cap \Gamma$, deduciamo

$$f(\mathbf{u}(y)) \geq f(\mathbf{u}(y_0)) \quad \text{per ogni } y \in I.$$

Ma questo significa che y_0 è un punto di minimo locale per la funzione composta $f \circ \mathbf{u}$. Siccome questa è differenziabile e y_0 è un punto interno, concludiamo che $f \circ \mathbf{u}$ ha gradiente nullo in y_0 e calcolando le derivate parziali con la formula di derivazione delle funzioni composte otteniamo

$$\nabla f(x_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(y_0)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{per } i = 1, \ldots, n - m.$$

Dunque $\nabla f(x_0)$ è ortogonale ai vettori alle derivate parziali di $\mathbf{u}$ in y_0 che, come abbiamo dimostrato, costituiscono una base per lo spazio tangente $T_{x_0}\Gamma$. Pertanto $\nabla f(x_0)$ è un vettore normale a Γ in x_0.

(d) L'ultima tesi afferma che $\nabla f(x_0)$ si può rappresentare in uno e in un solo modo come combinazione lineare dei vettori $\nabla g_j(x_0)$ ($j = 1, \ldots, m$) e ciò segue immediatamente dai punti precedenti: i gradienti in x_0 delle funzioni g_j formano una base del sottospazio $N_{x_0}\Gamma$ e $\nabla f(x_0) \in N_{x_0}\Gamma$. □

Dal punto di vista operativo si abbinano l'equazione vettoriale (14.2) alla condizione $x \in \Gamma$ ottenendo complessivamente il sistema

$$\nabla f(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \nabla g_j(x) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{g}(x) = \mathbf{0}. \tag{14.5}$$

Si noti che (14.5) è un sistema (di solito *non lineare*) di $n + m$ equazioni scalari in altrettante incognite (le n coordinate del punto e gli m moltiplicatori) e che il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange afferma che i punti di massimo o di minimo cui siamo interessati (sempre che sia soddisfatta la condizione sulla jacobiana di $\mathbf{g}$ imposta dall'enunciato) vanno cercati fra i punti x che sono prima componente di una sua soluzione (x, λ) . Conviene dunque tentare di trasformare (14.5) in un sistema equivalente nel quale n equazioni non contengano i moltiplicatori e risolvere, rispetto alla sola incognita x , il sistema costituito da tali equazioni (ciò è spesso più facile che non risolvere completamente (14.5)).

Naturalmente tutto funziona alla perfezione se la condizione sulla jacobiana di $\mathbf{g}$ vale in tutti i punti di Γ (altrimenti qualcosa può sfuggire). Nel caso $m = 1$ ciò significa la funzione scalare g e il suo gradiente non si annullano mai contemporaneamente. □

Diamo ora qualche applicazione del Teorema dei moltiplicatori non solo a problemi di meccanica, ma anche in direzioni inaspettate.

14.2. Esempio. Riprendiamo il caso del segmento S_3 dell'Esempio VII.6.6, che si riferisce alla seconda delle funzioni (14.1). Il candidato $x \in S_3$ a essere punto di massimo è dunque la componente x di una soluzione $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ del sistema costituito dalle equazioni $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$ e $g(x) = 0$, cioè

$$(x_2, x_1) = \lambda(1, 1) \quad (\text{da cui } x_1 = x_2) \qquad \text{e} \qquad x_1 + x_2 = 1.$$

Si ha necessariamente $x = (1/2, 1/2)$.

14.3. Esempio. Supponiamo di voler trovare la configurazione di equilibrio di un sistema di sbarrette rigide pesanti incernierate fra loro e verificanti qualche vincolo ulteriore. Qui il risultato che otteniamo è prevedibile, ma altre situazioni più delicate (forza dipendente dal punto) si possono trattare con lo stesso metodo. Per fissare le idee e per non introdurre notazioni complicate, consideriamo il caso di tre sbarrette aventi la stessa massa m e la stessa lunghezza ℓ . Identifichiamo le tre sbarrette a tre segmenti e precisiamo il modo in cui esse sono incernierate fra loro mediante le notazioni seguenti: i segmenti sono AB , BC e CD . Supponiamo inoltre che il punto A sia libero di scorrere su una certa curva γ dello spazio. Il tutto senza attrito. Denotate con x_P , y_P e z_P le coordinate del punto P per $P = A, \ldots, D$, lo stato del sistema è individuato dall'elemento $(x_A, \ldots, z_D)$ di $\mathbb{R}^{12}$. Tuttavia occorre tener conto dei vincoli, cioè

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - \ell^2 = 0 \tag{14.6}$$

e le altre due analoghe relativamente a BC e a CD

$$\varphi(x_A, y_A, z_A) = 0 \quad \text{e} \quad \psi(x_A, y_A, z_A) = 0 \tag{14.7}$$

ove $\varphi(x, y, z) = \psi(x, y, z) = 0$ è la rappresentazione cartesiana della curva γ alla quale A è vincolato. Detto Γ l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^{12}$ verificanti le cinque relazioni precedenti denotiamo con $\mathbf{g}$ la funzione da $\mathbb{R}^{12}$ in $\mathbb{R}^5$ che ha come componenti le funzioni espresse dai primi membri delle formule (14.6)-(14.7), cioè

$$\begin{aligned} &g_1(x_A, \ldots, z_D) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - \ell^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &g_5(x_A, \ldots, z_D) = \psi(x_A, y_A, z_A), \end{aligned}$$

in modo che Γ coincida proprio con l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^{12}$ nei quali $\mathbf{g}$ si annulla. Ora, ciò che dobbiamo minimizzare, almeno dal punto di vista dei minimi locali, è la quota del baricentro del sistema, la quale è data dalla media delle quote dei baricentri delle singole sbarrette, viste le semplificazioni fatte all'inizio. Siamo dunque indotti a considerare la funzione f data dalla formula

$$f(x_A, \dots, z_D) = \frac{z_A}{6} + \frac{z_B}{3} + \frac{z_C}{3} + \frac{z_D}{6}, \quad (x_A, \dots, z_D) \in \mathbb{R}^{12}$$

e rientriamo nelle condizioni del Teorema dei moltiplicatori con $n = 12$, $m = 5$, $\Omega = \mathbb{R}^{12}$ e f e $\mathbf{g}$ come detto, purché riusciamo a verificare la condizione sul rango. A questo scopo introduciamo il vettore di $\mathbb{R}^3$

$$u = (x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B)$$

nonché gli analoghi v e w relativi ai segmenti BC e CD e i due gradienti

$$p = \nabla\varphi(x_A, y_A, z_A) \quad \text{e} \quad q = \nabla\psi(x_A, y_A, z_A)$$

ove $(x_A, \dots, z_D)$ è il generico punto di $\mathbb{R}^{12}$. Allora la jacobiana di $\mathbf{g}$ è data dalla formula

$$J\mathbf{g}(x_A, \dots, z_D) = \begin{bmatrix} u & -u & 0 & 0 \\ 0 & v & -v & 0 \\ 0 & 0 & w & -w \\ p & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ove 0 è il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$ e tutti i vettori scritti vanno intesi come righe. Supponiamo ora che il punto generico appartenga a Γ (cioè $A \in \gamma$ e ℓ è la lunghezza dei segmenti) e che una combinazione lineare delle righe con coefficienti c_i sia nulla. Abbiamo dunque le uguaglianze (fra vettori di $\mathbb{R}^3$)

$$c_1 u + c_4 p + c_5 q = -c_1 u + c_2 v = -c_2 v + c_3 w = -c_3 w = 0.$$

Siccome i tre vettori u, v e w hanno modulo ℓ, deduciamo uno dopo l'altro l'annullamento di c_3, c_2 e c_1 e l'uguaglianza che rimane è $c_4 p + c_5 q = 0$. Se, dunque, *i gradienti delle funzioni* φ *e* ψ *sono indipendenti in ogni punto della curva* γ, l'uguaglianza precedente implica $c_4 = c_5 = 0$ e concludiamo che la jacobiana di $\mathbf{g}$ ha rango 5 in ogni punto di Γ. Notiamo che le singole equazioni $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ rappresentano due superfici $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}''$ la cui intersezione è γ. Ora $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}''$ sono insiemi di livello delle funzioni rispettive φ e ψ. Siccome i gradienti sono normali agli insiemi di livello, la condizione di indipendenza detta sopra significa che i piani tangenti a $\mathcal{S}'$ e a $\mathcal{S}''$ nel generico punto $A \in \gamma$ sono diversi e risulta in larga misura verificata nei casi concreti. In queste condizioni, dunque, è applicabile il Teorema dei moltiplicatori, che ci consente di trovare condizioni necessarie perché un punto di Γ sia di minimo locale per $f|_\Gamma$, cioè che il sistema si trovi in uno stato di equilibrio. Supponiamo appunto di essere in un punto di minimo locale. Siccome il gradiente di f vale $(1/6)(e_3, 2e_3, 2e_3, e_3)$ ove e_3 è il terzo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$ scritto come riga, concludiamo che esiste $(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$ tale che, con le notazioni introdotte sopra, valgano le uguaglianze

$$\begin{aligned} &(1/6)e_3 = \lambda_1 u + \lambda_4 p + \lambda_5 q, && (1/3)e_3 = -\lambda_1 u + \lambda_2 v, \\ &(1/3)e_3 = -\lambda_2 v + \lambda_3 w, && (1/6)e_3 = -\lambda_3 w. \end{aligned}$$

Siccome $e_3 \neq 0$, deduciamo $\lambda_3 \neq 0$ e $w = -e_3/(6\lambda_3)$. Dovendo essere $|w| = \ell$, concludiamo che $\lambda_3 = \pm 1/(6\ell)$ e che $w = \mp \ell e_3$. Tenendo conto di ciò prima nella terza equazione e poi nella seconda e ragionando analogamente, si determinano i valori possibili di λ_2 e di λ_1 e i possibili vettori v e u, che in ogni caso risulteranno paralleli a e_3. La prima equazione diventa allora $\lambda_4 p + \lambda_5 q = \mu e_3$, ove μ può assumere solo valori ben precisi. Abbinando ciò, per ciascuno di tali μ, alle equazioni di γ, troviamo il sistema

$$\lambda_4 \nabla\varphi(x, y, z) + \lambda_5 \nabla\psi(x, y, z) = (0, 0, \mu), \quad \varphi(x, yz) = 0 \quad \text{e} \quad \psi(x, y, z) = 0$$

che va interpretato come un sistema di cinque equazioni scalari nell'incognita $(x, y, z, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$, le cui prime tre coordinate devono fornire le possibili posizioni del punto A. Determinate queste, la conoscenza di u, v e w consente di determinare i punti B, C e D di conseguenza. Evitiamo di specializzare le equazioni di γ in vista di risultati concreti e diciamo piuttosto due parole sull'interpretazione di quanto è stato ottenuto. Le posizioni possibili di A sono quelle per cui una combinazione lineare dei due gradienti p e q risulta parallela a e_3. Ciò significa che i vettori tangenti a γ in A devono essere normali a e_3, cioè che la retta tangente a γ in A deve essere orizzontale. Le posizioni degli altri tre punti, poi, sono le sole possibili che rendono gli stessi allineati con A su una verticale, dato che verticali devono essere i tre vettori u, v e w.

14.4. Esempio. Vogliamo ritrovare la nota legge della riflessione nel caso non banale di uno specchio curvo, che identifichiamo con una superficie Γ di $\mathbb{R}^3$. Il problema può essere posto nei termini seguenti. Si fissino due punti $x', x'' \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ (nell'interpretazione questi saranno dalla stessa parte rispetto allo specchio Γ) e si consideri un punto $x \in \Gamma$ in cui avviene la riflessione del raggio che parte da x' per raggiungere x''. Se supponiamo che il mezzo in cui si propagano i raggi sia omogeneo e isotropo, tale punto x deve essere un punto di minimo per la funzione

$$f(x) = |x - x'| + |x - x''|, \quad x \in \Gamma.$$

Ebbene noi vogliamo dare una condizione necessaria perché un punto $x \in \Gamma$ sia appunto di minimo e interpretarla. Prolungata f all'aperto $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{x', x''\}$ con la stessa formula, otteniamo un funzione di classe C^∞. Se Γ può essere rappresentata in accordo con le ipotesi del Teorema 14.1, il teorema stesso assicura che un punto $x \in \Gamma$ di minimo per la funzione di partenza (che è la restrizione a Γ del prolungamento) verifica

$$\frac{x - x'}{|x - x'|} + \frac{x - x''}{|x - x''|} = \nabla f(x) \in N_x\Gamma.$$

Ma questo vettore, che è la somma dei versori dei due vettori $x - x'$ e $x - x''$, è diretto come la bisettrice dell'angolo di vertice x i cui lati passano per x' e x''. Concludiamo che tale bisettrice è normale a Γ in x (legge di riflessione).

14.5. Esempio. Sia Γ un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m e sia x_0 un punto di $\mathbb{R}^n$. Cerchiamo la proiezione ortogonale di x_0 su Γ. Descritto il sottospazio Γ mediante il sistema di equazioni lineari

$$x \cdot \mathbf{u}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n - m$$

ove i vettori $\mathbf{u}_i$ sono indipendenti, minimizziamo la restrizione a Γ della funzione

$$f(x) = |x - x_0|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Il sistema (14.5) diventa allora

$$x - x_0 = \sum_{j=1}^{n-m} c_j \mathbf{u}_j \qquad \text{e} \qquad x \cdot \mathbf{u}_i = 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, n - m$$

ove $c_j = \lambda_j / 2$. Dunque $x = x_0 + \sum_{j=1}^{n-m} c_j \mathbf{u}_j$ e i moltiplicatori c_j devono essere determinati in modo che $x \in \Gamma$, cioè

$$\sum_{j=1}^{n-m} (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j) c_j = -x_0 \cdot \mathbf{u}_i \quad \text{per } i = 1, \dots, n - m\,.$$

Si noti che la matrice M di elementi $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j$ ha la forma $A^t A$, ove A è la matrice le cui colonne sono i vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-m}$. Siccome A ha rango massimo, M è non singolare. Pertanto il sistema ha una e una sola soluzione e x_0 ha una e una sola proiezione. Nel caso in cui i vettori $\mathbf{u}_j$ siano a due a due ortogonali, M è una matrice diagonale e il sistema lineare si risolve in modo banale. La proiezione di x_0 su Γ è data allora dal punto

$$x = x_0 - \sum_{j=1}^{n-m} \frac{x_0 \cdot \mathbf{u}_j}{|\mathbf{u}_j|^2}\, \mathbf{u}_j.$$

14.6. Esempio. Data una matrice A reale $m \times m$, cerchiamo i punti di estremo della funzione

$$f(x) = x^t A x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |x| = 1.$$

L'insieme Γ da prendere in considerazione è la sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$, rappresentata con l'equazione $g(x) = 0$ ove $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è data dalla formula $g(x) = |x|^2 - 1$. Denotato ancora con f il prolungamento di f a tutto $\mathbb{R}^n$ mediante la stessa formula, i punti di estremo che vogliamo determinare vanno cercati fra quelli verificanti la condizione $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$ opportuno. Abbiamo perciò il sistema

$$\frac{1}{2}(A + A^t)x = \lambda x \qquad \text{e} \qquad |x| = 1 \tag{14.8}$$

in quanto $\nabla f(x) = (A + A^t)x$ e $\nabla g(x) = 2x$. Dunque i punti di estremo devono essere cercati fra gli autovettori della matrice simmetrica $\frac{1}{2}(A + A^t)$, che coincide con A quando A è essa stessa simmetrica. Si osservi che, se x risolve il sistema (14.8), allora

$$f(x) = x^t A x = x^t \frac{1}{2}(A + A^t)x = x^t \lambda x = \lambda |x|^2 = \lambda.$$

Dunque gli autovalori di $\frac{1}{2}(A + A^t)$ sono i valori che f assume nei corrispondenti autovettori di norma unitaria. In particolare il massimo autovalore e il minimo autovalore coincidono con il massimo e il minimo di f su Γ. Si noti che il Teorema di Weierstrass implica l'esistenza del massimo e del minimo di f su Γ. Deduciamo che ogni matrice reale simmetrica possiede almeno un autovalore reale. Questo è il primo passo di una possibile dimostrazione del fatto che ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

15. Sul cambiamento di variabile negli integrali

Rienunciamo il Teorema VIII.7.1 in una forma leggermente diversa per quanto riguarda la condizione (b). A questa forma, di fatto, si fa poi riferimento nel libro. A seguire diamo un approccio alternativo agli integrali di linea e di superficie basato sulla formula di cambiamento di variabile negli integrali di volume. Concludiamo con l'introduzione dell'idea di derivata di una misura rispetto a un'altra.

15.1. Teorema (di cambiamento di variabile). *Siano dati due spazi elementari di misura fini $(A, \mathcal{E}, m)$ e $(A', \mathcal{E}', m')$ con A e A' sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$ e di $\mathbb{R}^{n'}$ rispettivamente. Sia inoltre $\mathcal{T}$ una trasformazione di A in A' continua e iniettiva tale che, per ogni $E \in \mathcal{E}$, l'immagine $\mathcal{T}(E)$ sia misurabile. Sia infine ρ una funzione definita in A a valori reali continua e non negativa. Allora sono equivalenti le tre condizioni seguenti: (a) risulta*

$$m'(\mathcal{T}(E)) = \int_E \rho(x)\, dm \tag{15.1}$$

per ogni $E \in \mathcal{E}$; (b) risulta $m'(\mathcal{T}(E)) = 0$ per ogni $E \in \mathcal{E}$ di misura nulla e, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che la disuguaglianza

$$\left| \frac{m'(\mathcal{T}(E))}{m(E)} - \rho(x) \right| \le \varepsilon \tag{15.2}$$

valga per ogni $x \in A$ e per ogni $E \in \mathcal{E}$ di misura positiva incluso in $B_\delta(x)$; (c) vale la formula

$$\int_E f(\mathcal{T}(x))\, \rho(x)\, dm = \int_{\mathcal{T}(E)} f(x')\, dm' \tag{15.3}$$

per ogni $E \in \mathcal{E}$ e per ogni funzione f definita in $\mathcal{T}(A)$ a valori reali continua. □

15.2. Curve e superfici: variante. Usiamo il Teorema di cambiamento di variabile in $\mathbb{R}^n$ per mostrare, almeno nel caso della regolarità C^2 per un motivo che sarà chiaro fra un attimo, possibili definizioni alternative della lunghezza di una curva e dell'area di una superficie, definizioni naturalmente concordi con le formule

$$\operatorname{lungh}(E') = \int_E |\mathbf{r}'(t)|\,dt \quad \text{se } E' = \mathbf{r}(E) \tag{15.4}$$

$$\operatorname{area}(E') = \int_E |\partial_1\mathbf{r}(x) \times \partial_2\mathbf{r}(x)|\,dx \quad \text{se } E' = \mathbf{r}(E) \tag{15.5}$$

trovate nelle Sezioni VIII.7.4 e VIII.7.9 rispettivamente. Nei due casi E è un insieme elementare (intervallo o rettangolo) dell'insieme in cui varia il parametro e $\mathbf{r}$ è la parametrizzazione.

Siano I un intervallo chiuso e limitato, $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ di classe C^2 e C la curva immagine. Supponiamo $\mathbf{r}$ iniettiva con $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in I$ in modo che, grazie al Teorema 4.5 (applicabile per il Corollario 12.2) e all'Osservzione 4.3, in ogni punto di C ci sono la retta tangente e il piano normale. Per ogni $\varepsilon > 0$ scegliamo un sottosinsieme S_ε del disco $B_\varepsilon(0,0)$ di $\mathbb{R}^2$ che sia chiuso, limitato, misurabile e di area positiva e costruiamo un "tubicino" le cui sezioni normali siano copie di S_ε. A tale scopo, per ogni $t \in I$, consideriamo il versore $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$ (che ha senso dato che $\mathbf{r}'$ non si annulla) e altri due versori $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{w}(t)$ ortogonali fra loro e a $\mathbf{u}(t)$ e tali che la terna $(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t))$ sia orientata positivamente. Siccome $\mathbf{r}$ è di classe C^2, la funzione $\mathbf{u}$ è di classe C^1 e si può dimostrare (ma in modo non banale) che è possibile effettuare la costruzione detta in modo che siano di classe C^1 anche le funzioni $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Consideriamo ora l'applicazione

$$\mathcal{T}_\varepsilon : (t,x,y) \mapsto \mathbf{r}(t) + x\mathbf{v}(t) + y\mathbf{w}(t), \quad t \in I, \quad (x,y) \in S_\varepsilon$$

e consideriamo la sua immagine. Quest'ultima sarà il tubicino voluto se $\mathcal{T}$ è iniettiva. Ebbene, si può dimostrare che questa condizione è verificata se ε è abbastanza piccolo. Siano ora $E \subseteq I$ un intervallo e $T_\varepsilon = \mathcal{T}_\varepsilon(E)$ la porzione di tubicino corrispondente. Una definizione ragionevole di lunghezza di $\mathbf{r}(E)$ è data dalla formula

$$\operatorname{lungh}\mathbf{r}(E) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\operatorname{vol} T_\varepsilon}{\operatorname{area} S_\varepsilon}$$

se tale limite esiste finito. Interpretando i vettori come colonne si ha

$$J\mathcal{T}_\varepsilon(t,x,y) = [\mathbf{r}'(t) + x\mathbf{v}'(t) + y\mathbf{w}'(t),\ \mathbf{v}(t),\ \mathbf{w}(t)]$$

ove le virgole separano le righe. Allora

$$\begin{aligned}&\det J\mathcal{T}_\varepsilon(t,x,y)\\ &= \det[\mathbf{r}'(t),\ \mathbf{v}(t),\ \mathbf{w}(t)] + x\det[\mathbf{v}'(t),\ \mathbf{v}(t),\ \mathbf{w}(t)] + y\det[\mathbf{w}'(t),\ \mathbf{v}(t),\ \mathbf{w}(t)].\end{aligned}$$

D'altra parte, per $t \in I$ e $(x,y) \in S_\varepsilon$, risulta

$$\det[\mathbf{r}'(t),\ \mathbf{v}(t),\ \mathbf{w}(t)] = |\mathbf{r}'(t)|\det[\mathbf{u}(t),\ \mathbf{v}(t),\ \mathbf{w}(t)] = |\mathbf{r}'(t)| \geq \inf_I |\mathbf{r}'|$$

$$|x\det[\mathbf{v}'(t),\ \mathbf{v}(t),\ \mathbf{w}(t)]| \leq \varepsilon M \quad \text{e} \quad |y\det[\mathbf{w}'(t),\ \mathbf{v}(t),\ \mathbf{w}(t)]| \leq \varepsilon M$$

per un'opportuna costante M. Allora, siccome $\inf_I |\mathbf{r}'|$ è strettamente positivo per il Teorema di Weierstrass, se ε è abbastanza piccolo risulta $\det J\mathcal{T}_\varepsilon > 0$ e abbiamo

$$\begin{aligned}\operatorname{vol} T_\varepsilon &= \int_{E\times S_\varepsilon} \det J\mathcal{T}_\varepsilon(t,x,y)\,dt\,dx\,dy\\ &= \int_{E\times S_\varepsilon} \Bigl(|\mathbf{r}'(t)| + x\det[\mathbf{v}'(t),\ \mathbf{v}(t),\ \mathbf{w}(t)] + y\det[\mathbf{w}'(t),\ \mathbf{v}(t),\ \mathbf{w}(t)]\Bigr)\,dt\,dx\,dy.\end{aligned}$$

L'integrale del primo addendo vale $(\operatorname{area} S_\varepsilon) \int_E |\mathbf{r}'(t)|\, dt$ per il Teorema di riduzione, mentre ciascuno degli altri due addendi della funzione integranda ha modulo $\le \varepsilon M$, come abbiamo visto sopra. Dunque il limite richiesto è proprio il valore dato dalla (15.4).

Il caso delle superfici è analogo. Questa volta $\mathbf{r}$ è definita, diciamo, in un rettangolo chiuso $R \subseteq \mathbb{R}^2$, è ancora iniettiva e di classe C^2 e $\mathbf{r}'(x)$ ha rango 2 in ogni punto $x \in R$, in modo che in ogni punto della superficie S immagine di $\mathbf{r}$ ci sono il piano tangente e la retta normale. Ora, anziché il tubicino, occorre costruire uno "strato sottile", il cui volume verrà diviso per lo spessore s_ε dello strato stesso. Per quanto riguarda la terna $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ di versori, ciò che ora importa è che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano solo indipendenti e che $\mathbf{w}$ sia normale a questi, per cui possiamo prendere ordinatamente i versori di $\partial_1 \mathbf{r}$, $\partial_2 \mathbf{r}$ e $\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}$. L'analoga applicazione $\mathcal{T}_\varepsilon$ sarà ora data dalla formula

$$\mathcal{T}_\varepsilon : (x, y) \mapsto \mathbf{r}(x) + y\mathbf{w}(x), \quad x \in R, \quad y \in I_\varepsilon$$

ove I_ε è un intervallo di ampiezza $s_\varepsilon \le \varepsilon$ contenente l'origine. Ancora l'applicazione costruita è iniettiva e ha jacobiano positivo se ε è abbastanza piccolo. Dunque, se $E \subseteq R$ è un rettangolo e $\Sigma_\varepsilon = \mathcal{T}_\varepsilon(E)$ è la porzione corrispondente di strato, abbiamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol} \Sigma_\varepsilon &= \int_{E \times I_\varepsilon} \det J\mathcal{T}_\varepsilon(x, y)\, dx\, dy \\
&= \int_{E \times I_\varepsilon} \det\,[\partial_1 \mathbf{r}(x),\ \partial_2 \mathbf{r}(x),\ \mathbf{w}(x)]\, dx\, dy + \dots \\
&= \int_{E \times I_\varepsilon} \partial_1 \mathbf{r}(x) \times \partial_2 \mathbf{r}(x) \cdot \mathbf{w}(x)\, dx\, dy + \dots \\
&= \int_{E \times I_\varepsilon} |\partial_1 \mathbf{r}(x) \times \partial_2 \mathbf{r}(x)|\, dx\, dy + \dots = s_\varepsilon \int_E |\partial_1 \mathbf{r}(x) \times \partial_2 \mathbf{r}(x)|\, dx + \dots
\end{aligned}$$

ove al posto dei puntini ci sono integrali le cui funzioni integrande hanno moduli $\le \varepsilon M$ o addirittura $\le \varepsilon^2 M$ per un'opportuna costante M. Allora il limite del rapporto $(\operatorname{vol} \Sigma_\varepsilon)/s_\varepsilon$ è il valore dato dalla (15.5).

15.3. Derivata di una misura rispetto a un'altra. Siano $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio elementare di misura e $\rho : A \to [0, +\infty)$ integrabile. Allora la formula

$$m'(E) = \int_E \rho(x)\, dm, \quad E \in \mathcal{E} \tag{15.6}$$

definisce una funzione $m' : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$, dato che ρ è integrabile. Per le proprietà dell'integrale e per il fatto che ρ è non negativa, $(A, \mathcal{E}, m')$ è un altro spazio elementare di misura con lo stesso ambiente e gli stessi insiemi elementari del precedente.

Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e il primo spazio è fine, allora è fine anche lo spazio $(A, \mathcal{E}, m')$ dato che la finezza dipende solo dal semianello $\mathcal{E}$. Se poi A è chiuso e limitato e ρ è anche continua, possiamo applicare il Teorema di cambiamento di variabile con $A' = A$, $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$ e $\mathcal{T} = Id$, l'applicazione identica di A, vale a dire $\mathcal{T}(x) = x$ per ogni $x \in A$, e valgono le altre due condizioni dell'enunciato.

Nel caso più generale ed astratto prospettato all'inizio, invece, non possiamo parlare di intorni e la condizione (b) perde di significato. Al contrario possiamo ancora chiederci della validità della formula (15.3) con $\mathcal{T} = Id$: ebbene si dimostra che, se f è integrabile rispetto a m', allora il prodotto $f\rho$ è integrabile rispetto a m e la (15.3) con $\mathcal{T} = Id$ continua a valere.

In questa situazione generale si usa dire che la funzione ρ è la *derivata* della misura m' rispetto alla misura m e si scrive $\rho = dm'/dm$, richiamando in qualche modo la condizione (b) senza nominarla.

16. Soluzioni massimali di problemi di Cauchy

Riprendiamo ed estendiamo leggermente quanto è stato detto nel Paragrafo IX.2. Diamo poi una condizione sufficiente perché una soluzione sia globale.

16.1. Teorema. *Siano T un punto di $(0,+\infty]$ e $\mathbf{f}$ una funzione definita in $[0,T)\times\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^n$ continua e si supponga che $\mathbf{f}$ possegga le derivate parziali rispetto alle variabili $y_1,\dots,y_n$ e che queste siano continue. Allora, per ogni $\mathbf{u}_0\in\mathbb{R}^n$, esiste un numero reale $t_*\in(0,T]$ con le due proprietà seguenti: (a) esiste una e una sola funzione $\mathbf{u}$ definita in $[0,t_*)$ a valori in $\mathbb{R}^n$ di classe C^1 che risolve il problema di Cauchy*

$$\mathbf{u}'(t)=f(t,\mathbf{u}(t)) \quad \textit{per ogni } t\in[0,t_*) \qquad e \qquad \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0 \tag{16.1}$$

(b) se $T'>t_*$, il problema di Cauchy non ha soluzioni di classe C^1 definite in $[0,T')$. □

Dimostrazione. Diamo una traccia della dimostrazione. Fissato $\mathbf{u}_0$, l'idea è la seguente: vista dapprima l'esistenza di una soluzione locale, consideriamo tutte le soluzioni locali e denotiamo con G l'unione dei loro grafici. Se G è esso stesso un grafico, diciamo di una funzione $\mathbf{u}$, allora $\mathbf{u}$ è necessariamente l'unica soluzione massimale, e, per vedere che G è un grafico, basta controllare che due soluzioni locali qualunque assumono lo stesso valore in tutti i punti in cui esse sono entrambe definite.

Sviluppiamo i due punti seguenti: primo, esiste almeno una soluzione locale; secondo, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due soluzioni locali definite in $[0,T_1)$ e in $[0,T_2)$ rispettivamente, con $0<T_1\le T_2\le T$, risulta $\mathbf{u}(t)=\mathbf{v}(t)$ per ogni $t\in[0,T_1)$.

Dette B_1 e B_2 le palle chiuse di $\mathbb{R}^n$ di centro $\mathbf{u}_0$ e raggi 1 e 2, fissiamo una funzione (effettivamente una funzione di questo tipo può essere costruita) $\zeta:[0,T)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\zeta(t,y)=1$ se $(t,y)\in[0,T/3]\times B_1$ e $\zeta(t,y)=0$ se $(t,y)\notin[0,2T/3]\times B_2$. Posto $\mathbf{g}(t,y)=\mathbf{f}(t,y)\,\zeta(t,y)$ per $t\in[0,T)$ e $y\in\mathbb{R}^n$, consideriamo il problema di Cauchy

$$\mathbf{u}'(t)=\mathbf{g}(t,\mathbf{u}(t)) \quad \text{per ogni } t\in[0,T) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0 \tag{16.2}$$

il quale ha una e una sola soluzione globale $\mathbf{u}$. Infatti $\mathbf{g}$ è continua con le sue derivate rispetto alle variabili y_i e queste sono limitate in quanto continue ovunque e nulle fuori di un insieme limitato, per cui resta applicabile il Teorema di esistenza e unicità in grande. Siccome $\mathbf{u}$ è (almeno) continua e $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0$, esiste $\delta\in(0,T/3)$ tale che $|\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}_0|\le 1$ per $t\in[0,\delta)$. Allora $\zeta(t,\mathbf{u}(t))=1$ per $t<\delta$ e la restrizione a $[0,\delta)$ di $\mathbf{u}$ è una soluzione locale del problema di Cauchy dato.

Siano ora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due soluzioni locali come specificato sopra. Basta dimostrare che, per ogni $T_0\in(0,T_1)$, risulta $\mathbf{u}(t)=\mathbf{v}(t)$ per ogni $t\in[0,T_0]$. Fissiamo dunque T_0. Siccome $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono continue in $[0,T_0]$, esse sono anche limitate ed esiste una palla chiusa B tale che $\mathbf{u}(t)\in B$ e $\mathbf{v}(t)\in B$ per ogni $t\in[0,T_0]$. Allora la funzione $\mathbf{f}$ ha derivate rispetto alle variabili y_i limitate in $[0,T_0]\times B$ e, dunque (come si vede adattando la dimostrazione del Teorema VII.8.2 alle componenti di $\mathbf{f}$ e sfruttando il fatto che B è un convesso), verifica una condizione di Lipschitz del tipo

$$|\mathbf{f}(t,y)-\mathbf{f}(t,z)|\le L|y-z| \quad \text{per ogni } t\in[0,T] \text{ e } y,z\in B\,.$$

Ragionando esattamente come nella dimostrazione dell'unicità della soluzione fatta per il Teorema IX.1.1, deduciamo allora che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ coincidono in $[0,T_0]$. □

16.2. Proposizione. *Nelle condizioni del Teorema 16.1, ogni soluzione massimale limitata è una soluzione globale.* □

Dimostrazione. Sia $\mathbf{u}:[0,t_*)\to\mathbb{R}^n$ una soluzione massimale limitata e, ragionando per assurdo, supponiamo che essa non sia globale. Allora $t_*<T$ e da questo deduciamo una contraddizione. Risulta

$$\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}_0+\int_0^t \mathbf{w}(s)\,ds \quad \text{per ogni } t\in[0,t_*)\,, \quad \text{ove abbiamo posto} \quad \mathbf{w}(s)=\mathbf{f}(s,\mathbf{u}(s)).$$

Ciò si vede ripetendo la prima parte della dimostrazione del Teorema IX.1.1, la quale non utilizza la condizione di Lipschitz. Dimostriamo ora che $\mathbf{w}$ è integrabile nell'intervallo semiaperto $[0,t_*)$. Innanzi tutto $\mathbf{w}$ è continua. D'altra parte $\mathbf{u}$ è limitata, per cui il suo grafico è un sottoinsieme limitato di $[0, t_*) \times \mathbb{R}^n$. Dato che stiamo supponendo $t_* < T$, la chiusura del grafico di $\mathbf{u}$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $[0, T) \times \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f}$ si mantiene limitata su tale insieme. Ciò mostra che $\mathbf{w}$ è limitata. Siccome il prolungamento di $\mathbf{w}$ all'intervallo chiuso è discontinuo al più nel secondo estremo, segue l'integrabilità voluta. Controllata dunque l'integrabilità di $\mathbf{w}$ in $[0, t_*)$ abbiamo

$$\lim_{t \to t_*^-} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \lim_{t \to t_*^-} \int_0^t \mathbf{w}(s)\, ds = \mathbf{u}_0 + \int_0^{t_*} \mathbf{w}(s)\, ds$$

dato che la funzione integrale è continua non appena la funzione integranda sia effettivamente integrabile. Detto $\mathbf{u}^*$ l'ultimo membro, consideriamo, per l'equazione differenziale data, il problema di Cauchy con istante iniziale t_* e dato iniziale $\mathbf{u}^*$: questo ha almeno una soluzione locale. Allora la soluzione data $\mathbf{u}$ si prolunga, tramite questa soluzione locale, a un intervallo più grande, contro l'ipotesi che $\mathbf{u}$ fosse massimale. □

16.3. Osservazione. La limitatezza della soluzione ipotizzata nella proposizione precedente è spesso frutto di una *stima a priori*, cioè di una stima del modulo della soluzione ottenuta senza conoscere la soluzione stessa. Notiamo che molte questioni dell'analisi hanno come punto chiave la deduzione di stime a priori. Qui, senza pretendere di esaurire la discussione, diamo una indicazione su come in certi casi sia possibile stabilire una stima di questo tipo. Consideriamo il caso di un'equazione differenziale scalare retta da una funzione f regolare e supponiamo che essa possegga due soluzioni costanti, che assumono i valori c_1 e c_2 rispettivamente, con $c_1 < c_2$. Allora, se $u_0 \in (c_1, c_2)$, la soluzione massimale u del corrispondente problema di Cauchy verifica $c_1 < u(t) < c_2$ per ogni t del dominio, dato che i grafici di due soluzioni dell'equazione non possono intersecarsi (essendo f regolare, ogni problema di Cauchy ha soluzione massimale unica). Anche lo studio del segno di f , che conduce spesso alla monotonia di certe soluzioni, può aiutare se si dispone almeno di una limitatezza inferiore o superiore. Cogliamo l'occasione per notare che i risultati precedenti e queste considerazioni sono sufficienti per giustificare tutto ciò che nelle Sezioni IV.4.6 e IV.4.11 avevamo assunto senza dimostrazione.

17. Il pendolo

Costruiamo un modello che descrive le oscillazioni di un pendolo, schematizzato da un punto materiale P di massa m legato ad un punto fisso O mediante una sbarretta rigida di lunghezza ℓ e di massa trascurabile. Precisamente descriviamo le oscillazioni che avvengono in un piano verticale, dunque lungo la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro O e raggio ℓ di questo piano. Introddotto un sistema di riferimento cartesiano con origine in O e assi orizzontale e verticale, l'asse verticale delle ordinate essendo orientato verso l'alto e l'asse delle ascisse essendo orientato di conseguenza secondo la convenzione consueta, denotiamo con $\mathbf{x}(t)$ la posizione del punto P all'istante t . Tuttavia, dato il vincolo cui è soggetto il punto, la sua posizione può essere descritta mediante una quantità scalare, ad esempio mediante l'angolo $\vartheta(t)$, orientato in modo che esso cresca se il punto P si muove lungo $\mathcal{C}$ in senso antiorario, che la semiretta OP forma con il semiasse negativo delle ordinate, cioè l'angolo di scostamento dalla posizione di equilibrio stabile. Allora la forma della funzione $\mathbf{x}$ è la seguente:

$$\mathbf{x}(t) = \ell(\cos(\vartheta(t) - \pi/2), \sin(\vartheta(t) - \pi/2)) = \ell(\sin\vartheta(t), -\cos\vartheta(t)).$$

Segue che la velocità e l'accelerazione sono date dalle due formule

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= \ell\vartheta'(t)\,(\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t)) \\
\mathbf{x}''(t) &= \ell\vartheta''(t)\,(\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t)) + \ell(\vartheta'(t))^2(-\sin\vartheta(t), \cos\vartheta(t))
\end{aligned}$$

e la legge fondamentale della dinamica ci fornisce un'equazione differenziale: in ogni istante il prodotto $m\mathbf{x}''(t)$ vale la forza complessiva $\mathbf{f}_c(t)$ che agisce su P all'istante t . Ora consideriamo il versore, che è tangente a $\mathcal{C}$ in $\mathbf{x}(t)$,

$$\tau(t) = (\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t))$$

e ipotizziamo che la forza $\mathbf{f}_c(t)$ si decomponga nella somma

$$\mathbf{f}_c(t) = m\mathbf{g} + f(t)\tau(t) + \mathbf{r}_m(t) + \mathbf{r}_v(t)$$

ove i contributi sono rispettivamente la forza peso, un termine forzante diretto nella direzione del moto e la cui componente secondo τ è nota istante per istante, la resistenza del mezzo in cui il moto avviene e la reazione vincolare dovuta al fatto che la sbarretta che lega P ad O è rigida, reazione che non è nota ma che sappiamo essere normale a $\mathcal{C}$ in ogni istante. Se g è l'intensità dell'accelerazione di gravità e se supponiamo che la resistenza del mezzo sia un vettore di direzione opposta a quella della velocità e di intensità proporzionale a quella della velocità stessa, abbiamo allora

$$m\mathbf{x}''(t) = m(0, -g) + f(t)\tau(t) - k\mathbf{x}'(t) + \mathbf{r}_v(t)$$

ove k è una costante nota, nulla se si trascura la resistenza del mezzo e positiva altrimenti. Per liberarci di $\mathbf{r}_v$ prendiamo il prodotto scalare con $\tau(t)$ ottenendo

$$m\ell\vartheta''(t) = -mg\sin\vartheta(t) - k\ell\vartheta'(t) + f(t).$$

Questa è un'equazione differenziale, nella sola incognita ϑ, la cui forma normale è

$$\vartheta''(t) = -(g/\ell)\sin\vartheta(t) - (k/m)\vartheta'(t) + b(t)$$

ove abbiamo posto $b = f/(m\ell)$. Questa equazione rientra fra quelle per le quali ogni problema di Cauchy ha una e una sola soluzione globale. Notiamo che assegnare una condizione di Cauchy significa, nel nostro caso, assegnare la posizione iniziale e le velocità iniziale di P.

Tuttavia, siccome non è possibile trovare la soluzione in forma esplicita, modifichiamo il modello e lo sostituiamo con una sua approssimazione facendo *l'ipotesi delle piccole oscillazioni*. Supponiamo cioè che la funzione ϑ assuma valori di modulo piccolo (cioè che P si scosti di poco dalla posizione di equilibrio stabile) e, trascurando il resto nello sviluppo $\sin\vartheta = \vartheta + o(\vartheta)$ per $\vartheta \to 0$, sostituiamo $\sin\vartheta(t)$ con $\vartheta(t)$. Abbiamo dunque l'equazione lineare a coefficienti costanti

$$\vartheta''(t) + a_1\vartheta'(t) + a_0\vartheta(t) = b(t) \quad \text{ove} \quad a_0 = g/\ell \quad \text{e} \quad a_1 = k/m. \tag{17.1}$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ e la natura delle sue radici dipende dal valore del discriminante, che è dato da $\Delta = a_1^2 - 4a_0$. Tralasciando il caso $\Delta = 0$, che il lettore può trattare senza difficoltà, notiamo che il caso delle radici reali e distinte e quello delle radici complesse coniugate corrispondono rispettivamente alle disuguaglianze $\Delta > 0$ e $\Delta < 0$, che si interpretano, fissato il pendolo, fissati cioè m e ℓ, come segue: il mezzo è molto resistente e, rispettivamente, poco resistente. Nel primo caso le radici caratteristiche sono due numeri reali $\lambda, \mu < 0$ e l'integrale generale è dato dalla formula

$$\vartheta(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2e^{\mu t} + \vartheta^*(t)$$

ove ϑ^* è un integrale particolare. Supponiamo per un momento $\vartheta^* = 0$, il che corrisponde al caso $b = 0$ in cui il temine forzante è assente. Allora la soluzione, che pensiamo definita in $[0, +\infty)$, di un qualunque problema di Cauchy è monotona oppure ha esattamente due tratti di monotonia, in dipendenza dai segni dei coefficienti c_i che risultano in base alle condizioni iniziali, e ciascuno di questi due casi ha un'interpretazione evidente. In ogni caso, poi, la soluzione è infinitesima per $t \to +\infty$. Se invece l'integrale particolare ϑ^* è effettivamente presente e significativo (ad esempio è una sinusoide), allora nei tempi lunghi esso prende il sopravvento.

Esaminiamo invece con maggior dettaglio il caso più interessante delle radici complesse coniugate. Siano esse $\alpha \pm i\beta$ con $\beta > 0$. Allora la soluzione generale è data dalla formula

$$\vartheta(t) = e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t) + \vartheta^*(t).$$

Ora distinguiamo due casi. Nel primo supponiamo il mezzo, anche se poco, effettivamente resistente, cioè $k > 0$, da cui $a_1 > 0$ e dunque $\alpha < 0$. Allora l'esponenziale effettivamente compare, ma decresce. Se ancora supponiamo $\vartheta^* = 0$, cioè che il termine forzante non ci sia, il pendolo oscilla con oscillazioni smorzate, la cui ampiezza è infinitesima all'infinito. Se invece ϑ^* compare ed è significativo, allora esso prende il sopravvento anche in questo caso.

Se invece la resistenza del mezzo è del tutto trascurabile, allora $k = 0$, da cui $a_1 = 0$ e $\alpha = 0$. Le oscillazioni di cui sopra forniscono ora un moto periodico, di periodo $2\pi/\beta = 2\pi/\sqrt{a_0} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ (in particolare indipendente dalla massa m), e dobbiamo ritenere che esse siano significative indipendentemente dalla presenza di ϑ^*.

Veniamo alla determinazione di ϑ^*, sempre nel caso $\alpha = 0$ in esame, supponendo che il termine forzante sia di tipo sinusoidale. Supponiamo dunque

$$b(t) = b_0 \sin\omega(t - t_0)$$

ove $\omega > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Essendo

$$b(t) = b_1 \cos\omega t + b_2 \sin\omega t$$

per certi $b_i \in \mathbb{R}$, sviluppiamo l'idea proposta nell'Esempio IX.7.6 e cerchiamo ϑ^* direttamente nella forma di combinazione lineare di seni e coseni, ben sapendo tuttavia che ciò equivale a cercare combinazioni degli esponenziali $e^{\pm i\omega t}$. Quindi già prevediamo che saremo costretti a confrontare i valori $\pm i\omega$ con le radici caratteristiche $\pm i\beta$, cioè a distinguiere i due casi $\omega \neq \beta$ e $\omega = \beta$. Cerchiamo dunque ϑ^* del tipo

$$\vartheta^*(t) = k_1 \cos\omega t + k_2 \sin\omega t$$

e determiniamo i coefficienti k_i in modo che ϑ^* sia un integrale particolare dell'equazione (17.1), che ora assume la forma

$$\vartheta''(t) + \beta^2\vartheta(t) = b_1 \cos\omega t + b_2 \sin\omega t. \tag{17.2}$$

Sostituendo otteniamo al primo membro l'espressione

$$-k_1\omega^2 \cos\omega t - k_2\omega^2 \sin\omega t + \beta^2 k_1 \cos\omega t + \beta^2 k_2 \sin\omega t$$

e la (17.2) è soddisfatta se e solo se

$$(\beta^2 - \omega^2)k_1 = b_1 \quad \text{e} \quad (\beta^2 - \omega^2)k_2 = b_2.$$

Siccome $\beta, \omega > 0$, se $\beta \neq \omega$, i coefficienti k_i si determinano univocamente e otteniamo un integrale particolare che può essere riscritto anche nella forma

$$\vartheta^*(t) = c \sin\omega(t - t_1)$$

per certe costanti c e t_1. Se invece $\omega = \beta$ non esistono integrali particolari dalla struttura desiderata e siamo costretti a ripiegare su scelte del tipo

$$\vartheta^*(t) = t(k_1 \cos\beta t + k_2 \sin\beta t).$$

Ancora sostituendo nella (17.2), al primo membro otteniamo

$$-2k_1\beta \sin\beta t + 2k_2\beta \cos\beta t - t\beta^2(k_1 \cos\beta t + k_2 \sin\beta t) + \beta^2\vartheta^*(t)$$

e la (17.2) resta soddisfatta con $k_1 = -b_2/(2\beta)$ e $k_2 = b_1/(2\beta)$. Abbiamo pertanto un integrale particolare del tipo cercato, integrale che possiamo riscrivere come

$$\vartheta^*(t) = ct \sin\beta(t - t_1)$$

per certe costanti reali c e t_1. Questo produce oscillazioni della stessa frequenza di quelle date dall'integrale generale dell'equazione omogenea associata, cioè di quelle proprie del pendolo, ma con il fattore di amplificazione t. Si presenta dunque il fenomeno della risonanza.

Quando poi, in uno qualunque dei casi che abbiamo considerato, si volesse risolvere un problema di Cauchy effettivo per l'equazione data, occorrerebbe determinare i coefficienti c_1 e c_2 che compaiono nell'integrale generale trovato in modo che le condizioni iniziali siano effettivamente soddisfatte e la teoria generale ci assicura che ciò avviene per una e una sola scelta dei coefficienti incogniti. Per quanto riguarda l'ipotesi delle piccole oscillazioni, se i dati iniziali hanno modulo piccolo, la stessa cosa avviene per la soluzione trovata purché non si verifichi il fenomeno della risonanza: in quest'ultimo caso, infatti, a causa del fattore t di amplificazione, nei tempi lunghi la parte ϑ^* della soluzione non riesce ad essere compensata da sinusoidi, né, a maggior ragione, dalle oscillazioni smorzate che si verificano nel caso della resistenza del mezzo, e la soluzione viola la condizione delle piccole oscillazioni. In questo caso, dunque, si deve ritenere che la soluzione descriva correttamente il fenomeno oscillatorio solo per tempi piccoli.

18. Le trascendenti elementari di variabile complessa

In questo paragrafo trattiamo brevemente la sviluppabilità in serie di potenze delle principali funzioni elementari di variabile complessa di tipo trascendente, cioè non algebrico, che sono la funzione esponenziale e le prime funzioni circolari e iperboliche fondamentali.

Richiamiamo la definizione di esponenziale complesso e i suoi legami con le funzioni circolari ed estendiamo la definizione di queste ultime in modo che tali legami restino conservati. L'esponenziale complesso è definito nell'Appendice A dalla formula

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R} . \tag{18.1}$$

Definito l'esponenziale complesso, poniamo

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} . \tag{18.2}$$

D'altra parte dalla (18.1) si ricavano facilmente le due formule

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{iy}}{2} \quad \text{e} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \text{per } y \in \mathbb{R}$$

e il confronto con le (18.2) fornisce

$$\cos y = \cosh iy \quad \text{e} \quad \sin y = \frac{\sinh iy}{i}.$$

Tutto ciò suggerisce la definizione data di seguito.

18.1. Definizione. *La funzione esponenziale e le funzioni* sinh *e* cosh *di variabile complessa sono definite dalle formule* (18.1) *e* (18.2). *Le funzioni* sin *e* cos *di variabile complessa sono definite dalle formule*

$$\cos z = \cosh iz = \frac{e^{iz} + e^{iz}}{2} \quad \text{e} \quad \sin z = \frac{\sinh iz}{i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{18.3}$$

ove ora $z \in \mathbb{C}$. □

La formula degli sviluppi in serie di queste funzioni dipende da un risultato tecnico di carattere generale riguardante il prodotto di due serie numeriche.

18.2. Lemma. *Siano* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *due serie complesse convergenti e si consideri la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{ove} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots \tag{18.4}$$

Se almeno una delle serie date converge assolutamente, allora la (18.4) *converge e vale la formula*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = AB \tag{18.5}$$

ove A *e* B *sono le somme delle due serie date.* □

Dimostrazione. Supponiamo assolutamente convergente la prima delle serie date e introduciamo alcune notazioni. Per ogni n denotiamo con A_n, B_n e C_n le ridotte delle tre serie che stiamo considerando e con p_n la parte intera di $n/2$ e definiamo gli insiemi di coppie di indici

$$\begin{aligned} E^n &= \bigl\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 :\ 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le n\bigr\}, \\ E^n_{\le} &= \{(i,j) \in E^n :\ i+j \le n\}, \quad E^n_{>} = \{(i,j) \in E^n :\ i+j > n\} \\ E^n_{>,\le} &= \{(i,j) \in E^n_{>} :\ j \le p_n\}, \qquad E^n_{>,>} = \{(i,j) \in E^n_{>} :\ j > p_n\}. \end{aligned}$$

Per ogni n abbiamo allora

$$\begin{aligned} A_nB_n - C_n &= \sum_{(i,j)\in E^n} a_ib_j - \sum_{(i,j)\in E^n_{\le}} a_ib_j \\ &= \sum_{(i,j)\in E^n_{>}} a_ib_j = \sum_{(i,j)\in E^n_{>,\le}} a_ib_j + \sum_{(i,j)\in E^n_{>,>}} a_ib_j \end{aligned}$$

e prendendo i moduli otteniamo

$$|A_nB_n - C_n| \le \sum_{(i,j)\in E^n_{>,\le}} |a_i|\,|b_j| + \sum_{(i,j)\in E^n_{>,>}} |a_i|\,|b_j|\,.$$

Ora osserviamo che $i > p_n$ per ogni $(i,j) \in E^n_{>,\le}$ e ricordiamo che la prima delle serie date converge assolutamente. Deduciamo allora

$$|A_nB_n - C_n| \le \sup_{j\ge 0} |b_j| \cdot \sum_{i>p_n} |a_i| + \sup_{j>p_n} |b_j| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$$

e l'ultimo membro è infinitesimo per $n \to \infty$. Siccome il prodotto A_nB_n converge ad AB, lo stesso avviene per C_n. □

Cogliamo l'occasione di sottolineare una conseguenza immediata riguardante il prodotto di due serie di potenze.

18.3. Corollario. *Date le due serie di potenze* $\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_nz^n$, *si supponga che esse abbiano raggi di convergenza* r_1 *e rispettivamente* r_2 *entrambi positivi, finiti o meno, e siano* f_1 *e* f_2 *le rispettive somme. Si consideri la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n \quad \textit{ove} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k} \quad \textit{per } n = 0,1,2,\dots. \tag{18.6}$$

Allora vale la formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n = f_1(z)\,f_2(z) \quad \textit{per } |z| < \min\{r_1, r_2\}\,. \tag{18.7}$$

In particolare il raggio di convergenza r *della* (18.6) *verifica* $r \ge \min\{r_1, r_2\}$. □

Dimostrazione. Fissiamo z verificante $|z| < \min\{r_1, r_2\}$ e dimostriamo la (18.5). Siccome le serie date, valutate nel punto z considerato, convergono assolutamente, il lemma fornisce immediatamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} (a_kz^k)(b_{n-k}z^{n-k}) = f_1(z)f_2(z).$$

L'ultima parte dell'enunciato segue poi dalle proprietà del raggio di convergenza. □

Come detto poco sopra, il lemma consente di dimostrare il risultato di sviluppabilità in serie di potenze delle cinque funzioni introdotte.

18.4. Teorema. *Valgono gli sviluppi in serie*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{18.8}$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{18.9}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{18.10}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$. □

Dimostrazione. Premettiamo la formula di Newton del binomio, cioè

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \text{ove} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{per } k = 0, \dots, n \tag{18.11}$$

che vale per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{C}$.

Supponiamo dapprima $z = iy$ con $y \in \mathbb{R}$. Ricordando gli sviluppi di Taylor delle funzioni seno e coseno in ambito reale, otteniamo

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i \sin y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \end{aligned}$$

cioè la (18.8) nel caso particolare. Nl caso generale in cui $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, applicando il Lemma 18.2 e la formula (18.11) di Newton del binomio, deduciamo

$$\begin{aligned} e^{x+iy} &= e^x e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \, \frac{(iy)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (iy)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} \, . \end{aligned}$$

Le formule (18.9) per le due funzioni iperboliche seguono immediatamente applicando a z e a $-z$ quella appena dimostrata. Le formule (18.10) seguono poi dalle (18.9) applicando le definizioni (18.3). □

Valgono in realtà sviluppi in serie di centro arbitrario. Abbiamo infatti

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}}{n!} (z - z_0)^n \quad \text{per ogni } z_0, z \in \mathbb{C}$$

come si vede ricordando che $e^z = e^{z_0} e^{z - z_0}$ e applicando la (18.8) a $z - z_0$. Un po' più complicato è dimostrare le formule

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (z - z_0)^n \quad \text{e} \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} (z - z_0)^n$$

ove abbiamo posto

$$a_n = \begin{cases} \cosh z_0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \sinh z_0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad b_n = \begin{cases} \sinh z_0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \cosh z_0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Queste seguono dalle precedenti e dalle formule di addizione

$$\begin{aligned}\cosh z &= \cosh z_0 \cosh(z - z_0) + \sinh z_0 \sinh(z - z_0)\\ \sinh z &= \sinh z_0 \cosh(z - z_0) + \cosh z_0 \sinh(z - z_0)\end{aligned}$$

che estendono agli argomenti complessi quelle note per argomenti reali e che si dimostrano direttamente applicando le definizioni (18.2). Formule analoghe, solo più complicate nella scrittura, valgono per le funzioni circolari e si deducono dalle precedenti tramite le definizioni (18.3). In generale valgono anche per argomenti complessi tutte le formule della trigonometria circolare e iperbolica segnalate nell'Appendice B che non fanno intervenire radicali (in realtà valgono anche queste ultime, con tutte le precauzioni dovute ai radicali complessi) e la loro dimostrazione si ottiene applicando le definizioni. Anzi, proprio questa estensione chiarisce perché le due tavole siano analoghe.

Notiamo che tutti questi sviluppi appaiono come sviluppi di Taylor. Ad esempio, nel caso dell'esponenziale, se supponiamo z_0 e z reali, lo sviluppo che abbiamo ottenuto coincide con lo sviluppo di Taylor dato che e^{z_0} è il valore in z_0 di tutte le derivate. Questo fatto non è casuale e ora ne spieghiamo il motivo senza tuttavia entrare in dettaglio.

Anche per funzioni di variabile complessa si può dare la definizione di derivata tramite la formula (formalmente analoga a quella consueta del caso reale)

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} \tag{18.12}$$

ove $\{z_n\}$ è una successione qualunque di punti distinti da z_0 convergente a z_0. D'altra parte occorre mettere in guardia il lettore: le funzioni che posseggono derivata complessa sono molto rare, al punto che è facilissimo trovare funzioni che non posseggono derivata. Ad esempio nessuna funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ non costante ha derivata in tutto $\mathbb{C}$ e in termini suggestivi possiamo dire che le funzioni che posseggono la derivata complessa devono assumere valori "davvero complessi". Questo non è ovvio e ci limitiamo a un esempio: la funzione $f(z) = \operatorname{Re} z$. Questa, addirittura, non ha derivata in alcun punto! Se infatti esistesse la derivata in un certo punto z_0, il suo valore si otterrebbe anche usando le due successioni date dalle formule $z_n = z_0 + 1/n$ e $z_n = z_0 + i/n$. Ma queste forniscono come limiti (18.12) i valori 1 e 0 rispettivamente.

Ebbene, nella classe di queste funzioni pregevoli rientrano le cinque di cui stiamo trattando e per esse valgono le formule consuete, vale a dire

$$\begin{aligned}&De^z = e^z, \quad D\cosh z = \sinh z, \quad D\sinh z = \cosh z,\\ &D\cos z = -\sin z, \quad D\sin z = \cos z\end{aligned}$$

ove $D = d/dz$ e le uguaglianze valgono in tutto $\mathbb{C}$.

Indice