Alcuni spazi funzionali con ordine di derivazione reale

Nel seguito Ω denota un di $\mathbb{R}^n$. Per garantire l'effettiva validità dei risultati e l'equivalenza delle definizioni che diamo a quelle originali occorrono ipotesi su Ω e, per semplicità, possiamo limitarci ai tre casi dell'intero spazio, del semispazio e dell'aperto limitato e regolare, diciamo di classe C^k con k intero $> s$ se gli spazi considerati fanno intervenire l'ordine di derivazione s, anche se potrebbe essere sufficiente una regolarità minore. Per quanto riguarda uguaglianze e inclusioni di spazi, sottintendiamo l'equivalenza delle rispettive norme e la continuità delle immersioni.

Premettiamo alcune notazioni e altre precisazioni. Denotiamo con $\mathbb{N}$ l'insieme degli interi $k \geq 0$ e con B_R la palla di $\mathbb{R}^n$ di centro 0 e raggio $R \in (0, \infty]$, con la convenzione ovvia $B_R = \mathbb{R}^n$ se $R = \infty$. Per $r > 0$ poniamo poi

$$\Omega_r = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > r\}$$

convenendo che sia $\Omega_r = \mathbb{R}^n$ se $\Omega = \mathbb{R}^n$ e che le norme in $L^p(\Omega_r)$ che scriveremo valgano 0 per i valori di r per i quali Ω_r è vuoto.

Per $h \in \mathbb{R}^n$ e $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ definiamo inoltre le funzioni $\Delta_h u$ e $\Delta_h^2 u$ (incrementi primo e secondo di u) mediante le formule

$$(\Delta_h u)(x) = u(x+h) - u(x) \qquad \text{e} \qquad (\Delta_h^2 u)(x) = u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)$$

da intendersi per quasi ogni x di $\Omega_{|h|}$ e di $\Omega_{2|h|}$ rispettivamente. Per semplificare le notazioni scriviamo ad esempio $\Delta_h u(x)$ anziché $(\Delta_h u)(x)$.

Denotiamo infine con $L^p_*(B_R)$ lo spazio $L^p(B_R, d\mu)$ costruito con la misura μ, eventualmente infinita, introdotta inizialmente sui boreliani dalla definizione $\mu(E) = \int_E |h|^{-n}\, dh$ e, eventualmente, poi completata. Analogamente denotiamo con $L^p_{**}(\Omega \times \Omega)$ lo spazio $L^p(\Omega \times \Omega, d\nu)$ ove ora $\nu(E) = \int_{\Omega\times\Omega} |x-y|^{-n}\, dx\, dy$ se E è un boreliano di $\Omega \times \Omega$. Notiamo che, se p è finito, una funzione misurabile φ in B_R appartiene a $L^p_*(B_R)$ quando

$$\int_{B_R} |\varphi(h)|^p\, |h|^{-n}\, dh < \infty$$

e che $L^\infty_*(B_R)$ coincide con l'usuale spazio $L^\infty(B_R)$. Considerazioni analoghe valgono poi per lo spazio $L^p_{**}(\Omega \times \Omega)$.

Spazi di Besov. Per s, p, q reali verificanti

$$s > 0, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad \text{e} \quad 1 \leq q \leq \infty \tag{1}$$

definiamo lo spazio di Besov $B^{s,p}_q(\Omega)$ come segue. Scriviamo s nella forma

$$s = k + \sigma \qquad \text{con} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad 0 < \sigma \leq 1 \tag{2}$$

e fissiamo $R \in (0, \infty]$. Diciamo che $u \in B^{s,p}_q(\Omega)$ quando $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e le funzioni

$$h \mapsto \big\| |h|^{-\sigma} \Delta_h^2 D^\alpha u \big\|_{L^p(\Omega_{2|h|})} \tag{3}$$

appartengono a $L^q_*(B_R)$ per $|\alpha| = k$. Muniamo poi $B^{s,p}_q(\Omega)$ della norma del grafico.

Si dimostra che la definizione non dipende da R, nel senso che diverse scelte di R conducono allo stesso spazio di funzioni e a norme equivalenti. Ad esempio, con le notazioni introdotte, se p e q sono finiti e se scegliamo $R = \infty$, una funzione $u \in W^{k,p}(\Omega)$ appartiene a $B^{s,p}_q(\Omega)$ se le sue derivate $D^\alpha u$ di ordine k verificano

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\Omega_{2|h|}} \bigl| |h|^{-\sigma} \Delta^2_h D^\alpha u(x) \bigr|^p \, dx \right)^{q/p} \frac{dh}{|h|^n} < \infty.$$

Tale condizione si semplifica e diventa

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega_{2|h|}} \bigl| |h|^{-\sigma} \Delta^2_h D^\alpha u(x) \bigr|^p \frac{dx\, dh}{|h|^n} < \infty$$

nel caso particolare in cui $q = p$. Si usa spesso la notazione $B^{s,p}$ anziché $B^{s,p}_p$.

Spazi di Nikol'skiĭ. Questi si ottengono prendendo $q = \infty$ nella definizione degli spazi di Besov. Per $s > 0$ e $1 \le p \le \infty$ abbiamo dunque

$$N^{s,p}(\Omega) = B^{q,p}_\infty(\Omega). \tag{4}$$

Vedremo che gli spazi $N^{s,p}(\Omega)$ generalizzano gli spazi di funzioni hölderiane.

Spazi di Sobolev a esponente non intero, o di Slobodeckiĭ. Per s, p reali verificanti

$$s > 0 \quad \text{non intero} \quad \text{e} \quad 1 \le p \le \infty$$

definiamo lo spazio di $W^{s,p}(\Omega)$ come segue. Scriviamo s nella forma

$$s = k + \sigma \qquad \text{con} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad 0 < \sigma < 1$$

e diciamo che $u \in W^{s,p}(\Omega)$ quando $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e le funzioni

$$(x, y) \mapsto \frac{D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)}{|x - y|^\sigma}, \quad x, y \in \Omega,$$

appartengono a $L^p_{**}(\Omega \times \Omega)$ per $|\alpha| = k$. Ad esempio, se $p < \infty$, richiediamo

$$\int_{\Omega \times \Omega} \left| \frac{D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)}{|x - y|^\sigma} \right|^p \frac{dx\, dy}{|x - y|^n} < \infty.$$

Muniamo poi $W^{s,p}(\Omega)$ della norma del grafico. Equivalentemente, fissato $R \in (0, \infty]$, possiamo richiedere che le funzioni

$$h \mapsto \bigl\| |h|^{-\sigma} \Delta_h D^\alpha u \bigr\|_{L^p(\Omega_{|h|})} \tag{5}$$

appartengono a $L^p_*(B_R)$ per $|\alpha| = k$. Notiamo che in (5) compare l'incremento del primo ordine $\Delta_h u$, mentre in (3) abbiamo l'incremento del secondo ordine $\Delta_h^2 u$.

Riduzione al caso $0 < s \le 1$. Valgano (1) e (2) e sia $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dalle definizioni date seguono immediatamente le doppie implicazioni seguenti

$$\begin{aligned} u \in B^{s,p}_q(\Omega) &\iff D^\alpha u \in B^{\sigma,p}_q(\Omega) \quad \text{per } |\alpha| = k \\ u \in N^{s,p}(\Omega) &\iff D^\alpha u \in N^{\sigma,p}(\Omega) \quad \text{per } |\alpha| = k \\ u \in W^{s,p}(\Omega) &\iff D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \quad \text{per } |\alpha| = k \end{aligned}$$

per cui si è ricondotti a esaminare solo il caso in cui $s = \sigma \in (0, 1]$.

Confronti fra i diversi tipi di spazi. Supponiamo dunque $s = \sigma \in (0, 1]$. Nonostante la differenza segnalata poco sopra circa l'uso degli incrementi primi o secondi, abbiamo quanto segue. Se $0 < \sigma < 1$ e $u \in L^p(\Omega)$, allora $u \in B^{\sigma,p}_q(\Omega)$ se e solo se appartiene a $L^q_*(B_R)$ la funzione

$$h \mapsto \left\| |h|^{-\sigma} \Delta_h u \right\|_{L^p(\Omega_{|h|})} . \tag{6}$$

In altre parole, nel caso in cui s non è intero, è indifferente l'uso di Δ_h o di Δ_h^2 nella definizione degli spazi di Besov $B^{s,p}_q(\Omega)$. Confrontando questo risultato con la definizione di $W^{\sigma,p}(\Omega)$, vediamo che, in particolare, vale l'uguaglianza

$$B^{\sigma,p}_p(\Omega) = W^{\sigma,p}(\Omega) \qquad \text{se} \quad 0 < \sigma < 1.$$

Consideriamo ora lo spazio $W^{\sigma,\infty}(\Omega)$ considerando dapprima il caso $\sigma < 1$. Dire che una funzione $u \in L^\infty(\Omega)$ appartiene a $W^{\sigma,\infty}(\Omega)$ significa richiedere che

$$h \mapsto \left\| |h|^{-\sigma} \Delta_h u \right\|_{L^\infty(\Omega_{|h|})} \quad \text{sia una funzione limitata.}$$

Abbiamo allora che $u \in W^{\sigma,\infty}(\Omega)$ se e solo se u ha un rappresentante hölderiano di esponente σ. D'altra parte questo fatto continua a valere anche quando $\sigma = 1$ dato che $W^{1,\infty}(\Omega)$ è costituito dalle funzioni lipschitziane. Abbiamo dunque

$$W^{\sigma,\infty}(\Omega) = C^{0,\sigma}(\overline{\Omega}) \qquad \text{per} \quad 0 < \sigma \le 1.$$

In particolare, vale la catena di uguaglianze

$$B^{\sigma,\infty}_\infty(\Omega) = N^{\sigma,\infty}(\Omega) = W^{\sigma,\infty}(\Omega) = C^{0,\sigma}(\overline{\Omega}) \qquad \text{per} \quad 0 < \sigma < 1.$$

Supponiamo ora $p < \infty$ e $\sigma = 1$ e confrontiamo i vari spazi. Ebbene, lo spazio $B^{1,p}_p(\Omega)$ è in generale diverso dallo spazio di Sobolev usuale $W^{1,p}(\Omega)$. Abbiamo precisamente

$$\begin{aligned} B^{1,p}_p(\Omega) &\subseteq W^{1,p}(\Omega) \qquad \text{se} \quad 1 \le p \le 2 \\ B^{1,p}_p(\Omega) &\supseteq W^{1,p}(\Omega) \qquad \text{se} \quad 2 \le p \le \infty \end{aligned}$$

e le inclusioni sono strette se $p \neq 2$. Per $p = 2$, riunendo i risultati enunciati, abbiamo invece le uguaglianze

$$B_2^{\sigma,2}(\Omega) = W^{\sigma,2}(\Omega) := H^\sigma(\Omega) \qquad \text{per} \quad 0 < \sigma \leq 1$$

da cui più in generale

$$B_2^{s,2}(\Omega) = W^{s,2}(\Omega) := H^s(\Omega) \qquad \text{per ogni } s > 0 \text{ reale, intero o meno.}$$

Ci si può chiedere, infine, sempre per $p < \infty$, che cosa comporti la richiesta, per una certa $u \in L^p(\Omega)$, che la funzione

$$h \mapsto \left\| |h|^{-1} \Delta_h u \right\|_{L^p(\Omega_{|h|})}$$

appartenga a $L_*^\infty(B_R)$, ad esempio con $R = \infty$ dato che ancora la scelta di R è inessenziale, cioè la limitatezza in $\mathbb{R}^n$ della (6). Rispetto alla (4), stiamo sostituendo gli incrementi secondi $\Delta_h^2 u$ con gli incrementi primi $\Delta_h u$. Occorre allora distinguere il caso $p = 1$, che è eccezionale.

Se $1 < p \leq \infty$ e $u \in L^p(\Omega)$, allora la limitatezza della (6) equivale all'appartenenza di u allo spazio $W^{1,p}(\Omega)$, in particolare non alla condizione $u \in N^{1,p}(\Omega)$.

Se poi $p = 1$ e $u \in L^1(\Omega)$, la limitatezza di (6) ha un significato ancora diverso. Lo spazio delle funzioni $u \in L^1(\Omega)$ tali che la (6) sia limitata costituiscono lo spazio denotato $BV(\Omega)$ e detto spazio delle funzioni a variazione limitata. Se Ω è un intervallo limitato (a, b), una funzione $u \in L^1(a, b)$ appartiene a $BV(a, b)$ se e solo se ha un rappresentante a variazione limitata nel senso tradizionale.

Ulteriori confronti. Siano s, p, q e s_i, p_i, q_i per $i = 1, 2$ nelle condizioni (1). Abbiamo allora i fatti seguenti

$$\begin{aligned}
s_1 > s_2 &\implies W^{s_1,p}(\Omega) \subseteq B_q^{s_2,p}(\Omega) \\
s_1 > s_2 &\implies B_q^{s_1,p}(\Omega) \subseteq W^{s_2,p}(\Omega) \\
s_1 > s_2 &\implies W^{s_1,p}(\Omega) \subseteq W^{s_2,p}(\Omega) \\
s_1 > s_2 &\implies B_{q_1}^{s_1,p}(\Omega) \subseteq B_{q_2}^{s_2,p}(\Omega) \\
q_1 < q_2 &\implies B_{q_1}^{s,p}(\Omega) \subseteq B_{q_2}^{s,p}(\Omega) \\
p_2 > p_1 \quad \text{e} \quad \Omega \text{ limitato} &\implies B_q^{s,p_2}(\Omega) \subseteq B_q^{s,p_1}(\Omega).
\end{aligned}$$

Notiamo in particolare che la variazione dello spazio $B_q^{s,p}(\Omega)$ è più sensibile al cambiamento di s o di p che non a quello di q e che dalle relazioni precedenti si deducono le due immersioni

$$\begin{aligned}
&B_q^{s,p}(\Omega) \subseteq N^{s,p}(\Omega) \\
&W^{s_2,p_2}(\Omega) \subseteq W^{s_1,p_1}(\Omega) \qquad \text{se} \quad s_2 > s_1,\ p_2 > p_1 \text{ e } \Omega \text{ è limitato}
\end{aligned}$$

la seconda delle quali vale anche se $s_1 = s_2 \in \mathbb{N}$. Segnaliamo inoltre l'inclusione

$$W^{s,p}(\Omega) \subseteq N^{s,p}(\Omega)$$

e le immersioni simili alle classiche di Sobolev

$$s_1 < s_2, \quad p_1 > p_2 \quad \text{e} \quad s_1 - \frac{n}{p_1} \le s_2 - \frac{n}{p_2} \quad \Longrightarrow \quad B_q^{s_2,p_2}(\Omega) \subseteq B_q^{s_1,p_1}(\Omega)$$

che però, al contrario di quelle, sono valide senza eccezioni. Per esempio nel caso $n = 2$, combinando le varie immersioni introdotte, abbiamo

$$H^2(\Omega) = B_2^{2,2}(\Omega) \subseteq B_2^{1,\infty}(\Omega) \subseteq B_\infty^{1,\infty}(\Omega) = N^{1,\infty}(\Omega)$$

mentre, se vogliamo restare nell'ambito degli spazi di Sobolev, possiamo dire solo che

$$H^2(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega) \qquad \text{per} \quad 2 \le p < \infty$$

potendo scendere anche a $1 \le p \le 2$ se Ω è limitato.

Tracce. Se Ω è limitato e regolare oppure un semispazio e $\Gamma = \partial\Omega$, gli spazi $B_q^{s,p}(\Gamma)$, $N^{s,p}(\Gamma)$ e $W^{s,p}(\Gamma)$ possono essere definiti per carte locali e partizione dell'unità. Tali spazi godono allora di proprietà perfettamente analoghe a quelli introdotti sopra e valgono un teorema di traccia e un corrispondente teorema di rilevamento. Precisamente, nelle ipotesi

$$1 \le p \le \infty, \quad 1 \le q \le \infty \quad \text{e} \quad s > 1/p$$

l'operatore $u \mapsto u|_\Gamma$ definito sulle funzioni u regolari si prolunga in uno e in un solo modo a un operatore

$$\gamma : B_q^{s,p}(\Omega) \to B_q^{s-1/p,p}(\Gamma) \tag{7}$$

lineare e continuo ed esiste un operatore

$$\mathcal{R} : B_q^{s-1/p,p}(\Gamma) \to B_q^{s,p}(\Omega) \tag{8}$$

lineare e continuo di rilevamento, cioè tale che $\gamma\mathcal{R}v = v$ per ogni $v \in B_q^{s-1/p,p}(\Gamma)$.

Nel caso $p = q = \infty$ ritroviamo le tracce delle funzioni hölderiane o lipschitziane o con derivate che che godono di tali proprietà e il risultato sarebbe di facile dimostrazione.

Supponiamo ora $1 \le p < \infty$ e $q = p$. Se nessuno dei due numeri s e $s - 1/p$ è intero, tutti gli spazi di Besov coinvolti coincidono con i corrispondenti spazi di Sobolev e la stessa cosa avviene se $p = 2$ per ogni $s > 1/2$. Se invece s è intero e $p \ne 2$, il risultato è diverso rispetto al corrispondente sugli spazi $W^{s,p}(\Omega)$ dato che i due spazi $W^{s,p}(\Omega)$ e $B_p^{s,p}(\Omega)$ non coincidono. Tuttavia, almeno per $p > 1$, essi vengono ad avere le stesse tracce. Se poi $p \ne 1, 2$ e $s - 1/p$ è l'intero $k > 0$, abbiamo $W^{s,p}(\Omega) = B_p^{s,p}(\Omega)$, mentre i corrispondenti spazi di tracce $W^{k,p}(\Gamma)$ e $B_p^{k,p}(\Gamma)$ sono diversi. In tal caso deduciamo dalle (7) e (8)

$$\gamma : B_p^{s,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\Gamma) \quad \text{e} \quad \mathcal{R} : B_p^{k,p}(\Gamma) \to W^{s,p}(\Omega) \quad \text{se} \quad p < 2$$
$$\gamma : W^{s,p}(\Omega) \to B_p^{k,p}(\Gamma) \quad \text{e} \quad \mathcal{R} : W^{k,p}(\Gamma) \to B_p^{s,p}(\Omega) \quad \text{se} \quad p > 2$$

a causa delle diverse immersioni in dipendenza dal valore di p. Tuttavia si dimostra che γ opera da $W^{s,p}(\Omega)$ in $B_p^{k,p}(\Gamma)$ anche per $1 < p \le 2$. Infine, nel caso in cui $p = 1$ e s è l'intero $k + 1$, resta vero che γ opera da $W^{s,1}(\Omega)$ in $W^{k,1}(\Gamma)$, mentre non si deduce che $\mathcal{R}$ operi da $W^{k,1}(\Gamma)$ in $W^{s,1}(\Omega)$. Per concludere segnaliamo un risultato limite: è ben definito l'operatore di traccia γ da $B_1^{1/p,p}(\Omega)$ in $L^p(\Gamma)$. Notiamo che, al contrario, non hanno tracce le funzioni dello spazio appena più grande $B_q^{1/p,p}(\Omega)$ con $q > 1$.