Almo Collegio Borromeo — Marzo 1997

Gianni Gilardi

Spazi di Hilbert, serie di Fourier e applicazioni alle equazioni alle derivate parziali

Introduzione

Consideriamo l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{0.1}$$

ove u è una funzione delle due variabili x e t, che variano in un intervallo limitato $]a,b[$ e in $]0,\infty[$ rispettivamente. La (0.1) costituisce un'equazione generale che regola i fenomeni di diffusione e la sua interpretazione più semplice riguarda il caso in cui $u(x,t)$ rappresenta la temperatura all'istante t comune a tutti i punti di una sbarra cilindrica S che hanno ascissa x in un riferimento cartesiano nel quale l'asse x è l'asse di simmetria di S e $x=a$ e $x=b$ sono le equazioni dei piani che delimitano S. Per questo la (0.1) è detta *equazione del calore*.

Se $a = 0$ e $b = \pi$ (solo per semplificare un poco) e se si considera il problema di risolvere la (0.1) con le condizioni aggiuntive

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \forall\, t > 0 \qquad \text{e} \qquad u(x,0) = u_0(x) \quad \forall\, x \in \,]0,\pi[,$$

ove u_0 è una funzione assegnata, si dimostra che, in ipotesi ragionevoli su u_0, esiste una e una sola soluzione, la seguente

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin nx, \tag{0.2}$$

ove i coefficienti sono dati dalle formule

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin nx \, dx. \tag{0.3}$$

Vari risultati di questo tipo sono contenuti già nell'opera fondamentale di Fourier *Théorie analytique de la chaleur* del 1822 e possono essere considerati i germi della nozione di spazio di dimensione infinita. La (0.2), infatti, rappresenta la soluzione del problema considerato come combinazione lineare di infiniti termini indipendenti.

Se si pensa di fissare t, la (0.2) appare come uno sviluppo in serie di seni per la funzione $x \mapsto u(x,t)$ della sola variabile x. Ciò vale in particolare per l'istante $t = 0$, nel quale avviene che il coefficiente di $\sin nx$ è esattamente c_n. Sebbene non ci sia nulla di periodico nel problema posto dato che x varia in un prescritto intervallo limitato, la situazione appare in qualche modo simile a quella che ora descriviamo. □

Consideriamo una funzione $2\pi-$ periodica v. Ebbene, in ipotesi ragionevoli di regolarità su v, vale il cosiddetto *sviluppo di Fourier di* v

$$v(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \bigl(a_n \cos nx + b_n \sin nx \bigr) \tag{0.4}$$

ove i coefficienti, detti *coefficienti di Fourier di* v, sono dati dalle formule

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) \cos nx \, dx, \quad n \geq 0, \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) \sin nx \, dx, \quad n \geq 1.$$

Se poi v è una funzione dispari, allora $a_n = 0$ per ogni $n \geq 0$ mentre

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(x) \sin nx \, dx \qquad \forall\, n \geq 1. \tag{0.5}$$

Otteniamo pertanto una formula diversa dalla (0.3) solo nelle notazioni. □

Riprendiamo lo sviluppo (0.4) nel caso della funzione dispari, in modo da semplificare un poco, e vediamo come formalmente possono essere ottenute le formule (0.5). Moltiplichiamo i due membri della (0.4) per $\sin mx$ e integriamo su $[-\pi, \pi]$. Immaginando di poter integrare la serie termine a termine abbiamo

$$2\int_0^\pi v(x)\sin mx\,dx = \int_{-\pi}^\pi v(x)\sin mx\,dx$$
$$= \sum_{n=1}^\infty b_n \int_{-\pi}^\pi \sin nx \sin mx\,dx = 2\sum_{n=1}^\infty b_n \int_0^\pi \sin nx \sin mx\,dx.$$

Ebbene un facile calcolo mostra che

$$\int_0^\pi \sin nx \sin mx\,dx = 0 \quad \text{se} \quad n \neq m \qquad \text{e} \qquad \int_0^\pi \sin^2 mx = \pi. \tag{0.6}$$

Segue la (0.5) relativa all'indice m , che però è arbitrario. □

Ora vogliamo mettere in evidenza una stretta analogia fra quanto abbiamo appena detto e la possibilità di decomporre un vettore dello spazio nella somma di vettori rispettivamente paralleli a versori fissati a due a due ortogonali. Per questo preferiamo alla funzione $\sin nx$ una sua multipla, precisamente

$$e_n(x) = \pi^{-1/2}\sin nx.$$

Allora le (0.6) diventano

$$\int_0^\pi e_n(x)e_m(x)\,dx = 0 \quad \text{se} \quad n \neq m \qquad \text{e} \qquad \int_0^\pi e_n^2(x) = 1 \tag{0.7}$$

e lo sviluppo (0.4) si riscrive

$$v(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n(x) \qquad \text{ove} \qquad c_n = \int_0^\pi v(x)e_n(x)\,dx. \tag{0.8}$$

Osserviamo ora che, se $\mathbf{v}$ è un vettore dello spazio tridimensionale e se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sono tre versori a due a due ortogonali, abbiamo

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 \qquad \text{ove} \qquad c_i = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i.$$

Ecco allora l'analogia: nella situazione precedente la somma finita di tre addendi è sostituita da una serie e il prodotto scalare di due vettori è sostituito dall'integrale del prodotto di due funzioni, così che, in particolare, le (0.7) esprimono l'analogo del fatto che $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sono vettori a due a due ortogonali e di lunghezza unitaria.

Si prospetta pertanto la possibilità di costruire una teoria generale nella quale rientrino come casi particolari sia la decomposizione di vettori dello spazio tridimensionale in addendi a due a due ortogonali, sia lo sviluppo di funzioni periodiche generiche in serie di funzioni periodiche elementari, sia la presentazione della soluzione di un problema differenziale come sviluppo in serie di funzioni speciali più semplici legate in qualche modo al problema stesso. Questa teoria, che estende la nozione di ortogonalità, è sostanzialmente la teoria astratta degli spazi di Hilbert, così chiamati in onore a David Hilbert (1862–1943).

Uno *spazio di Hilbert* è uno spazio vettoriale (per noi sempre reale) nel quale sia stata scelta una forma bilineare simmetrica, detta *prodotto scalare*, verificante certe proprietà di positività e di completezza. Diamo subito gli esempi più semplici di spazi di Hilbert, riservandoci naturalmente di controllare che essi sono effettivamente spazi di Hilbert dopo che avremo precisato i dettagli della definizione.

0.1. Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^n$, lo spazio euclideo $n-$ dimensionale. Esso è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare usuale, cioè alla forma bilineare simmetrica che ai due vettori $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ associa il numero reale, che denotiamo ora con $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ anziché con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, dato dalla formula

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k. \tag{0.9}$$

In particolare, se $n = 1$, il prodotto scalare è l'usuale prodotto di numeri reali.

0.2. Esempio. La naturale generalizzazione si ottiene sostituendo le $n-$ uple con successioni. La definizione del prodotto scalare dovrebbe essere allora

$$(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \tag{0.10}$$

se $u = \{u_k\}$ e $v = \{v_k\}$ e si presenta il problema della convergenza della serie. Dalla disuguaglianza elementare $2ab \le a^2 + b^2$, valida per ogni coppia di numeri reali, vediamo che una condizione sufficiente per la convergenza assoluta della serie (0.10) è che convergano entrambe le serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} v_k^2.$$

Siamo pertanto indotti a introdurre lo spazio

$$\ell^2 = \Big\{ \{u_k\} : \ u_k \in \mathbb{R} \quad \forall\, k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 < \infty \Big\}. \tag{0.11}$$

Osserviamo che ℓ^2 è uno spazio vettoriale in quanto $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. $\square$

Ora diamo la definizione precisa di spazio di Hilbert. Resta inteso che tutti gli spazi vettoriali che consideriamo sono reali.

1. Spazi di Hilbert

Nel seguito i termini *funzionale lineare* e *forma bilineare* sono sinonimi di applicazione, lineare e bilineare rispettivamente, a valori reali definita sullo spazio vettoriale V in esame o sul prodotto $V \times V$.

1.1. Definizione. *Sia V uno spazio vettoriale. Un prodotto scalare su V è una forma bilineare simmetrica $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ su $V \times V$ positiva nel senso seguente*

$$(v, v) > 0 \qquad \forall\, v \in V \setminus \{0\}. \;\square \tag{1.1}$$

1.2. Proposizione. *Sia $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V . Allora la funzione*

$$\|v\| = (v, v)^{1/2}, \qquad v \in V, \tag{1.2}$$

è una norma su V , cioè verifica, qualunque siano i vettori u e v ,

$$\|u + v\| \le \|u\| + \|v\| \tag{1.3}$$

$$\big|\|u\| - \|v\|\big| \le \|u - v\| \tag{1.4}$$

$$\|cv\| = |c|\,\|v\| \qquad \forall\, c \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

$$\|v\| > 0 \qquad \text{se} \;\; v \ne 0, \tag{1.6}$$

e per ogni $u, v \in V$ vale la disugaglianza di Schwarz

$$|(u, v)| \le \|u\|\,\|v\| . \;\square \tag{1.7}$$

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima la (1.7) supponendo $u \ne 0$ dato che nel caso opposto essa è ovvia. Per $t \in \mathbb{R}$ poniamo

$$\varphi(t) = \|tu + v\|^2 = (tu + v, tu + v) = t^2\,\|u\|^2 + 2t(u, v) + \|v\|^2 .$$

Siccome $\varphi(t) \ge 0$ per ogni t , abbiamo $\varphi(t^*) \ge 0$ anche nel punto di minimo t^* di φ . Ma $t^* = -(u, v)/\,\|u\|^2$ per cui

$$\varphi(t^*) = \|v\|^2 - \frac{(u, v)^2}{\|u\|^2}$$

e otteniamo subito la (1.7).

Per dimostrare la (1.3) basta applicare la (1.7) come segue

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) = \|u\|^2 + 2(u, v) + \|v\|^2 \\ &\le \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2.\end{aligned}$$

La (1.4) è poi una facile conseguenza della (1.3) e le ultime due condizioni sono del tutto ovvie. $\square$

Diciamo che la norma (1.2) è *associata* al prodotto scalare considerato oppure che è *indotta* da esso. Dalle proprietà della norma segue che l'applicazione $d : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$d(u,v) = \|u - v\|\,, \qquad u, v \in V, \tag{1.8}$$

è una metrica in V, detta *metrica indotta* dalla norma o dal prodotto scalare. Pertanto la scelta di un prodotto scalare in uno spazio vettoriale V induce su V in modo canonico una struttura di *spazio metrico* con le associate nozioni di convergenza, continuità, eccetera, che ora richiamiamo.

1.3. Definizione. *Siano (V, d) uno spazio metrico. Diciamo che una successione $\{u_n\}$ di elementi di V converge all'elemento $u \in V$, e scriviamo $u_n \to u$, quando la successione reale $\{d(u_n, u)\}$ delle distanze è infinitesima e diciamo che $\{u_n\}$ è una successione di Cauchy quando per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice m tale che per ogni $n', n'' \geq m$ valga la disuguaglianza $d(u_{n'}, u_{n''}) \leq \varepsilon$. Diciamo poi che V è completo rispetto alla metrica d quando tutte le successioni di Cauchy di V convergono.*

Se A è un sottoinsieme di V, chiamiamo chiusura di A l'insieme $\overline{A}$ dei punti $u \in V$ che godono della proprietà seguente: esiste una successione di elementi di A che converge a u. Diciamo poi che A è chiuso quando $\overline{A} = A$ e che A è denso in V quando $\overline{A} = V$.

Se (W, d_1) è un altro spazio metrico, diciamo che una funzione da V in W è continua quando da $u_n \to u$ in V segue $f(u_n) \to f(u)$ in W. □

1.4. Definizione. *Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale V nel quale sia stato scelto un prodotto scalare che rende V completo rispetto alla metrica indotta.* □

1.5. Osservazione. Dalla disuguaglianza di Schwarz deduciamo che

$$\text{da} \qquad u_n \to u \quad \text{e} \quad v_n \to v \qquad \text{segue} \qquad \lim_{n\to\infty} (u_n, v_n) = (u, v)$$

il che si esprime dicendo che *il prodotto scalare è continuo*. Posto infatti $w_n = u_n - u$ e $z_n = v_n - v$ abbiamo la catena seguente:

$$|(u_n, v_n) - (u, v)| = |(u + w_n, v + z_n) - (u, v)|$$
$$\leq |(w_n, v)| + |(u, z_n)| + |(w_n, z_n)| \leq \|w_n\|\,\|v\| + \|u\|\,\|z_n\| + \|w_n\|\,\|z_n\|\,.$$

1.6. Osservazione. Conviene osservare subito diverse cose. Se in uno spazio vettoriale V si introducono due diversi prodotti scalari $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ e $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\#$, le rispettive metriche indotte d e $d_\#$ sono pure diverse. Allora, in generale, risulteranno diverse anche le nozioni a queste collegate. Ciò, tuttavia, non sempre avviene. Se esistono due costanti c_1 e c_2 tali che

$$(v, v) \leq c_1 (v, v)_\# \qquad \text{e} \qquad (v, v)_\# \leq c_2 (v, v) \qquad \forall\, v \in V, \tag{1.9}$$

e in tali condizioni diciamo che i due prodotti scalari sono *equivalenti*, allora anche le metriche indotte sono legate da analoghe disuguaglianze e i concetti di continuità, convergenza, completezza, eccetera restano gli stessi per le due strutture.

Ad esempio si dimostra che due qualunque prodotti scalari in $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti. Si dimostra pure che *ogni sottospazio di dimensione finita di un qualunque spazio di Hilbert è chiuso.*

Le cose vanno invece diversamente nel caso della dimensione infinita. Non tutti i prodotti scalari in uno stesso spazio sono equivalenti fra loro e non tutti i sottospazi sono chiusi. In particolare, se A è un sottosinsieme di uno spazio di Hilbert V, occorre distinguere con cura i due sottospazi

$$\operatorname{span} A \qquad \text{e} \qquad \overline{\operatorname{span}}\, A.$$

Il primo di essi è l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di A e il secondo è la chiusura del primo.

Ogni sottospazio chiuso V_0 di uno spazio di Hilbert V è esso stesso uno spazio di Hilbert in modo canonico: basta restringere il prodotto scalare alle coppie costituite da elementi di V_0, la completezza essendo immediata. Se infatti $\{u_n\}$ è una successione di Cauchy in V_0, allora $\{u_n\}$ è anche una successione di Cauchy in V, dunque convergente in V a un certo elemento $u \in V$. Siccome $u_n \in V_0$ per ogni n e V_0 è chiuso, deduciamo $u \in V_0$, così che la successione data converge in V_0. □

La presenza di un prodotto scalare comporta molte possibilità che non tutti gli spazi metrici hanno: si possono introdurre l'ortogonalità e le nozioni ad essa collegate.

1.7. Definizione. *Sia V uno spazio di Hilbert. Due elementi $u, v \in V$ si dicono ortogonali quando $(u, v) = 0$. Se A è un sottoinsieme di V, l'ortogonale di A è l'insieme, denotato con il simbolo $A^\perp$, costituito da tutti gli elementi di V che sono ortogonali a tutti gli elementi di A.*

Un sottoinsieme A di V è detto sistema ortogonale quando i suoi elementi sono a due a due ortogonali. Un sistema ortogonale è detto completo quando $\overline{\operatorname{span}}\, A = V$.

Un sistema ortogonale è detto ortonormale quando tutti i suoi elementi hanno norma unitaria. Un sistema ortonormale completo è detto anche base hilbertiana di V. □

Se $u, v \in V$ sono ortogonali allora si ha una relazione pitagorica. Infatti

$$\|u \pm v\|^2 = (u \pm v, u \pm v) = \|u\|^2 \pm 2(u, v) + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

Per induzione si ottiene anche la formula

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} u_k\Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2 \tag{1.10}$$

valida per un numero finito di vettori a due a due ortogonali.

Inoltre si vede che l'ortogonale $A^\perp$ di un qualunque sottosinsieme A di V è un sottospazio chiuso, indipendentemente dalle proprietà di A. Si ha precisamente

$$A^\perp = (\operatorname{span} A)^\perp = (\overline{\operatorname{span}}\, A)^\perp.$$

1.8. Osservazione. Un classe importante è quella degli spazi separabili. Uno spazio di Hilbert V è detto *separabile* quando esiste una una successione non decrescente $\{V_n\}$ di sottospazi di dimensione finita la cui unione $\bigcup_n V_n$ sia densa in V.

Sebbene siano separabili praticamente tutti gli spazi di Hilbert che si incontrano nelle applicazioni, in particolare tutti quelli che noi introdurremo, vale la pena di spendere qualche parola sulla nozione di separabilità, che è intrinsecamente legata a quella di insieme numerabile. A questo proposito ricordiamo che un insieme A è numerabile quando esiste una successione iniettiva avente A come immagine e che non tutti gli insiemi infiniti sono numerabili: ad esempio sono numerabili l'insieme dei numeri interi e quello dei numeri razionali, mentre l'insieme dei numeri reali non lo è.

Chiaramente uno spazio di Hilbert V ha una base hilbertiana finita se e solo se ha dimensione finita. Inoltre, se V ha dimensione infinita e possiede una base hilbertiana numerabile, allora V è separabile. Infine, se V è separabile e di dimensione infinita, possiamo supporre, per semplificare le notazioni, che la successione $\{V_n\}$ della definizione sia tale che $\dim V_n = n$ per ogni n e usare un procedimento ricorsivo di ortonormalizzazione per costruire un sistema ortonormale $\{u_n\}$ tale che $\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\} = V_n$ per ogni n, dunque una base hilbertiana numerabile di V. Riassumendo: V è separabile se e solo se possiede una base hilbertiana finita o numerabile.

1.9. Teorema. *Gli spazi* $\mathbb{R}^n$ *e* ℓ^2 *sono spazi di Hilbert rispetto ai prodotti scalari dati dalle formule* (0.9) *e* (0.10) *rispettivamente.* □

Dimostrazione. L'unico controllo degno di nota riguarda la completezza di ℓ^2. Sia dunque $\{u_n\}$ una successione di Cauchy in ℓ^2. Denotato con u_{nk} il $k-$ esimo elemento del vettore u_n, vediamo che, per ogni k, vale la disuguaglianza

$$|u_{nk} - u_{mk}| \leq \|u_n - u_m\| \qquad \forall\, m, n$$

per cui, sempre per ogni k, anche la successione numerica $\{u_{nk}\}_{n\geq 1}$ è di Cauchy, dunque convergente a un limite che chiamiamo u_{*k}. Consideriamo allora la successione $u_* = \{u_{*k}\}$ e dimostriamo che $u_* \in \ell^2$ e che $\{u_n\}$ converge a u_* in ℓ^2.

Sia $\varepsilon > 0$ ad arbitrio e sia N tale che $\|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$ per tutte le coppie di indici $m, n \geq N$. Allora, per ogni $m, n \geq N$ e per ogni $k \geq 1$, abbiamo

$$\sum_{i=1}^{k} (u_{ni} - u_{mi})^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} (u_{ni} - u_{mi})^2 = \|u_n - u_m\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Prendendo $m \to \infty$ deduciamo

$$\sum_{i=1}^{k} (u_{ni} - u_{*i})^2 \leq \varepsilon^2 \qquad \forall\, n \geq N \qquad \forall\, k \geq 1.$$

Prendendo allora $k \to \infty$ otteniamo

$$\sum_{i=1}^{\infty} (u_{ni} - u_{*i})^2 \leq \varepsilon^2 \qquad \forall\, n \geq N.$$

In particolare $u_N - u_* \in \ell^2$ e dunque anche $u_* \in \ell_2$. Ma allora la disuguaglianza ottenuta si riscrive come $\|u_n - u_*\| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq N$ e la dimostrazione è conclusa. □

Ma lo spazio di Hilbert più importante di tutti si costruisce a partire dalla teoria dell'integrazione di Lebesgue. Consideriamo ad esempio un intervallo $]a, b[$ e lo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ delle funzioni v misurabili su $]a,b[$ tali che v^2 sia integrabile secondo Lebesgue. Detto $\mathcal{V}_0$ il sottospazio di $\mathcal{V}$ costituito dalle funzioni $v \in \mathcal{V}$ nulle q.o., lo spazio vettoriale quoziente $\mathcal{V}/\mathcal{V}_0$ viene denotato con $L^2(a,b)$ e la teoria di Lebesgue permette di dimostrare il risultato fondamentale seguente:

1.10. Teorema. *Lo spazio $L^2(a,b)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare dato dalla formula*

$$(u,v) = \int_a^b u(x)v(x)\,dx. \ \square$$

1.11. Osservazione. Notiamo che il sottospazio delle funzioni a scala è denso in $L^2(a,b)$. Segue che molti sottospazi costituiti da funzioni regolari sono pure densi. A titolo esemplificativo consideriamo il sottospazio V_0 delle funzioni di classe C^1 in $[a,b]$ nulle agli estremi. Se $u \in L^2(a,b)$ e $\varepsilon > 0$, possiamo trovare una funzione a scala w tale che $\|w-u\| \le \varepsilon$. Allora è facile costruire una funzione v continua in $[a,b]$, lineare a tratti, nulla in un intorno di ciascuno dei due estremi e tale che $\|v-w\| \le \varepsilon$. Infine, arrotondando opportunamente i punti angolosi di v, si ottiene una funzione $z \in V_0$ tale che $\|z-v\| \le \varepsilon$. In conclusione, abbiamo $z \in V_0$ e $\|z-u\| \le 3\varepsilon$. $\square$

Il primo scopo che ci prefiggiamo è quello di sviluppare brevemente la teoria astratta delle serie di Fourier. Premettiamo un risultato generale molto importante.

1.12. Teorema di Riesz. *Siano V uno spazio di Hilbert e $F : V \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare verificante la condizione seguente: esiste una costante M tale che*

$$|F(v)| \le M\,\|v\| \qquad \forall\, v \in V. \tag{1.11}$$

Allora esiste uno e un solo elemento $u \in V$ tale che

$$(u,v) = F(v) \qquad \forall\, v \in V. \ \square \tag{1.12}$$

Dimostrazione. Vediamo subito l'unicità. Scelto $v = u$ nella (1.12), abbiamo

$$\|u\|^2 = (u,u) = F(u) \le M\,\|u\|$$

da cui immediatamente

$$\|u\| \le M. \tag{1.13}$$

Allora u è unico nel caso $F = 0$, nel quale possiamo prendere $M = 0$. Segue l'unicità in generale, dato che il problema (1.12) è lineare.

Per dimostrare l'esistenza consideriamo il funzionale $J : V \to \mathbb{R}$ definito dalla formula

$$J(v) = \frac{1}{2}\,\|v\|^2 - F(v), \qquad v \in V. \tag{1.14}$$

e dimostriamo che esso ha minimo. Verifichiamo dapprima che J è limitato inferiormente. Per ogni $v \in V$ abbiamo

$$J(v) \ge \frac{1}{2}\,\|v\|^2 - M\,\|v\| \ge \inf_{x \ge 0}\Bigl(\frac{1}{2}x^2 - Mx\Bigr).$$

Siano allora $\lambda = \inf_{v\in V} J(v)$ e $\{u_n\}$ una successione in V tale che

$$J(u_n) \le \lambda + \frac{1}{n} \qquad \forall\, n.$$

Dimostriamo che $\{u_n\}$ è una successione di Cauchy. Infatti, per ogni n e m, posto per comodità $w_{nm} = (u_n + u_m)/2$, abbiamo

$$\begin{gathered} \|u_n - u_m\|^2 = (u_n - u_m, u_n - u_m) \\ = -(u_n + u_m, u_n + u_m) + 2(u_n, u_n) + 2(u_m, u_m) \\ = -4(w_{nm}, w_{nm}) + 2(u_n, u_n) + 2(u_m, u_m) \\ = -8J(w_{nm}) + 4J(u_n) + 4J(u_m) \\ \le -8\lambda + 4\Big(\lambda + \frac{1}{n}\Big) + 4\Big(\lambda + \frac{1}{m}\Big) = \frac{4}{n} + \frac{4}{m}. \end{gathered}$$

Siccome V è uno spazio di Hilbert, la successione $\{u_n\}$ converge a un certo elemento $u \in V$. Grazie all'Osservazione 1.5 e alla (1.11), $J(u_n) \to J(u)$ per $n \to \infty$. D'altra parte $J(u_n) \to \lambda$. Concludiamo che $J(u) = \lambda$ e quindi che u è un punto di minimo.

Dimostriamo ora che u verifica la (1.12) concludendo così la dimostrazione. Fissato $v \in V$, consideriamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla formula

$$\varphi(t) = J(u + tv) = \frac{t^2}{2}(v, v) + t\big((u, v) - F(v)\big) + \frac{1}{2}(u, u) - F(u).$$

Siccome u minimizza J, abbiamo $\varphi(0) \le \varphi(t)$ per ogni t e, dato che φ è derivabile, deduciamo $\varphi'(0) = 0$. Dunque vale la (1.12). □

1.13. Osservazione. Notiamo che l'esistenza di M tale che valga la (1.11) equivale alla continuità del funzionale F, come si può vedere senza difficoltà. La continuità è conseguenza della linearità solo se V è uno spazio di dimensione finita. □

Il Teorema di Riesz è il cardine della teoria degli spazi di Hilbert. Noi ci limitiamo a segnalare due sue conseguenze.

1.14. Teorema delle proiezioni. *Siano V uno spazio di Hilbert e V_0 un suo sottospazio chiuso. Allora per ogni $u \in V$ esiste uno e un solo $u_0 \in V_0$, detto proiezione di u su V_0, tale che $u - u_0 \in V_0^\perp$, cioè tale che*

$$(u_0, v) = (u, v) \qquad \forall\, v \in V_0. \; \square \tag{1.15}$$

Dimostrazione. Ricordato che V_0 è uno spazio di Hilbert in quanto sottospazio chiuso di V, applichiamo a V_0 il Teorema di Riesz relativamente al funzionale lineare

$$F(v) = (u, v), \qquad v \in V_0,$$

che verifica l'ipotesi (1.11) con $M = \|u\|$ grazie alla disuguaglianza di Schwarz. Esiste dunque uno e un solo $u_0 \in V_0$ che verifica (1.15). □

1.15. Corollario. *Se V è uno spazio di Hilbert e V_0 è un suo sottospazio chiuso, allora vale la formula*

$$(V_0^{\perp})^{\perp} = V_0. \; \square \tag{1.16}$$

Dimostrazione. Dimostriamo le due inclusioni. Sia $u \in V_0$. Allora per ogni $v \in V_0^{\perp}$ risulta $(u, v) = 0$ per definizione di $V_0^{\perp}$. Allora $u \in (V_0^{\perp})^{\perp}$ per definizione di $(V_0^{\perp})^{\perp}$.

Sia ora $u \in (V_0^{\perp})^{\perp}$ e sia u_0 la sua proiezione su V_0. Osserviamo che, grazie alla prima inclusione già dimostrata, $u_0 \in (V_0^{\perp})^{\perp}$. Dunque anche la differenza $u - u_0$ appartiene a $(V_0^{\perp})^{\perp}$. D'altra parte la (1.15) dice che $u - u_0 \in V_0^{\perp}$. Deduciamo che $u - u_0$ è ortogonale a se stesso e quindi che è nullo. Segue $u = u_0$ e quindi $u \in V_0$. $\square$

2. Serie di Fourier

La teoria che esponiamo ora generalizza al caso degli spazi di Hilbert la decomposizione dei vettori euclidei secondo basi ortonormali e, allo stesso tempo, la teoria delle serie di Fourier classiche. Sebbene noi non metteremo in evidenza esplicitamente il fatto, l'idea della proiezione è costantemente presente in tutta la teoria. Somma di una serie significa naturalmente limite della successione delle ridotte.

2.1. Lemma. *Siano V uno spazio di Hilbert e $\{w_n\}$ una successione ortogonale. Allora la serie $\sum_n w_n$ converge se e solo se la successione delle norma appartiene a ℓ^2.* $\square$

Dimostrazione. Per ogni m, n con $m < n$ abbiamo la relazione pitagorica

$$\Big\| \sum_{k=m}^{n} w_k \Big\|^2 = \sum_{k=m}^{n} \|w_k\|^2 .$$

Allora le ridotte della serie $\sum_k w_k$ costituiscono una successione di Cauchy in V se e solo se le ridotte della serie $\sum_k \|w_k\|^2$ costituiscono una successione di Cauchy di numeri reali. Grazie alla completezza di V e di $\mathbb{R}$ si conclude. $\square$

2.2. Definizione. *Data una successione $\{u_n\}$ che costituisca un sistema ortogonale non contenente il vettore nullo, il numero reale c_n dato dalla formula*

$$c_n = \frac{(u, u_n)}{\|u_n\|^2} \tag{2.1}$$

in corrispondenza al generico $u \in V$ si chiama $n-$ esimo coefficiente di Fourier di u rispetto al sistema considerato e la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u, u_n)}{\|u_n\|^2} \, u_n \tag{2.2}$$

si chiama serie di Fourier di u rispetto al sistema considerato. $\square$

2.3. Teorema. *Siano V uno spazio di Hilbert e $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una successione ortogonale non contenente il vettore nullo e si ponga*

$$W = \overline{\operatorname{span}}\,\{u_n : n \geq 1\}\,.$$

Allora, per ogni $u \in V$, la serie di Fourier di u converge in V e vale la cosiddetta disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u,u_n)^2}{\|u_n\|^2} \leq \|u\|^2\,. \tag{2.3}$$

Inoltre la differenza fra u e la somma della sua serie di Fourier è ortogonale a tutti i vettori u_n e sono equivalenti i tre fatti seguenti: a) $u \in W$; b) la somma della serie di Fourier di u è proprio u; c) nella disuguaglianza di Bessel vale il segno di uguaglianza e vale dunque la cosiddetta uguaglianza di Parseval

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u,u_n)^2}{\|u_n\|^2} = \|u\|^2\,. \tag{2.4}$$

Infine, se $u = \sum_n c_n' u_n$ in V per una certa successione numerica $\{c_n'\}$, allora i coefficienti c_n' sono necessariamente i coefficienti di Fourier di u rispetto al sistema considerato. □

Dimostrazione. Dimostriamo la (2.3). Poniamo per $k, n \geq 1$

$$c_k = \frac{(u,u_k)}{\|u_k\|^2} \qquad \text{e} \qquad v_n = u - \sum_{k\leq n} c_k u_k. \tag{2.5}$$

Osserviamo innanzi tutto che

$$\|c_k u_k\|^2 = c_k^2 \,\|u_k\|^2 = \frac{(u,u_k)^2}{\|u_k\|^2}. \tag{2.6}$$

Inoltre, per le proprietà elementari del prodotto scalare, abbiamo l'uguaglianza

$$\|u\|^2 = \|v_n\|^2 + 2\sum_{k\leq n}(v_n, c_k u_k) + \Big\|\sum_{k\leq n} c_k u_k\Big\|^2 \tag{2.7}$$

e ora esaminiamo separatamente gli ultimi addendi. Abbiamo

$$\begin{aligned}(v_n, c_k u_k) &= \Big(u - \sum_{j\leq n} c_j u_j, c_k u_k\Big) \\ &= (u, c_k u_k) - (c_k u_k, c_k u_k) = c_k(u,u_k) - c_k^2\,\|u_k\|^2 = 0,\end{aligned}$$

per cui la prima sommatoria della (2.7) è nulla. L'altra vale invece

$$\sum_{k\leq n} \|c_k u_k\|^2 = \sum_{k\leq n} c_k^2\,\|u_k\|^2\,.$$

Allora la (2.7) e la (2.6) forniscono

$$\|u\|^2 = \|v_n\|^2 + \sum_{k\le n} c_k^2 \|u_k\|^2 \ge \sum_{k\le n} \frac{(u,u_k)^2}{\|u_k\|^2} \tag{2.8}$$

e, data l'arbitrarietà di n, la (2.3) segue immediatamente.

Dalla disuguaglianza di Bessel, dalla (2.6) e dalla Proposizione 2.1 segue immediatamente che la serie di Fourier di u converge in V. Per ogni m fissato e per ogni $n \ge m$ abbiamo inoltre

$$\Big(u - \sum_{k\le n} c_k u_k, u_m\Big) = (u,u_m) - \sum_{k\le n} c_k (u_k,u_m) = (u,u_m) - c_m \|u_m\|^2 = 0 \tag{2.9}$$

per definizione di c_m. Passando al limite per $n \to \infty$ e usando la continuità del prodotto scalare, vediamo che la differenza fra u e la somma della sua serie di Fourier è ortogonale a tutti gli u_m.

Veniamo ora all'equivalenza tra le affermazioni $a)$, $b)$ e $c)$. Ricordando la definizione di v_n data dalla (2.5), vediamo che l'uguaglianza contenuta nella (2.8) si riscrive

$$\|u\|^2 - \sum_{k\le n} \frac{(u,u_k)^2}{\|u_k\|^2} = \Big\|u - \sum_{k\le n} c_k u_k\Big\|^2$$

e, prendendo $n \to \infty$, deduciamo che la disuguaglianza di Bessel diventa l'uguaglianza di Parseval se e solo se la serie di Fourier di u converge proprio a u. Abbiamo dunque dimostrato l'equivalenza fra le affermazioni $b)$ e $c)$ dell'enunciato.

Supponiamo ora che valga la $b)$: allora u, come limite delle ridotte, appartiene a W e dunque vale la $a)$. Viceversa supponiamo che valga la $a)$ e dimostriamo che vale la $b)$. A questo scopo osserviamo che, per n fissato e per ogni $n-$ upla $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, abbiamo

$$\begin{aligned} &\Big\|u - \sum_{k\le n} x_k u_k\Big\|^2 \\ &= \Big\|u - \sum_{k\le n} c_k u_k + \sum_{k\le n} (c_k - x_k) u_k\Big\|^2 \\ &= \Big\|u - \sum_{k\le n} c_k u_k\Big\|^2 + \sum_{k\le n} (c_k - x_k)^2 \|u_k\|^2 \end{aligned}$$

in quanto, per la (2.9), vale la relazione pitagorica. Siccome tutti gli addendi dell'ultima somma sono non negativi in ogni caso e nulli se prendiamo $x_k = c_k$ per ogni k, il minimo del primo membro al variare della $n-$ upla considerata si ottiene prendendo come coefficienti proprio i coefficienti di Fourier. Osservato ciò, sia $\{w_n\}$ una successione di elementi di $\operatorname{span}\{u_k\}$ convergente a u in V in accordo con l'ipotesi $a)$ e si presenti ciascuno dei w_n come combinazione lineare finita degli u_k:

$$w_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n_i} \qquad \text{ove} \qquad n_1 < n_2 < \ldots < n_m.$$

Detta f_m la ridotta n_m- esima della serie di Fourier di u, abbiamo allora

$$\|u - f_m\| \le \|u - w_n\|$$

e il secondo membro è per ipotesi infinitesimo per $n \to \infty$. Dunque la serie di Fourier di u deve convergere a u.

Dimostriamo infine l'ultima affermazione dell'enunciato. Se

$$u = \sum_n c'_n u_n,$$

moltiplicando scalarmente i due membri per u_m con m fissato ad arbitrio e usando la linearità e la continuità del prodotto scalare rispetto al primo fattore, abbiamo

$$(u, u_m) = \sum_n c'_n (u_n, u_m) = c'_m \|u_m\|^2$$

e quindi $c'_m = c_m$. $\square$

2.4. Osservazione. Dall'equivalenza dei punti $a)$ e $b)$ vediamo che la serie di Fourier di ogni elemento $u \in V$ converge proprio a u se e solo se $W = V$, cioè se e solo se il sistema $\{u_n\}$ considerato è completo.

2.5. Esempio. Considerati lo spazio di Hilbert $L^2(-\pi, \pi)$ e il sistema

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \cos 3x, \quad \sin 3x, \ldots \tag{2.10}$$

si verifica senza difficoltà che il sistema (2.10) è ortogonale e che tutti i suoi elementi hanno norma pari a $\sqrt{\pi}$. Allora i coefficienti di Fourier, nel senso della teoria che stiamo sviluppando, della generica funzione $u \in L^2(-\pi, \pi)$ sono dati da

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cos nx \, dx \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \sin nx \, dx$$

con l'eccezione del primo e, se si estende al caso $n = 0$ la formula che fornisce a_n come definizione di a_0, la serie di Fourier di u si scrive

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(a_n \cos nx + b_n \sin nx \bigr).$$

Dunque essa coincide con la serie di Fourier, nel senso tradizionale del termine, del prolungamento $2\pi-$ periodico di u.

Ora dimostriamo che il sistema (2.10) è anche completo appoggiandoci alla teoria classica delle serie di Fourier. Se $u \in C^1[-\pi, \pi]$ assume valori uguali in $\pm\pi$, allora il suo prolungamento $2\pi-$ periodico è continuo globalmente e di classe C^1 a tratti, per cui la serie di Fourier di u converge a u uniformemente in $[-\pi, \pi]$, quindi anche in $L^2(-\pi, \pi)$. Segue che la chiusura in $L^2(-\pi, \pi)$ del sottospazio S generato dal sistema (2.10) contiene almeno le funzioni del tipo descritto. Siccome già queste costituiscono un sottospazio denso in $L^2(-\pi, \pi)$ grazie all'Osservazione 1.11, è denso a maggior ragione il sottospazio S e il sistema considerato è completo.

3. Convergenza debole

Sia A una matrice reale $n \times n$ e si consideri il problema della determinazione dei suoi autovalori. Questo consiste nel cercare $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che il sistema

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \tag{3.1}$$

di incognita $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ abbia soluzioni non banali.

Chiaramente, se $\mathbf{u}$ risolve (3.1), allora

$$(A\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Viceversa, se vale (3.2), la scelta $\mathbf{v} = A\mathbf{u} - \lambda\mathbf{u}$ ci porta a concludere che $\mathbf{u}$ risolve anche il sistema lineare (3.1).

Consideriamo ora il problema di determinare una funzione u tale che

$$-u''(x) = \lambda u(x) \quad \text{in } \;]0,1[, \qquad u(0) = u(1) = 0. \tag{3.3}$$

Se u è una soluzione regolare di (3.3), moltiplicando per la generica funzione v di classe C^1 e nulla agli estremi e integrando per parti, otteniamo

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \lambda \int_0^1 u(x)v(x)\,dx. \tag{3.4}$$

Viceversa, se u è una funzione regolare nulla agli estremi che verifica la (3.4) per tutte le v considerate, allora u risolve anche il problema (3.3).

Fra i due problemi (3.1) e (3.3) c'è dunque una certa analogia, che meglio si vede confrontando le formulazioni alternative (3.2) e (3.4). Entrambe, infatti, rientrano in una situazione astratta formalmente del tipo

$$a(u,v) = \lambda\,(u,v) \qquad \forall\, v \in V$$

ove a è una forma bilineare, $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ è un prodotto scalare e V è un certo spazio. Nel primo caso lo spazio è $\mathbb{R}^n$ e la forma bilineare è quella associata alla matrice A; nel secondo la situazione è più delicata. Infatti, mentre il secondo membro avrebbe senso per tutte le coppie di funzioni di $L^2(0,1)$, il fatto che nel primo intervengano le derivate ci impedisce di considerare $L^2(0,1)$ come spazio V e V dovrà essere costituito da funzioni abbastanza regolari. Dunque la situazione astratta dovrà prevedere due spazi, che coincideranno entrambi con $\mathbb{R}^n$ nelle applicazioni ai sistemi lineari ma che saranno di solito distinti in altri tipi di applicazioni.

Torniamo al problema (3.1). L'ipotesi classica che assicura l'esistenza di una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori è che la matrice A sia simmetrica. In tali condizioni, per costruire un autovalore e un corrispondente autovettore, basta minimizzare la formula quadratica $(A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$ sotto la condizione $|\mathbf{v}| = 1$, ove $|\cdot|$ è la norma euclidea. L'esistenza del punto di minimo viene dal Teorema di Weierstrass che assicura che ogni funzione continua su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ chiuso e limitato ha minimo. Il Teorema di Weierstrass, a sua volta, è una facile conseguenza del Teorema di Bolzano–Weierstrass sull'esistenza di sottosuccessioni convergenti estratte da una successione limitata.

Nel caso astratto imporremo allora che la forma bilineare a sia simmetrica e cercheremo di ripercorrere la via della minimizzazione della forma quadratica associata. Purtroppo però il Teorema di Bolzano–Weierstrass non si estende al caso degli spazi di Hilbert come mostra il caso di una qualunque successione ortonormale $\{e_n\}$ in un qualunque spazio di Hilbert V di dimensione infinita: siccome $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ per $n \neq m$ grazie alla relazione pitagorica, la successione data non ha sottosuccessioni di Cauchy. Questo fatto ci costringe a apportare una modifica consistente: usare un diverso tipo di convergenza.

3.1. Definizione. *Una successione* $\{u_n\}$ *di elementi di* V *converge debolmente in* V *all'elemento* $u \in V$ *quando*

$$\lim_{n\to\infty} (u_n, v) = (u, v) \qquad \forall\, v \in V. \ \square \tag{3.5}$$

Scriveremo in tal caso $u_n \rightharpoonup u$, mentre useremo il simbolo $u_n \to u$ per indicare che $\{u_n\}$ converge a u *fortemente* in V, cioè rispetto alla metrica di V.

Osserviamo che la nozione di convergenza debole non cambia se si sostituisce il prodotto scalare con un prodotto scalare equivalente. Infatti, grazie al Teorema di Riesz, la condizione (3.5) equivale a

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = F(v)$$

per ogni $F : V \to \mathbb{R}$ lineare e continuo e, dunque, dipende solo dall'insieme dei funzionali lineari e continui su V, che nei due casi è lo stesso.

Chiaramente il limite debole è unico e, per la disuguaglianza di Schwarz, la convergenza forte $u_n \to u$ implica la convergenza debole $u_n \rightharpoonup u$. Da $u_n \rightharpoonup u$ segue poi

$$\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \tag{3.6}$$

come si vede scrivendo $\|u\|^2 = \lim_{n\to\infty}(u, u_n)$.

Se V ha dimensione finita, le convergenze forte e debole coincidono (fissare una base ortonormale). Se invece V ha dimensione infinita esse sono distinte: preso infatti un sistema ortonormale $\{e_n\}$, abbiamo $e_n \rightharpoonup 0$ grazie alla disuguaglianza di Bessel $\sum_n |(v, e_n)|^2 \leq \|v\|^2$ valida per ogni $v \in V$, mentre $\{e_n\}$ non converge a 0 fortemente.

Se V_0 è un sottospazio chiuso di V, $\{u_n\}$ è una successione in V_0 e $u \in V$ vediamo, grazie al Corollario 1.15, che $u_n \rightharpoonup u$ in V implica $u \in V_0$ (e $u_n \rightharpoonup u$ in V_0) e, grazie al Teorema delle proiezioni, che da $u \in V_0$ e $u_n \rightharpoonup u$ in V_0 segue $u_n \rightharpoonup u$ in V.

3.2. Teorema. *Ogni successione debolmente convergente è limitata.* $\square$

Dimostrazione. Sia $\{u_n\}$ una successione debolmente convergente e, ragionando per assurdo, supponiamo che essa non sia limitata. Per $v \in V$ poniamo

$$s(v) = \sup_n |(u_n, v)|$$

osservando che $s(v)$ è finito grazie all'ipotesi di convergenza debole. Siccome però $\{u_n\}$ non è limitata, esiste n_1 tale che $\|u_{n_1}\| \geq 1$. Posto allora $e_1 = u_{n_1} / \|u_{n_1}\|$, abbiamo

$$\|e_1\| = 1 \qquad \text{e} \qquad (u_{n_1}, e_1) \geq 1$$

Sia ora $V_1 = \operatorname{span}\{e_1\}$. Detta u'_n la proiezione di u_n su V_1 e posto $u''_n = u_n - u'_n$, siccome $\{u_n\}$ non è limitata mentre $\{u'_n\}$ lo è in quanto converge debolmente nello spazio di dimensione finita V_1, deduciamo dalla relazione pitagorica che $\{u''_n\}$ non è limitata. Dunque esiste $n_2 > n_1$ tale che

$$\|u''_{n_2}\| \geq 2^2 + 2s(e_1).$$

Allora esiste anche $e_2 \in V_1^{\perp}$ tale che

$$\|e_2\| = 1 \qquad \text{e} \qquad (u_{n_2}, e_2) \geq 2^2 + 2s(e_1).$$

Possiamo prendere infatti $e_2 = u''_{n_2} / \|u''_{n_2}\|$.

Procedendo per induzione, costruiamo una successione strettamente crescente $\{n_k\}$ di indici e una successione $\{e_k\}$ di vettori tali che, per ogni $k \geq 1$, e_k abbia norma unitaria, e_{k+1} sia ortogonale a e_i e a u_{n_i} per $i \leq k$ e valga la disuguaglianza

$$(u_{n_{k+1}}, e_{k+1}) \geq (k+1)^2 + (k+1) \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} s(e_i).$$

Osservato che la serie $\sum_i (1/i^2)$ converge, definiamo $v = \sum_{i=1}^{\infty} (1/i) e_i$ e contraddiciamo l'ipotesi di convergenza debole. Per ogni k, ricordando che $(u_{n_{k+1}}, e_i) = 0$ per ogni $i > k+1$, abbiamo

$$\begin{aligned} |(u_{n_{k+1}}, v)| &= \Bigl| \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} (u_{n_{k+1}}, e_i) + \frac{1}{k+1} (u_{n_{k+1}}, e_{k+1}) \Bigr| \\ &\geq \frac{1}{k+1} |(u_{n_{k+1}}, e_{k+1})| - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} s(e_i) \geq k+1 \end{aligned}$$

così che la successione $\{(u_n, v)\}$ non può convergere. □

3.3. Teorema di compattezza debole. *Da ogni successione limitata $\{u_n\}$ di V si può estrarre una sottosuccessione convergente debolmente in V.* □

Dimostrazione. Considerando il sottospazio chiuso $V_0 = \overline{\operatorname{span}}\{u_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ se necessario, ci riconduciamo al caso in cui V è separabile. Inoltre, se V ha dimensione finita, il risultato è evidente. Supponiamo pertanto V separabile e di dimensione infinita.

Sia $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una base hilbertiana di V. Per ogni $i \in \mathbb{N}$ consideriamo la successione numerica $\{(u_n, e_i)\}$. Se M maggiora $\|u_n\|$ per ogni n, allora $|(u_n, e_i)| \leq M$ per ogni n e per ogni i. Dunque, per ogni i e per ogni sottosuccessione estratta dalla successione data, possiamo estrarre ulteriormente una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che la successione numerica $\{(u_{n_k}, e_i)\}$ converga. Con un procedimento diagonale costruiamo pertanto una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che, per ogni i, la successione numerica $\{(u_{n_k}, e_i)\}$ converga a un certo $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Proseguiamo provando che $\{u_{n_k}\}$ converge debolmente a

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i.$$

Dapprima occorre controllare che tale u è ben definito.

Grazie alla disuguaglianza di Bessel, abbiamo per ogni $m, k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{m} (u_{n_k}, e_i)^2 \le \|u_{n_k}\|^2 \le M^2$$

da cui, prendendo $k \to \infty$, deduciamo $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \le M^2$. Dunque la serie $\sum_i \lambda_i^2$ converge e la definizione di u ha senso.

Verifichiamo infine che $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in V. Scritto il generico vettore $v \in V$ nella forma $v = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ con $\sum_i c_i^2 < \infty$, per ogni k e m abbiamo

$$\begin{aligned}
|(u - u_{n_k}, v)| &= \Big| \sum_{i=1}^{\infty} \big(\lambda_i - (u_{n_k}, e_i)\big)\, c_i \Big| \\
&\le \sum_{i \le m} |\lambda_i - (u_{n_k}, e_i)|\, |c_i| + \sum_{i > m} |\lambda_i - (u_{n_k}, e_i)|\, |c_i| \\
&\le \sum_{i \le m} |\lambda_i - (u_{n_k}, e_i)|\, |c_i| + \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i - (u_{n_k}, e_i)|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{i > m} c_i^2 \Big)^{1/2} \\
&= \sum_{i \le m} |\lambda_i - (u_{n_k}, e_i)|\, |c_i| + \|u - u_{n_k}\| \Big(\sum_{i > m} c_i^2 \Big)^{1/2} \\
&\le \sum_{i \le m} |\lambda_i - (u_{n_k}, e_i)|\, |c_i| + (\|u\| + M) \Big(\sum_{i > m} c_i^2 \Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Fissato allora $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si conclude facilmente scegliendo dapprima m in modo che il secondo addendo dell'ultimo membro sia $\le \varepsilon$ e osservando che l'altro addendo è una somma finita di termini infinitesimi per $k \to \infty$. $\square$

4. Problemi astratti di autovalori

Riprendiamo il discorso introduttivo del paragrafo precedente e precisiamo il problema astratto che vogliamo risolvere. I primi dati sono due spazi di Hilbert V e H verificanti le condizioni seguenti:

$$V \ne \{0\} \tag{4.1}$$

$$V \text{ è un sottospazio vettoriale di } H \text{ denso in } H \tag{4.2}$$

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } V \qquad \text{implica} \qquad u_n \to u \quad \text{in } H. \tag{4.3}$$

Si noti che esse sono soddisfatte se $V = H = \mathbb{R}^n$. Per semplificare le notazioni denoteremo con $\|\cdot\|$ la norma in V e con $|\cdot|$ e $(\cdot\,,\cdot)$ la norma e il prodotto scalare in H . Vedremo invece che il prodotto scalare di V non svolgerà un ruolo rilevante.

L'altro dato è una forma bilineare simmetrica $a : V \times V \to \mathbb{R}$ verificante le condizioni seguenti: esistono $M \geq 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$ tali che

$$|a(u,v)| \leq M\,\|u\|\,\|v\| \qquad \forall\, u,v \in V \tag{4.4}$$

$$a(v,v) + \lambda_0\,|v|^2 \geq \alpha\,\|v\|^2 \qquad \forall\, v \in V. \tag{4.5}$$

Dato che a è bilineare, la (4.4) equivale al fatto che a sia anche continua. Le condizioni imposte sono poi soddisfatte nel caso finito–dimensionale $V = H = \mathbb{R}^n$ qualunque sia la forma bilineare simmetrica a . Infatti, se A è la matrice simmetrica $n \times n$ che individua a , la (4.4) vale banalmente e la validità della (4.5) per qualche $\alpha > 0$ equivale al fatto che $A + \lambda_0 I$, ove I è la matrice unità, sia definita positiva. Dunque essa vale se λ_0 è abbastanza grande.

Detto ciò consideriamo il problema di trovare $u \in V$ tale che

$$a(u,v) = \lambda\,(u,v) \qquad \forall\, v \in V \tag{4.6}$$

ove λ è un parametro reale.

4.1. Definizione. *Nelle condizioni precedenti diciamo che* λ *è un autovalore del problema quando la* (4.6) *ha almeno una soluzione* $u \in V \setminus \{0\}$ *. In tal caso chiamiamo autospazio corrispondente l'insieme delle soluzioni della* (4.6) *e autosoluzione oppure autovettore ogni soluzione non nulla.* □

Conviene cambiare sin d'ora il prodotto scalare preesistente in V e sostituirlo come segue. Definiamo la forma bilineare $(\!(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\!)$ su $V \times V$ mediante la formula

$$(\!(u,v)\!) = a(u,v) + \lambda_0\,(u,v), \qquad u,v \in V. \tag{4.7}$$

Siccome a è una forma bilineare e simmetrica e vale la (4.5), la (4.7) effettivamente definisce un prodotto scalare. La (4.5) si riscrive

$$(\!(v,v)\!) \geq \alpha\,\|v\|^2$$

e una disuguaglianza in senso opposto si deduce facilmente dalle (4.4) e (4.3). Infatti da $u_n \to 0$ in V segue $u_n \rightharpoonup 0$ in V e quindi anche, grazie alla (4.3), $u_n \to 0$ in H . Da ciò, ragionando per assurdo, è facile dedurre che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$|v| \leq c\,\|v\| \qquad \forall\, v \in V. \tag{4.8}$$

Usando anche la (4.4), otteniamo allora

$$(\!(v,v)\!) \leq M\,\|v\|^2 + |\lambda_0|\,|v|^2 \leq (M + c^2|\lambda_0|)\,\|v\|^2\,.$$

Le disuguaglianze trovate dimostrano le (1.9), cioè che il prodotto scalare (4.7) è equivalente a quello preesistente.

4.2. Teorema. *Nelle condizioni dette valgono le conclusioni seguenti:* (a) *ogni autovalore è* $> -\lambda_0$ *;* (b) *l'insieme degli autovalori non ha punti di accumulazione;* (c) *autovettori associati ad autovalori diversi sono ortogonali rispetto al prodotto scalare di* H *e rispetto al prodotto scalare* (4.7) *di* V *;* (d) *ogni autospazio ha dimensione finita;* (e) *l'unione degli autospazi genera un sottospazio denso in* V *e in* H *.* □

Notiamo un fatto importante. Scegliamo in ciascuno degli autospazi una base ortonormale rispetto al prodotto scalare di H oppure rispetto al prodotto scalare (4.7) di V. Notiamo che ciò è sicuramente possibile dato che gli autospazi hanno dimensione finita. Notiamo inoltre che, verificata l'ortogonalità rispetto al prodotto scalare di H, l'ortogonalità rispetto al prodotto scalare (4.7) viene di conseguenza grazie alla (4.6); ciò che è diverso è il fattore di normalizzazione nei due casi. Fatto ciò, risulta costruito un sistema di autovettori finito o numerabile, ortonormale in H o in V nei due casi, che genera un sottospazio denso in entrambi gli spazi V e H, dunque una base hilbertiana di H o di V rispettivamente.

Nel caso $V = H = \mathbb{R}^n$ si ritrova allora la ben nota proprietà di diagonalizzabilità delle matrici reali simmetriche tramite matrici ortogonali.

Se V e H hanno invece dimensione infinita, l'insieme degli autovalori è necessariamente infinito grazie ai punti (d) ed (e). Allora (a) e (b) implicano che gli autovalori possono essere disposti in una successione monotona divergente a $+\infty$.

Dimostrazione. Il punto (a) è immediato: infatti, se $\lambda \le -\lambda_0$, la (4.5) e la (4.6) con $v = u$ forniscono

$$\alpha \, \|u\|^2 \le a(u,u) + \lambda_0 |u|^2 \le a(u,u) - \lambda |u|^2 = 0$$

da cui $u = 0$. Dunque λ non è un autovalore.

Anche il punto (c) è immediato. Se u e w sono autovettori associati agli autovalori distinti λ e μ, prendendo $v = w$ nell'equazione risolta da u e $v = u$ in quella risolta da w, abbiamo

$$(\lambda - \mu)(u,w) = \lambda\,(u,w) - \mu\,(w,u) = a(u,w) - a(w,u) = 0$$

da cui $(u,w) = 0$. Ciò implica, grazie all'equazione risolta da u, che $a(u,w) = 0$ e quindi che $((u,w)) = 0$.

Costruiamo ora il *primo autovalore*, cioè il minimo autovalore, adattando al caso che stiamo esaminando il procedimento ben noto che si usa nel caso della dimensione finita. Il Teorema di Bolzano–Weierstrass viene sostituito dal Teorema di compattezza debole e dall'ipotesi (4.3).

Consideriamo l'insieme S e il funzionale J definiti dalle formule

$$S = \{v \in V: \ |v| = 1\} \qquad \text{e} \qquad J(v) = a(v,v), \quad v \in S,$$

e controlliamo che J ha minimo. Verifichiamo prima che J è inferiormente limitato. Per ogni $v \in S$ abbiamo

$$J(v) + \lambda_0 = a(v,v) + \lambda_0 |v|^2 \ge \alpha \, \|v\|^2 \ge \frac{\alpha}{c^2} |v|^2 = \frac{\alpha}{c^2}$$

ove c è data dalla (4.8), da cui $J(v) \geq (\alpha/c^2) - \lambda_0$ per ogni $v \in S$. Deduciamo che l'estremo inferiore di J, che chiamiamo λ_1, è finito.

Sia $\{u_n\}$ una successione di punti di S tale che $\{J(u_n)\}$ tenda a λ_1. Siccome $(\!(u_n, u_n)\!) = J(u_n)+\lambda_0$, la successione $\{u_n\}$ è limitata in V. Dunque possiamo applicare il Teorema di compattezza debole e dedurre che da $\{u_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente debolmente in V a un certo elemento $u \in V$. Per semplificare le notazioni denotiamo ancora con $\{u_n\}$ la sottosuccessione estratta.

Usiamo ora l'ipotesi (4.3). Deduciamo $u_n \to u$ in H, da cui

$$|u| = \lim_{n\to\infty} |u_n| = 1.$$

Segue $u \in S$ e, grazie alla (3.6) applicata alla nuova norma di V, abbiamo

$$J(u) = (\!(u, u)\!) - \lambda_0 \leq \liminf_{n\to\infty} (\!(u_n, u_n)\!) - \lambda_0 = \liminf_{n\to\infty} J(u_n) = \lambda_1.$$

Dunque λ_1 è il valore minimo di J e u è un punto di minimo.

Ora dimostriamo che il valore minimo λ_1 e ogni punto di minimo u sono un autovalore e un corrispondente autovettore. Fissato $v \in V$ poniamo

$$\varphi(t) = \frac{J(u+tv)}{|u+tv|^2}, \qquad t \in [-\delta, \delta],$$

ove $\delta > 0$ è scelto in modo che $u + tv \neq 0$ per $|t| \leq \delta$. Siccome u minimizza J su S, abbiamo $\varphi(0) \leq \varphi(t)$ per $|t| \leq \delta$. Allora, osservato che φ è una funzione razionale, dunque derivabile, deduciamo $\varphi'(0) = 0$. Ma un semplice calcolo mostra che

$$\varphi'(0) = \frac{2a(u,v)\,|u|^2 - 2(u,v)\,a(u,u)}{|u|^4} = 2a(u,v) - 2\lambda_1\,(u,v).$$

Dunque vale la (4.6) con $\lambda = \lambda_1$.

Completiamo la verifica del fatto che λ_1 è il primo autovalore dimostrando che ogni altro autovalore è $\geq \lambda_1$. Se infatti λ e u sono un autovalore e un corrispondente autovettore, il vettore $w = u/|u|$ appartiene a S, per cui

$$\lambda_1 \leq J(w) = a(w,w) = \lambda\,(w,w) = \lambda.$$

In vista dei punti (b) e (d) dell'enunciato proviamo che, se $\{u_n\}$ è una successione di autovettori ortogonale rispetto al prodotto di H, la successione $\{\lambda_n\}$ dei corrispondenti autovalori diverge a $+\infty$. Per assurdo ciò sia falso: allora dalla successione di autovalori possiamo estrarre una sottosuccessione limitata. Per non appesantire le notazioni denotiamo ancora con $\{\lambda_n\}$ la sottosuccessione estratta e, di conseguenza, ancora con $\{u_n\}$ la sottosuccessione degli autovettori corrispondenti. Posto $w_n = u_n/|u_n|$ abbiamo che, come $\{u_n\}$, anche $\{w_n\}$ è un sistema ortogonale in V rispetto al prodotto scalare (4.7). Inoltre, per ogni n, risulta

$$(\!(w_n, w_n)\!) = a(w_n, w_n) + \lambda_0(w_n, w_n) = \lambda_n + \lambda_0,$$

e la disuguaglianza di Bessel diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\!(w_n, v)\!)^2}{\lambda_n + \lambda_0} \le (\!(v, v)\!) \qquad \forall\, v \in V.$$

Siccome $\{\lambda_n + \lambda_0\}$ è limitata, deduciamo che $\{(\!(w_n, v)\!)\}$ è una successione infinitesima per ogni $v \in V$, cioè che $w_n \rightharpoonup 0$ in V. Grazie alla (4.3), concludiamo che $\{w_n\}$ converge fortemente a 0 in H e ciò è assurdo in quanto $|w_n| = 1$ per ogni n.

Dalla proprietà appena dimostrata deduciamo i punti (b) e (d) dell'enunciato. Iniziamo dal primo. Se l'insieme degli autovalori avesse un punto di accumulazione, esisterebbero una successione di autovalori $\{\lambda_n\}$ convergente e iniettiva e una successione $\{u_n\}$ di corrispondenti autovettori, necessariamente ortogonali a due a due, in contraddizione con quanto abbiamo dimostrato.

Veniamo all'altro punto. Se, per assurdo, in corrispondenza a un autovalore λ ci fosse una successione di autovettori indipendenti, con un procedimento di ortogonalizzazione costruiremmo allora una successione di autovettori ortogonale rispetto al prodotto di H e contraddiremmo quanto abbiamo dimostrato, dato che la successione degli autovalori corrispondenti è la costante λ.

Osserviamo esplicitamente che la densità di V in H non è stata sfruttata. Ciò significa che i punti $(a) - (d)$ e l'esistenza di autovettori valgono anche senza l'ipotesi di densità.

Dimostriamo finalmente il punto (e). Sia W il sottospazio di V generato dall'unione di tutti gli autospazi e supponiamo per assurdo che W non sia denso in V. Denotiamo con V_* l'ortogonale di W in V e con H_* l'ortogonale di W in H e osserviamo che, siccome stiamo supponendo che W non sia denso in V, il sottospazio V_* non è ridotto a $\{0\}$ e da questo fatto deduciamo una contraddizione. Dimostriamo precisamente che gli spazi V_* e H_* soddisfano essi stessi le ipotesi dell'enunciato, esclusa al più quella di densità, e, successivamente, deduciamo l'esistenza di un autovettore nuovo, dunque non appartenente a W, contraddicendo così la definizione stessa di W.

Si noti innanzi tutto che V_* e H_* sono sottospazi chiusi di V e di H rispettivamente, dunque essi stessi spazi di Hilbert rispetto alle restrizioni delle operazioni algebriche e dei prodotti scalari di V e di H rispettivamente.

Dimostriamo ora che V_* è incluso in H_*. Sia infatti $u_* \in V_*$. Se λ e w sono un autovalore di (4.6) e un corrispondente autovettore, siccome $u_* \in V$ abbiamo

$$(\lambda + \lambda_0)(u_*, w) = a(w, u_*) + \lambda_0(w, u_*) = (\!(w, u_*)\!) = (\!(u_*, w)\!) = 0.$$

Ricordando che $\lambda + \lambda_0 > 0$ deduciamo $(u_*, w) = 0$. Per linearità abbiamo che (u_*, w) si annulla se w è una qualunque combinazione lineare finita di autovettori di (4.6), vale a dire per ogni $w \in W$. Ciò significa che $u_* \in H_*$.

Dimostriamo ora la (4.3) relativamente a V_* e H_*. Supponiamo dunque che $\{u_n\}$ sia una successione di elementi di V_* che converge debolmente in V_* a un elemento $u_* \in V_*$. Deduciamo che $\{u_n\}$ converge debolmente a u_* in V. Per l'ipotesi (4.3) la successione converge allora fortemente a u_* in H. Ma, siccome $u_* \in V_* \subseteq H_*$ e la norma di H_* è la restrizione ad H_* della norma di H, la successione $\{u_n\}$ converge a u_* fortemente in H_*.

Dunque, effettivamente, i due spazi V_* e H_* sono nelle stesse condizioni degli spazi V e H se prescindiamo dalla proprietà di densità. Siccome la forma a chiaramente verifica le ipotesi richieste anche relativamente alla nuova coppia di spazi, possiamo applicare tutta la prima parte della dimostrazione nella quale l'ipotesi di densità non è stata sfruttata. In particolare esiste un autovettore del problema (4.6), nel quale occorre leggere V_* in sostituzione di V, esistono cioè $\lambda_* \in \mathbb{R}$ e $u_* \in V_* \setminus \{0\}$ tali che

$$a(u_*, v_*) = \lambda_*(u_*, v_*) \qquad \forall\, v_* \in V_*. \tag{4.9}$$

Verifichiamo che λ_* è un autovalore anche per il problema (4.6), cioè per il problema relativo agli spazi V e H di partenza, e che u_* è un corrispondente autovettore. Innanzi tutto $u_* \in V$ e $u_* \neq 0$. Sia ora $v \in V$ ad arbitrio e sia $v_* \in V_*$ la sua proiezione su V_*. Controlliamo preliminarmente che

$$(v_*, z_*) = (v, z_*) \qquad \forall\, z_* \in H_*. \tag{4.10}$$

Denotiamo con $\overline{W}_V$ e con $\overline{W}_H$ le chiusure di W in V e in H rispettivamente. Allora il Corollario 1.15 fornisce

$$\overline{W}_V = V_*^{\perp} \qquad \text{e} \qquad \overline{W}_H = H_*^{\perp}$$

ove i simboli di ortogonale si riferiscono agli spazi V e H rispettivamente. Siccome $v - v_*$ appartiene a $V_*^{\perp}$ per la (1.15), deduciamo che esso appartiene anche a $\overline{W}_V$. Dunque esso è limite in V di una successione $\{w_n\}$ di elementi di W. Grazie alla (4.8), la successione $\{w_n\}$ converge a $v - v_*$ anche in H e ciò dimostra che $v - v_* \in \overline{W}_H$. Dunque $v - v_*$ appartiene a $H_*^{\perp}$, cioè verifica la (4.10).

Detto ciò, deduciamo

$$\begin{aligned} a(u_*, v) &= ((u_*, v)) - \lambda_0(u_*, v) = ((v, u_*)) - \lambda_0(v, u_*) \\ &= ((v_*, u_*)) - \lambda_0(v_*, u_*) = ((u_*, v_*)) - \lambda_0(u_*, v_*) = a(u_*, v_*) \\ &= \lambda_*(u_*, v_*) = \lambda_*(v_*, u_*) = \lambda_*(v, u_*) = \lambda_*(u_*, v). \end{aligned}$$

Dunque u_* è un autovalore di (4.6). Ma, siccome $u_* \in V \setminus \{0\}$, concludiamo che $u_* \notin W$ e ciò è assurdo in quanto tutti gli autovettori appartengono a W per la definizione stessa di W. Pertanto W è denso in V.

Dimostriamo infine che W è denso anche in H sfruttando l'ipotesi di densità di V in H. Sia $u \in H$ ad arbitrio: siccome V è denso in H, esiste una successione $\{u_n'\}$ di elementi di V convergente a u in H. Siccome W è denso in V, per ogni n possiamo trovare $w_n \in W$ tale che $\|w_n - u_n'\| \le 1/n$. Grazie alla (4.8) abbiamo allora

$$|w_n - u| \le |w_n - u_n'| + |u_n' - u| \le c\, \|w_n - u_n'\| + |u_n' - u|$$

e l'ultimo membro è infinitesimo. □

5. Problemi differenziali di autovalori

Riprendiamo la (3.4), nella quale non era stata precisata la regolarità delle funzioni in gioco. Perché sia applicabile il Teorema 4.2, occorre costruire uno spazio di Hilbert V sul quale il primo membro della (3.4) sia ben definito e costituisca una forma nelle condizioni del teorema citato. Purtroppo lo spazio delle funzioni di classe C^1 non si presta affatto allo scopo: mancherebbe infatti la completezza. L'analoga e più spinosa questione in dimensione maggiore di 1 ha portato, intorno alla metà del nostro secolo, alla costruzione di un'intera classe di spazi funzionali, legati contemporaneamente all'integrazione di Lebesgue e alla derivazione, anche di ordine superiore, detti *spazi di Sobolev*. Questi consentono l'uso del Teorema 4.2 nella risoluzione praticamente di tutti i problemi differenziali di autovalori che interessano le applicazioni. Noi ci limitiamo al caso estremamente particolare in cui consideriamo solo derivate prime e funzioni definite in un intervallo limitato.

5.1. Definizione. *Denotiamo con $H^1(a,b)$ lo spazio vettoriale costituito dalle funzioni $u \in L^2(a,b)$ tali che esista $w \in L^2(a,b)$ tale che*

$$\int_a^b w(x)v(x)\,dx = -\int_a^b u(x)v'(x)\,dx \tag{5.1}$$

per ogni $v \in C^1[a,b]$ nulla agli estremi di $[a,b]$. □

Chiaramente $C^1[a,b]$ è incluso in $H^1(a,b)$. Se $u \in C^1[a,b]$ possiamo prendere infatti $w = u'$ per soddisfare la (5.1). In generale la funzione w della definizione prende il ruolo svolto, nel caso regolare, dalla derivata u'.

5.2. Lemma. *Se $u \in H^1(a,b)$, la funzione w della Definizione 5.1 è unica.* □

Dimostrazione. Siano w_1 e w_2 due funzioni nelle condizioni della definizione. Allora, per ogni funzione $v \in C^1[a,b]$ nulla agli estremi, abbiamo

$$\int_a^b (w_1 - w_2)v\,dx = 0.$$

Siccome, grazie all'Osservazione 1.11, tali v costituiscono un sottospazio denso di $L^2(a,b)$, concludiamo che $w_1 = w_2$. □

5.3. Definizione. *Se $u \in H^1(a,b)$, l'unica funzione w nelle condizioni della definizione è chiamata derivata di u ed è denotata con u'.* □

Quando possono sorgere equivoci, la derivata ora introdotta è detta *derivata debole*, in contrapposizione con la derivata usuale che chiamiamo *derivata classica*. Per le funzioni di classe C^1 le due nozioni di derivata coincidono.

5.4. Teorema. *Lo spazio $H^1(a,b)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare*

$$(u,v)_1 = (u,v)_0 + (u',v')_0 \tag{5.2}$$

ove $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_0$ denota il prodotto scalare di $L^2(a,b)$. □

Dimostrazione. Basta dimostrare la completezza. Sia $\{u_n\}$ una successione di Cauchy in $H^1(a,b)$. Allora le due successioni $\{u_n\}$ e $\{u_n'\}$ sono di Cauchy in $L^2(a,b)$ e quindi convergono in L^2 a due funzioni u e w rispettivamente. Per ogni $v \in C^1[a,b]$ nulla agli estremi abbiamo allora

$$\int_a^b wv\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n' v\,dx = -\lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n v'\,dx = -\int_a^b uv'\,dx.$$

Dunque $u \in H^1(a,b)$ e $w = u'$. Chiaramente, ora, $u_n \to u$ in $H^1(a,b)$. □

Nel seguito denoteremo con

$$\|\cdot\|_1 \qquad \text{e} \qquad \|\cdot\|_0$$

le norme in $H^1(a,b)$ e in $L^2(a,b)$ rispettivamente.

Enunciamo ora il seguente

5.5. Lemma. *Il sottospazio $C^1[a,b]$ è denso in $H^1(a,b)$.* □

Dal lemma precedente, la cui dimostrazione richiederebbe qualche strumento tecnico che non vogliamo introdurre, deduciamo una serie di risultati.

5.6. Proposizione. *Ogni funzione $u \in H^1(a,b)$ ha uno e un solo rappresentante continuo in $[a,b]$ che indichiamo ancora con u. Valgono inoltre la stima*

$$\sup_{x\in[a,b]} |u(x)| \le c\,\|u\|_1 \tag{5.3}$$

ove c dipende solo da a e da b, e la formula fondamentale del calcolo

$$\int_x^y u'(t)\,dt = u(y) - u(x) \qquad \forall\, x,y \in [a,b].\ \square \tag{5.4}$$

Dimostrazione. Sia dapprima $u \in C^1[a,b]$. Allora per ogni $x,y \in [a,b]$

$$u^2(x) = u^2(y) + \int_y^x 2u(t)u'(t)\,dt \le u^2(y) + \|u\|_1^2.$$

Integrando su $[a,b]$ rispetto a y deduciamo

$$(b-a)u^2(x) \le \|u\|_0^2 + (b-a)\,\|u\|_1^2 \le (b-a+1)\,\|u\|_1^2$$

da cui la stima (5.3) con ovvia scelta di c se $u \in C^1[a,b]$.

Sia ora $u \in H^1(a,b)$ e sia $\{u_n\}$ una successione in $C^1[a,b]$ convergente a u in $H^1(a,b)$. Applicando la stima (5.3) a $u_n - u_m$ deduciamo che $\{u_n\}$ converge uniformemente in $[a,b]$. Necessariamente il limite è una funzione continua; d'altra parte, il limite deve coincidere con u q.o. dato che la convergenza uniforme implica la convergenza in $L^2(a,b)$ allo stesso limite. Dunque u è q.o. uguale a una funzione continua, necessariamente unica, che denotiamo ancora con u.

Inoltre, grazie alla convergenza uniforme, vediamo che la (5.3) per le u_n passa al limite con la stessa costante c, da cui la disuguaglianza (5.3) per u.

Infine, scritta la formula fondamentale del calcolo per le u_n, si passa al limite e si ottiene la (5.4) usando la convergenza puntuale della successione $\{u_n\}$, implicata dalla convergenza uniforme, e alla convergenza in $L^2(a,b)$ della successione $\{u_n'\}$. □

5.7. Proposizione. *Se $u,v \in H^1(a,b)$ vale la formula di integrazione per parti*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = -\int_a^b u(x)v'(x)\,dx + u(b)v(b) - u(a)v(a). \ \square \tag{5.5}$$

Dimostrazione. Siano $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ due successioni di funzioni di $C^1[a,b]$ convergenti in $H^1(a,b)$ a u e a v rispettivamente. Scritta la (5.5) per u_n e v_n e ricordando che la convergenza in $H^1(a,b)$ implica la convergenza uniforme grazie alla (5.3), si passa al limite senza difficoltà e si ottiene la (5.5). □

5.8. Proposizione. *Se $u_n \rightharpoonup u$ in $H^1(a,b)$ allora $u_n \to u$ in $L^2(a,b)$.* □

Dimostrazione. Sia M tale che $\|u_n\|_1 \le M$ per ogni n e tale M esiste per il Teorema 3.2. Grazie alla (5.3) deduciamo allora $|u_n(x)| \le cM$ per ogni $x \in [a,b]$ e per ogni n. D'altra parte, per ogni $x \in [a,b]$ fissato, il funzionale lineare su $H^1(a,b)$ dato dalla formula $F(v) = v(x)$ verifica $|F(v)| \le c\,\|v\|_1$ sempre grazie alla (5.3) e la convergenza debole $u_n \rightharpoonup u$ in $H^1(a,b)$ implica allora che la successione $\{u_n\}$ converge a u puntualmente. Il Teorema della convergenza dominata permette allora di concludere che $\{u_n\}$ converge a u fortemente in $L^2(a,b)$. □

Una classe importante di problemi di autovalori per equazioni del secondo ordine si ottiene allora applicando il Teorema 4.2 con le scelte che ora facciamo. Prendiamo $H = L^2(a,b)$ e come V l'intero spazio $H^1(a,b)$ oppure uno dei suoi sottospazi definiti come segue: $v \in V$ se e solo se $v \in H^1(a,b)$ e vale una delle condizioni elencate

$$v(a) = v(b) = 0 \tag{5.6}$$
$$v(a) = 0 \tag{5.7}$$
$$v(b) = 0 \tag{5.8}$$
$$c_1 v(a) = c_2 v(b). \tag{5.9}$$

Nella (5.9), c_1 e c_2 sono costanti non nulle fissate. Usando ancora la (5.3) è facile vedere che ciascuno di tali sottospazi è chiuso in $H^1(a,b)$, dunque esso stesso uno spazio di Hilbert. Inoltre, grazie all'Osservazione 1.11, ciascuno di essi è un sottospazio denso in $L^2(a,b)$ per cui le ipotesi (4.2) sono completamente soddisfatte. Infine, sempre per ciascuno di questi spazi V, la condizione (4.3) segue facilmente dalla Proposizione 5.8 e ciò completa la verifica delle condizioni da imporre al quadro funzionale.

Per quanto riguarda la forma bilineare a prendiamo

$$a(u,v) = \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx, \qquad u,v \in V. \tag{5.10}$$

Chiaramente le (4.4) e (4.5) sono soddisfatte con $M = 1$ e, rispettivamente, con $\lambda_0 > 0$ ad arbitrio e $\alpha = \min\{1, \lambda_0\}$.

Con tali scelte è dunque applicabile il Teorema 4.2 che fornisce una successione divergente $\{\lambda_n\}$ di autovalori e una successione $\{u_n\}$ di corrispondenti autosoluzioni del problema (4.6) che, in particolare, costituiscono un sistema ortogonale e completo in $L^2(a,b)$. Siccome tutti gli autovalori sono $> -\lambda_0$ e λ_0 è positivo ad arbitrio, deduciamo che tutti gli autovalori sono non negativi. □

Ora vediamo come il problema della ricerca di $u \in V$ verificante la (4.6) equivalga a un problema ai limiti per un'equazione del secondo ordine.

5.9. Proposizione. *Siano V lo spazio $H^1(a,b)$ oppure il sottospazio descritto da una delle condizioni* (5.6–9) *e $H = L^2(a,b)$. Siano inoltre a la forma* (5.10), *$\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in V$. Allora u verifica la* (4.6) *se e solo se soddisfa le condizioni seguenti:*

$$u' \in H^1(a,b) \qquad \text{e} \qquad -u'' = \lambda u \tag{5.11}$$

$$u'(a)\,v(a) = u'(b)\,v(b) \qquad \forall\, v \in V. \tag{5.12}$$

Dimostrazione. Supponiamo che u sia una soluzione di (4.6) e sia $v \in C^1[a,b]$ nulla agli estremi e per il resto arbitraria. Siccome $v \in V$, possiamo scrivere la (4.6), che diventa

$$\int_a^b u'v'\,dx = \int_a^b \lambda uv\,dx. \tag{5.13}$$

Siccome $u, u' \in L^2(a,b)$, la Definizione 5.1 applicata a u' è soddisfatta con $w = -\lambda u$ per cui le (5.11) valgono. Ora scriviamo la (5.13) per ogni $v \in V$ e, dato che è ormai noto che $u' \in H^1(a,b)$, integriamo per parti e sfruttiamo l'equazione differenziale (5.11) già acquisita. Otteniamo

$$\begin{aligned}\lambda \int_a^b uv\,dx &= \int_a^b u'v'\,dx \\ &= -\int_a^b u''v\,dx + u'(b)v(b) - u'(a)v(a) \\ &= \lambda \int_a^b uv\,dx + u'(b)v(b) - u'(a)v(a)\end{aligned}$$

e quindi la (5.12).

Viceversa, supponiamo che valgano le (5.11–12) e vediamo che u risolve (4.6). Moltiplicando l'equazione (5.11) per la generica $v \in V$ e integrando per parti abbiamo

$$\lambda \int_a^b uv\,dx = -\int_a^b u''v\,dx = \int_a^b u'v'\,dx - u'(b)v(b) + u'(a)v(a)$$

e gli ultimi due termini si elidono grazie alla (5.12). □

Nelle singole scelte di V si vede allora quali sono le condizioni effettivamente imposte a u oltre all'equazione differenziale (5.11). Tali condizioni sono contenute nell'appartenenza di u a V e nella (5.12). Esaminiamo brevemente i vari casi.

Se $V = H^1(a,b)$ allora la condizione $u \in V$ precisa solo la regolarità di u e non impone altro. Le condizioni al bordo sono tutte contenute nella (5.12). Siccome v agli estremi assume valori completamente arbitrari, la (5.12) significa

$$u'(a) = u'(b) = 0. \tag{5.14}$$

Si parla di *condizioni di Neumann*.

Sia ora V il sottospazio descritto dalle (5.6). Allora l'informazione $u \in V$ esprime sia la regolarità di u sia le condizioni

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{5.15}$$

dette *condizioni di Dirichlet*. La (5.12) è invece vuota.

Consideriamo ora la restrizione (5.7) come definizione di V. Allora le informazioni $u \in V$ e (5.12) diventano rispettivamente una condizione di Dirichlet in a e una condizione di Neumann in b

$$u(a) = 0 \qquad \text{e} \qquad u'(b) = 0 \tag{5.16}$$

e il caso (5.8) è del tutto analogo.

Infine, nel caso (5.9), l'informazione $u \in V$ impone

$$c_1 u(a) = c_2 u(b) \tag{5.17}$$

mentre la (5.12), nella quale i valori $v(a)$ e $v(b)$ sono vincolati dal legame (5.9), significa

$$c_2 u'(a) = c_1 u'(b). \tag{5.18}$$

Segnaliamo il caso particolare in cui $c_1 = c_2 = 1$: le (5.17–18) diventano

$$u(a) = u(b) \qquad \text{e} \qquad u'(a) = u'(b) \tag{5.19}$$

e vengono dette *condizioni di periodicità*.

5.10. Esempio. Risolviamo il problema di autovalori nelle condizioni dell'ultimo caso esaminato prendendo come $]a,b[$ l'intervallo $]-\pi,\pi[$. Il problema diventa allora

$$-u'' = \lambda u \quad \text{in } \;]-\pi,\pi[, \qquad u(-\pi) = u(\pi) \qquad \text{e} \qquad u'(-\pi) = u'(\pi).$$

Siccome gli autovalori sono non negativi consideriamo i due casi $\lambda = 0$ e $\lambda = \omega^2$ con $\omega > 0$.

Nel primo caso una funzione u risolve l'equazione se e solo se è un polinomio di grado ≤ 1 e le condizioni ai limiti sono soddisfatte se e solo se u è costante. Dunque $\lambda = 0$ è un autovalore e l'autospazio è costituito dalle costanti.

Nel secondo caso le soluzioni dell'equazione sono le funzioni del tipo

$$u(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

con A e B costanti reali e le condizioni ai limiti equivalgono al sistema

$$B\sin\omega\pi = A\omega\sin\omega\pi = 0$$

il quale ha soluzioni $(A,B) \neq (0,0)$ se e solo se ω è intero. Se $\omega = n$ intero positivo, l'insieme delle soluzioni del sistema lineare è tutto il piano $\mathbb{R}^2$. Dunque gli autovalori non nulli sono i quadrati n^2 degli interi positivi e i corrispondenti autospazi hanno dimensione 2 e sono generati dalle funzioni $\cos nx$ e $\sin nx$. Ritroviamo dunque il sistema ortogonale di $L^2(-\pi,\pi)$ che porta alla teoria classica delle serie di Fourier. Si noti che la completezza del sistema è garantita anche dal Teorema 4.2.

6. Applicazioni alle equazioni a derivate parziali

In questo paragrafo applichiamo la teoria precedente allo studio di alcuni problemi ai limiti per le equazioni classiche della fisica matematica. Nella costruzione della soluzione procederemo formalmente, ad esempio non preoccupandoci di controllare la correttezza di una derivazione per serie. Verificheremo infatti solo a posteriori se la funzione ottenuta è effettivamente una soluzione del problema considerato. Sebbene potremo vedere se il metodo usato porta, nei vari casi, a una soluzione unica o meno, non tratteremo in modo completo il problema dell'unicità in quanto non descriveremo con precisione la classe funzionale in cui cerchiamo la soluzione. Discuteremo invece la regolarità delle soluzioni in funzione della regolarità dei dati senza, tuttavia, ottenere risultati ottimali. Va osservato che ciò che otterremo in casi estremamente particolari ma con metodi semplici vale in realtà, con dimostrazioni di solito di natura diversa, in condizioni molto generali. Dunque la carrellata che ci accingiamo a presentare indica una panoramica ben più vasta almeno per quanto riguarda i risultati.

6.1. Esempio. Consideriamo il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{su } \Gamma \tag{6.1}$$

ove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^2$ di frontiera Γ e Δ è l'operatore di Laplace o laplaciano

$$\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Nelle (6.1) l'incognita è u mentre g è una funzione assegnata su Γ.

Noi ci limitiamo a trattare il caso in cui Ω è un rettangolo e g è nulla su due lati opposti di Γ. Per semplicità prendiamo $\Omega = \,]0,\pi[\, \times \,]0,1[$ e riscriviamo la condizione di Dirichlet nella forma

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \quad \forall\, y \in [0,1], \qquad u(x,0) = g_0(x) \quad \text{e} \quad u(x,1) = g_1(x) \quad \forall\, x \in [0,\pi]$$

ove ora g_i sono funzioni assegnate in $[0,\pi]$.

Cerchiamo la soluzione nella forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) w_n(x)$$

ove $\{w_n\}$ è un sistema completo in $L^2(0,\pi)$ da determinare e i coefficienti u_n sono funzioni incognite di una variabile. Imponendo formalmente che u verifichi l'equazione di Laplace scriviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bigl(u_n(y) w_n''(x) + u_n''(y) w_n(x) \bigr) = 0$$

e la possibilità di ottenere una condizione sui coefficienti u_n è legata a quella di esprimere il tutto tramite il solo sistema $\{w_n\}$ e non anche attraverso le derivate. Imponiamo dunque a w_n'' di essere proporzionale a w_n , cioè che w_n risolva un'equazione differenziale del tipo

$$-w_n''(x) = \lambda_n w_n(x) \qquad \text{in }]0,\pi[\tag{6.2}$$

per opportuni $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Per soddisfare anche le condizioni di annullamento sui due lati verticali di Γ imponiamo che ciascuna delle funzioni w_n verifichi anche le condizioni

$$w_n(0) = w_n(\pi) = 0. \tag{6.3}$$

Abbiamo dunque ottenuto un problema di autovalori che rientra nella teoria svolta nel paragrafo precedente. La scelta dello spazio V deve corrispondere alle condizioni (5.6). Dunque possiamo costruire effettivamente un sistema $\{w_n\}$ ortogonale completo in $L^2(0,\pi)$ e applicare la corrispondente teoria delle serie di Fourier. In questo caso i calcoli sono semplici e le due successioni di autovalori e di corrispondenti autosoluzioni sono date dalle formule

$$\lambda_n = n^2 \qquad \text{e} \qquad w_n(x) = \sin nx, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{6.4}$$

Riprendiamo ora il calcolo interrotto mediante il quale stavamo imponendo che u risolvesse l'equazione di Laplace. Abbiamo allora

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(u_n(y) w_n''(x) + u_n''(y) w_n(x) \bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(-\lambda_n u_n(y) + u_n''(y) \bigr) w_n(x)$$

e dobbiamo dunque richiedere che, per ogni n , u_n risolva l'equazione

$$u_n''(y) - \lambda_n u_n(y) = 0 \qquad \text{in }]0,1[\tag{6.5}$$

la soluzione generale della quale è data dalla formula

$$u_n(y) = A_n \sinh n(1-y) + B_n \sinh ny$$

ove A_n e B_n sono costanti per ora arbitrarie. La formula per u diventa

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(A_n \sinh n(1-y) + B_n \sinh ny\bigr) \sin nx$$

e ora cerchiamo di determinare A_n e B_n in modo che u verifichi anche sui due lati orizzontali di Γ la richiesta condizione di Dirichlet. Otteniamo le uguaglianze

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh n \sin nx = g_0(x) \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh n \sin nx = g_1(x)$$

dalle quali vediamo che necessariamente

$$A_n = \frac{a_n}{\sinh n} \qquad \text{e} \qquad B_n = \frac{b_n}{\sinh n}$$

ove $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono le successioni dei coefficienti di Fourier rispettivamente di g_0 e di g_1 rispetto al sistema $\{w_n\}$ trovato. In particolare il metodo seguito porta a una sola funzione u, la seguente

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl(a_n \frac{\sinh n(1-y)}{\sinh n} + b_n \frac{\sinh ny}{\sinh n}\Bigr) \sin nx. \tag{6.6}$$

Ora si pone il problema di vedere se la serie trovata effettivamente converge e se rappresenta una soluzione del problema posto. Se la nozione di soluzione è, come abbiamo preannunciato, quella classica, ciò che dobbiamo controllare è il tipo di convergenza della serie che rappresenta u in quanto i singoli termini, per costruzione, soddisfano l'equazione di Laplace e verificano alcune delle condizioni al bordo che definiscono il problema. E la buona convergenza della serie corrisponde a un forte annullamento all'infinito delle due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ dato che ogni derivazione termine a termine porta a un fattore n sui coefficienti mentre non cambia sensibilmente il tipo di sviluppo.

Vediamo che, nelle sole ipotesi $g_0, g_1 \in L^2(0,\pi)$, la (6.6) fornisce una funzione di classe C^∞ nel rettangolo semiaperto $[0,\pi] \times \,]0,1[$. Per questo basta considerare ogni rettangolo della forma $[0,\pi] \times [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ con $\varepsilon \in \,]0,1/2[$. Supponiamo dunque $x \in [0,\pi]$ e $\varepsilon \le y \le 1-\varepsilon$ e consideriamo la serie ottenuta applicando l'operatore $\partial_x^m \partial_y^k$ ai singoli termini della (6.6). Il modulo del suo termine generale si stima come segue

$$\Bigl| u_n^{(k)}(y) w_n^{(m)}(x) \Bigr| \le n^{m+k} \left(|a_n| + |b_n|\right) \frac{\cosh n(1-\varepsilon)}{\sinh n}$$

e il secondo membro è il termine generale di una serie numerica convergente qualunque siano m e k fissati e $\varepsilon \in \,]0,1/2[$ nella sola ipotesi che le due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano, ad esempio, limitate.

Naturalmente, se le funzioni g_i sono così poco regolari, non ci possiamo aspettare nulla di buono dal punto di vista classico. Tuttavia qualcosa d'altro si può dire ugualmente. Dato che, per ogni $y \in]0,1[$, la funzione $x \mapsto u(x,y)$ è ben definita e regolare in $[0,\pi]$, possiamo studiare il suo comportamento per $y \to 0$ e per $y \to 1$. Nelle ipotesi dette avviene che

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = g_0(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{y\to 1} u(x,y) = g_1(x) \qquad \text{in } L^2(0,\pi)$$

così che u diventa una soluzione del problema in un senso generalizzato. Dimostriamo ad esempio la prima affermazione supponendo $g_1 = 0$, cioè $b_n = 0$, per semplificare un poco l'espressione di u. Per questo basta calcolare i coefficienti di Fourier della differenza $u(\cdot,y) - g_0$ e applicare l'uguaglianza di Parseval. Abbiamo allora

$$\|u(\cdot,y) - g_0\|_0^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \Bigl(\frac{\sinh n(1-y)}{\sinh n} - 1\Bigr)^2 .$$

Osservato che il termine generale della serie si maggiora con a_n^2 per ogni $y \in [0,1]$, deduciamo che la serie stessa converge uniformemente in $[0,1]$ e che la sua somma è una funzione continua. Siccome essa è nulla per $y = 0$, allora è anche infinitesima per $y \to 0$.

Se però pretendiamo che anche le condizioni di Dirichlet sui lati verticali siano assunte in forma classica, dobbiamo richiedere che u sia continua in $\overline{\Omega}$. Una condizione sufficiente perché ciò avvenga è che

$$g_i \in H^1(0,\pi) \quad \text{e} \quad g_i(0) = g_i(\pi) = 0 \qquad \text{per } \; i = 1,2.$$

In tali condizioni abbiamo infatti, ad esempio per quanto riguarda i coefficienti a_n,

$$n a_n = n \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g_0(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g_0'(x) \cos nx \, dx$$

e, osservato che anche $\{\cos nx\}$ è un sistema ortogonale in $L^2(0,\pi)$ e che tutti i suoi elementi hanno norma $\pi/2$, vediamo che $\{n a_n\}$ è proprio la successione dei coefficienti di Fourier di g_0' rispetto a tale sistema. La disuguaglianza elementare $2ab \le a^2 + b^2$ e la disuguaglianza di Bessel forniscono allora

$$2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 2\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n| \cdot \frac{1}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty} (n a_n)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

e ciò garantisce la convergenza uniforme della prima delle serie che definiscono u.

Se poi si pretende una regolarità superiore, si può imporre che i dati g_0 e g_1 siano più regolari e che le loro derivate di ordine pari fino a un certo ordine sia annullino agli estremi. Infatti, fissato un intero positivo k e procedendo come sopra ma con $k+1$ integrazioni per parti, si vede chiaramente che le condizioni del tipo descritto sono sufficienti perché convergano la serie numeriche di termini generali $n^k |a_n|$ e $n^k |b_n|$, fatto che implica la convergenza uniforme delle serie ottenute derivando termine a termine fino all'ordine k quelle che definiscono u.

6.2. Esempio. Consideriamo ora il problema

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \ \ \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{su} \ \ \Gamma_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g \quad \text{su} \ \ \Gamma_1 \tag{6.7}$$

ove Γ_0 e Γ_1 sono due archi complementari della frontiera Γ e $\boldsymbol{\nu}$ è la normale su Γ_1 diretta verso l'esterno di Ω. La condizione imposta su Γ_1 è detta *condizione di Neumann* così che il problema proposto è un problema misto di tipo Dirichlet–Neumann per l'equazione di Laplace.

Anche qui consideriamo un caso particolare, precisamente

$$\Omega = \,]0,\pi[\, \times \,]0,1[, \qquad \Gamma_0 = \{0,\pi\} \times [0,1] \qquad \text{e} \qquad \Gamma_1 = [0,\pi] \times \{0,1\}.$$

Riformulata la condizione di Neumann nella forma

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = g_0(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = g_1(x)$$

ove g_i sono funzioni assegnate su $[0,\pi]$, possiamo procedere come nell'esempio precedente. Ripetendo pari pari gli stessi passaggi troviamo lo stesso problema di autovalori e la stessa equazione differenziale per i coefficienti u_n. Conviene tuttavia scrivere la serie con coefficienti numerici generici cui si perviene nella forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(A_n \cosh n(1-y) + B_n \cosh ny\bigr) \sin nx$$

così che, imposte la condizione di Neumann, la determinazione dei coefficienti diventa immediata. Troviamo infatti le uguaglianze

$$\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sinh n \sin nx = g_0(x) \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sinh n \sin nx = g_1(x)$$

dalle quali vediamo che necessariamente

$$A_n = \frac{a_n}{n \sinh n} \qquad \text{e} \qquad B_n = \frac{b_n}{n \sinh n}$$

ove $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono le successioni dei coefficienti di Fourier rispettivamente di g_0 e di g_1 rispetto al sistema trovato. Anche in questo caso il metodo seguito porta a una sola funzione u, la seguente

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl(\frac{a_n}{n} \, \frac{\cosh n(1-y)}{\sinh n} + \frac{b_n}{n} \, \frac{\cosh ny}{\sinh n} \Bigr) \sin nx, \tag{6.8}$$

e si capisce che le considerazioni da fare ora sono del tutto analoghe a quelle del caso precedente. La differenza più rilevante è non tanto la presenza di diverse funzioni iperboliche quanto piuttosto la sostituzione di a_n e di b_n con a_n/n e con b_n/n rispettivamente, che si riflette sulle condizioni da imporre su g_0 e su g_1 per avere una buona convergenza della serie. Sostanzialmente, a parità di regolarità pretesa per u, viene ridotta di un'unità la regolarità richiesta ai dati rispetto all'esempio precedente.

6.3. Esempio. Studiamo ora il problema

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g \quad \text{su } \Gamma \tag{6.9}$$

ove le notazioni sono analoghe a quelle usate nell'esempio appena discusso. Si tratta del problema di Neumann per l'equazione di Laplace. Consideriamo ancora il caso particolare $\Omega =]0,\pi[\times]0,1[$ e supponiamo g nulla sui due lati verticali di Γ.

Riformulata la condizione di Neumann nella forma

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) &= 0, \qquad y \in [0,1], \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = g_0(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) &= g_1(x), \qquad x \in [0,\pi], \end{aligned}$$

ove le g_i sono assegnate su $[0,\pi]$, possiamo ripercorrere i passi seguiti nell'Esempio 6.1. Con notazioni del tutto analoghe arriviamo al problema di autovalori

$$-w_n''(x) = \lambda_n w_n(x) \quad \text{in }]0,\pi[, \qquad w_n'(0) = w_n'(\pi) = 0,$$

che comprende la condizione di Neumann sui lati verticali di Γ, e all'equazione differenziale

$$u_n''(y) - \lambda_n u_n(y) = 0 \qquad \text{in }]0,1[.$$

Il problema di autovalori rientra nella teoria svolta e corrisponde a scegliere $H^1(0,\pi)$ come spazio V. La successione di autovalori e il corrispondente sistema $\{w_n\}$ di autosoluzioni, ortogonale e completo in $L^2(0,\pi)$, sono dati ora dalle formule

$$\lambda_n = n^2 \qquad \text{e} \qquad w_n(x) = \cos nx, \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{6.10}$$

e le corrispondenti u_n hanno forma diversa nei due casi $n = 0$ e $n \geq 1$. Precisamente

$$\begin{aligned} &u_0(y) = A_0 + B_0 y \\ &u_n(y) = A_n \cosh n(1-y) + B_n \cosh ny, \qquad n = 1,2,\ldots \end{aligned}$$

Arriviamo pertanto alla serie

$$u(x,y) = A_0 + B_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(A_n \cosh n(1-y) + B_n \cosh ny\bigr) \cos nx$$

alla quale dobbiamo ancora imporre le condizioni di Neumann sui lati orizzontali. Queste si scrivono nella forma

$$-B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sinh n \cos nx = g_0(x) \qquad \text{e} \qquad B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sinh n \cos nx = g_1(x)$$

ed equivalgono al fatto che siano soddisfatte le uguaglianze

$$-B_0 = a_0, \qquad B_0 = b_0, \qquad nA_n \sinh n = a_n \quad \text{e} \quad nB_n \sinh n = b_n \quad \text{per} \quad n \geq 1 \tag{6.11}$$

ove $\{a_n\}_{n\geq 0}$ e $\{b_n\}_{n\geq 0}$ sono le successioni dei coefficienti di Fourier di g_0 e di g_1 rispetto al sistema $\{\cos nx\}_{n\geq 0}$.

La novità rispetto ai due esempi precedenti è che le (6.11) determinano i valori di A_n e di B_n per $n \geq 1$, non impongono nulla su A_0 e individuano B_0 se e solo se vale l'uguaglianza $a_0 + b_0 = 0$, cioè

$$\int_0^\pi g_1(x)\,dx + \int_0^\pi g_0(x)\,dx = 0,$$

che in termini della funzione g originaria definita su Γ si scrive

$$\int_\Gamma g(x,y)\,ds = 0. \tag{6.12}$$

Concludendo, otteniamo una funzione u se e solo se vale la (6.12) e, se questa è soddisfatta, la u trovata è determinata solo a meno di una costante additiva arbitraria.

Per quanto riguarda invece il fatto che u risolva il problema dato e che sia più o meno regolare, la situazione è analoga a quella dell'Esempio 6.2.

6.4. Esempio. Consideriamo ora il problema di autovalori

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{su } \Gamma \tag{6.13}$$

ove Ω è il quadrato $]0,\pi[\times]0,\pi[$ di $\mathbb{R}^2$. Sebbene con una definizione opportuna di $H^1(\Omega)$ potremmo ricondurre il problema (6.13) direttamente al Teorema 4.2, noi seguiremo la via seguita per i problemi precedenti. La forma in cui cerchiamo le soluzioni è sempre del tipo

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) w_n(x)$$

e, come nel caso dell'Esempio 6.1, ricadiamo nelle formule (6.4). Allora i coefficienti u_n devono risolvere il problema

$$-u_n''(y) = (\lambda - \lambda_n) u_n(y) \quad \text{in }]0,\pi[\qquad \text{e} \qquad u_n(0) = u_n(\pi) = 0. \tag{6.14}$$

Orbene, se $\lambda - \lambda_n$ non è uno degli autovalori della (6.4), allora $u_n = 0$ necessariamente e il corrispondente prodotto $u_n(y)w_n(x)$ non fornisce contributo a u. Se invece $\lambda - \lambda_n$ è uno degli autovalori (6.4), diciamo λ_m, allora u_n è proporzionale a w_m.

Riassumendo, un numero reale λ è un autovalore del problema (6.13) se e solo se esso è della forma $\lambda_m + \lambda_n$ con m, n interi positivi e, se questo è il caso, le autosoluzioni corrispondenti sono tutte e sole le combinazioni lineari delle funzioni $w_n(x)w_m(y)$ ottenute facendo variare le coppie (m, n) di interi sotto la condizione $\lambda_m + \lambda_n = \lambda$. Chiaramente gli autovalori costituiscono un insieme numerabile senza punti di accumulazione e ogni autospazio ha dimensione finita, in accordo con le conclusioni che l'applicazione del Teorema 4.2 ci avrebbe fornito.

Notiamo un fatto. In contrasto con quando avviene nel corrispondente problema monodimensionale, ora gli autovalori possono non essere semplici, cioè gli autospazi possono avere dimensione maggiore di 1. Sono semplici, ad esempio, gli autovalori 2 e 8, primo e terzo rispettivamente, mentre il secondo, che è 5, è doppio. Infatti $5 = 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^2$ e una base per l'autospazio corrispondente è data dalle due funzioni

$$\sin x \sin 2y \qquad \text{e} \qquad \sin 2x \sin y.$$

I primi autovalori di molteplicità $3, \ldots, 9$ sono i numeri 50, 65, 1250, 325, 31250, 1105 e 8450 rispettivamente. Abbiamo ad esempio $325 = m^2 + n^2$ in corrispondenza alle coppie (m, n) seguenti

$$(1, 18), \quad (6, 17), \quad (10, 15), \quad (15, 10), \quad (17, 6) \quad \text{e} \quad (18, 1),$$

a partire dalle quali si costruisce una base per l'autospazio.

6.5. Esempio. Consideriamo ancora il problema (6.1), cioè il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace, ma prendiamo Ω di tipo diverso. Precisamente, Ω è il settore circolare che nelle coordinate polari (ρ, ϑ) si descrive con le disuguaglianze

$$0 < \rho < 1 \qquad \text{e} \qquad 0 < \vartheta < \alpha \tag{6.15}$$

ove α è fissato in $]0, 2\pi[$. Inoltre supponiamo che la funzione g sia nulla sulle parti rettilinee di Γ.

Allora conviene rappresentare anche l'incognita u in coordinate polari e assumere come nuova incognita la funzione $(\rho, \vartheta) \mapsto u(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)$ che chiamiamo ancora u con un abuso di notazioni. Il problema si riformula allora come segue

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 0, \qquad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \vartheta < \alpha \tag{6.16}$$

$$u(\rho, 0) = u(\rho, \alpha) = 0, \qquad \rho \in [0, 1] \tag{6.17}$$

$$u(1, \vartheta) = g(\vartheta), \qquad \vartheta \in [0, \alpha] \tag{6.18}$$

ove ora g è un funzione assegnata sull'intervallo $[0, \alpha]$. Alle (6.16–18) vanno poi aggiunte condizioni che escludano che u sia singolare per $\rho \to 0$. Infatti l'origine, mentre non ha nulla di speciale per quanto riguarda il problema posto all'inizio, è un punto singolare per la nuova formulazione.

Analogamente a quanto abbiamo fatto nei casi precedenti cerchiamo una serie del tipo

$$u(\rho, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\rho) w_n(\vartheta)$$

ove $\{w_n\}$ è un sistema ortogonale e completo in $L^2(0, \alpha)$ da determinare, così come è da determinare la successione $\{u_n\}$ dei coefficienti. Imponendo l'equazione otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(u_n''(\rho) w_n(\vartheta) + \frac{1}{\rho} u_n'(\rho) w_n(\vartheta) + \frac{1}{\rho^2} u_n(\rho) w_n''(\vartheta) \Big) = 0$$

e anche in questo caso è conveniente imporre che w_n'' sia proporzionale a w_n. Tenendo conto delle condizioni (6.17), siamo indotti a considerare il problema di autovalori

$$-w_n''(\vartheta) = \lambda_n w_n(\vartheta), \qquad w_n(0) = w_n(\alpha) = 0. \tag{6.19}$$

L'aggiornamento del calcolo precedente è allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(u_n''(\rho) + \frac{1}{\rho} u_n'(\rho) - \frac{\lambda_n}{\rho^2} u_n(\rho) \Big) w_n(\vartheta) = 0$$

così che per u_n troviamo l'equazione differenziale

$$u_n''(\rho) + \frac{1}{\rho} u_n'(\rho) - \frac{\lambda_n}{\rho^2} u_n(\rho) = 0. \tag{6.20}$$

Autovalori e corrispondenti autosoluzioni del problema (6.19) sono dati dalle formule

$$\lambda_n = \omega_n^2 \quad \text{e} \quad w_n(\vartheta) = \sin \omega_n \vartheta, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{ove} \quad \omega_n = n\frac{\pi}{\alpha} \tag{6.21}$$

mentre la soluzione generale della (6.20) risulta essere

$$u_n(\rho) = A_n \rho^{\omega_n} + B_n \rho^{-\omega_n}$$

e la richiesta di non singolarità nell'origine ci induce a imporre $B_n = 0$ per ogni n. Arriviamo dunque alla formula

$$u(\rho, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^{\omega_n} \sin \omega_n \vartheta \tag{6.22}$$

e, imponendo la condizione (6.18), vediamo che $\{A_n\}$ deve essere la successione dei coefficienti di Fourier di g rispetto al sistema $\{w_n\}$. In particolare abbiamo ottenuto, come nell'Esempio 6.1, una e una sola funzione candidata a risolvere il problema.

Per quanto riguarda il fatto che la funzione trovata risolva o meno il problema proposto, ancora dobbiamo studiare la convergenza della serie. Anche in questo caso è facile vedere che, per ogni $\varepsilon \in]0, 1/2[$, la serie (6.22) converge con le serie delle derivate di tutti gli ordini uniformemente rispetto a (ρ, ϑ) in $[\varepsilon, 1-\varepsilon] \times [0, \alpha]$. In particolare la somma u verifica necessariamente le (6.16–17) dato che ogni termine della serie verifica tali condizioni. Siccome lo jacobiano del cambiamento di coordinate è singolare solo nell'origine, vediamo che la formula trovata rappresenta una funzione di classe C^∞ nell'insieme ottenuto intersecando $\overline{\Omega}$ con la corona circolare di raggi ε e $1-\varepsilon$ e dall'arbitrarietà di ε deduciamo che u è di classe C^∞ nell'insieme ottenuto da $\overline{\Omega}$ togliendo l'origine e la parte curva del bordo.

Questo fatto e il confronto con gli esempi precedenti ci porta a formulare la congettura seguente: ogni soluzione di un problema ai limiti di tipo Dirichlet oppure Neumann per l'equazione di Laplace è regolare in tutti i punti interni a Ω e nei tratti lisci del bordo sui quali il dato di Dirichlet o di Neumann è nullo. Questa congettura è vera in generale se precisata come segue: nel caso del problema misto vanno esclusi comunque i punti, anche se appartenenti a un tratto liscio di Γ, di separazione fra la condizione di Dirichlet e la condizione di Neumann, come mostra l'esempio successivo.

Occupiamoci ora della regolarità nell'origine della funzione trovata. Consideriamo dapprima il caso del semicerchio, che corrisponde alla scelta $\alpha = \pi$. In tali condizioni abbiamo $\omega_n = n$ e il termine generale della serie (6.22) è l'espressione in coordinate polari di un polinomio di grado n, dunque di una funzione di classe C^∞ fino all'origine, e non è difficile imitare il procedimento dell'Esempio 6.1 e concludere che la funzione u è di classe C^∞ fino all'origine. Considerazioni analoghe valgono poi se ω_n è intero per ogni n.

Se invece α è un valore generico le cose vanno diversamente e il caso peggiore si presenta quando π/α è irrazionale, ad esempio quando $\alpha = 1$. Allora nessuno dei valori ω_n è intero e la regolarità di u nell'origine è compromessa già a causa della singolarità dei singoli termini della serie, che si comportano come ρ^{ω_n} per $\rho \to 0$, prima ancora che si pongano problemi di convergenza. Si noti poi che la singolarità maggiore appare nel primo termine, segue il secondo, eccetera. Al contrario, prefissato un intero $k > 0$, esiste un indice m, che dipende da k e da α, tale che tutti i termini della serie aventi indice $n \geq m$ rappresentano funzioni di classe C^k. Allora la situazione è chiara: la soluzione si può sempre scrivere come somma di una funzione avente una regolarità C^k prefissata più la somma di un numero finito di termini singolari nell'origine, il più singolare dei quali è quello di indice minimo che effettivamente compare nella serie. Dunque, perché la soluzione abbia una regolarità voluta, incompatibile con certi esponenti ω_n, occorre che i coefficienti di questi termini siano nulli. Ad esempio l'annullamento di A_0 significa

$$\int_0^\alpha g(\vartheta) \sin \frac{\pi\vartheta}{\alpha}\, d\vartheta = 0.$$

Si noti che questa condizione fa intervenire il dato di Dirichlet g in punti lontani dall'origine e quindi va annoverata fra le condizioni di compatibilità sui dati di tipo globale. Si noti inoltre che essa non è soddisfatta da alcuna funzione continua strettamente positiva per cui possiamo senz'altro affermare che la presenza di punti di tipo angoloso su Γ è fonte di quasi certa singolarità per la soluzione.

6.6. Esempio. Consideriamo ora, sempre nel settore (6.15), il problema misto (6.7) prendendo come Γ_1 il lato $\vartheta = \alpha$ del bordo e come Γ_0 il resto di Γ. Supponiamo inoltre g nulla sul lato $\vartheta = 0$. Il problema, espresso in coordinate polari, viene allora riformulato come segue

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 0, \qquad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \vartheta < \alpha, \tag{6.23}$$

$$u(\rho, 0) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}(\rho, \alpha) = 0, \qquad \rho \in [0,1] \tag{6.24}$$

$$u(1, \vartheta) = g(\vartheta), \qquad \vartheta \in [0, \alpha] \tag{6.25}$$

ove g è un funzione assegnata sull'intervallo $[0, \alpha]$. E ancora occorre aggiungere condizioni che escludano che u sia singolare per $\rho \to 0$. Procedendo come nell'esempio precedente otteniamo il problema di autovalori

$$-w_n''(\vartheta) = \lambda_n w_n(\vartheta), \qquad w_n(0) = w_n'(\alpha) = 0 \tag{6.26}$$

e la stessa equazione differenziale (6.20) per u_n. Il problema (6.26) rientra nella teoria generale con $p = 1$ con la scelta del sottospazio V di $H^1(0, \alpha)$ corrispondente al caso (5.7). Tutto procede allora come nell'esempio precedente ma con una diversa espressione delle autosoluzioni w_n. Precisamente si riottiene la formula (6.22) ove ora

$$\omega_n = (2n - 1)\frac{\pi}{2\alpha}.$$

Come nel caso dell'Esempio 6.2 abbiamo costruito una sola candidata a essere soluzione del problema e, per quanto riguarda la regolarità, valgono considerazioni analoghe a quelle dell'Esempio 6.5. Ma, a differenza del caso precedente, qui le singolarità appaiono anche quando il bordo è liscio vicino all'origine, cioè quando $\alpha = \pi$. Infatti, nessuno dei valori ω_n è intero e la condizione di annullamento del primo coefficiente, che ora diventa

$$\int_0^\pi g(\vartheta) \sin\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta = 0,$$

è di tipo globale e non è soddisfatta da alcuna funzione continua strettamente positiva. Possiamo pertanto affermare che i punti di passaggio dalla condizione di Dirichlet a quella di Neumann sono fonte di quasi certa singolarità per la soluzione già nel caso della frontiera liscia.

6.7. Esempio. Consideriamo l'equazione del calore in una variabile spaziale

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad a < x < b, \quad t > 0, \tag{6.27}$$

ove u è la funzione incognita delle due variabili x e t. Imponiamo anche condizioni al bordo di tipo Dirichlet e una condizione iniziale come segue

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \qquad t > 0, \tag{6.28}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad x \in [a, b], \tag{6.29}$$

ove φ è una funzione assagnata in $[a, b]$.

Anche in questo caso cerchiamo di applicare le idee che ci hanno portato a risolvere i problemi degli esempi precedenti e, per semplificare i calcoli, prendiamo come $[a, b]$ l'intervallo $[0, \pi]$. Cerchiamo dunque una soluzione nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) w_n(x)$$

ove $\{w_n\}$ è un sistema ortogonale e completo in $L^2(0, \pi)$ da determinare e i coefficienti u_n sono funzioni incognite di una variabile. Imponendo formalmente che u verifichi l'equazione del calore otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bigl(u_n'(t) w_n(x) - u_n(y) w_n''(x) \bigr) = 0$$

per cui siamo indotti a imporre che w_n'' sia proporzionale a w_n . Tenendo conto anche delle (6.28), scriviamo il problema di autovalori

$$-w_n''(x) = \lambda_n w_n(x) \quad \text{in }]0, \pi[, \qquad w_n(0) = w_n(\pi) = 0 \tag{6.30}$$

mentre i coefficienti u_n dovranno risolvere l'equazione differenziale

$$u_n'(t) + \lambda_n u_n(t) = 0 \qquad \text{per } t > 0.$$

Arriviamo pertanto alla formula

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin nx \tag{6.31}$$

ove i coefficienti numerici devono essere determinati dalla condizione (6.29). Imponendola troviamo l'uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = \varphi(x)$$

per cui $\{a_n\}$ deve essere la successione dei coefficienti di Fourier del dato iniziale φ rispetto al sistema ortogonale dei seni.

Anche in questo caso studiamo la convergenza della serie e la regolarità della sua somma, ora in funzione del dato iniziale. Supponiamo dapprima solo $\varphi \in L^2(0, \pi)$. Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio e limitando t con la restrizione $t \geq \varepsilon$, per la generica derivata del termine generale della serie troviamo la stima

$$\bigl| \partial_t^m \partial_x^k u(x, t) \bigr| \leq n^{2m+k} \, |a_n| \, e^{-n^2 \varepsilon}$$

che assicura la convergenza uniforme nell'insieme $[0, \pi] \times [\varepsilon, +\infty[$ delle serie delle derivate di tutti gli ordini. Dunque la (6.31) rappresenta una funzione di classe C^∞ nell'insieme $[0, \pi] \times]0, +\infty[$ che risolve l'equazione (6.27) e verifica le condizioni di Dirichlet.

Dimostriamo ora che

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \varphi(x) \qquad \text{in} \ \ L^2(0,\pi)$$

usando l'uguaglianza di Parseval come nel caso dell'Esempio 6.1. Risulta

$$\|u(\cdot,t) - \varphi\|_0^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(e^{-n^2 t} - 1 \right)^2 .$$

Osservato che il termine generale della serie si maggiora con a_n^2 per ogni $t \geq 0$, deduciamo che la serie stessa converge uniformemente in $[0,\infty[$ e che la sua somma è una funzione continua. Siccome essa è nulla per $t = 0$, allora è anche infinitesima per $t \to 0$.

Si noti dunque: nella sola ipotesi $\varphi \in L^2(0,\pi)$, otteniamo una funzione u di classe C^∞ per $t > 0$ che approssima il dato iniziale per $t \to 0$. Per questo motivo si usa dire che l'equazione del calore regolarizza la situazione iniziale.

Se invece si vuole che la condizione di Cauchy (6.29) sia assunta in senso classico, occorre cercare condizioni che assicurano la continuità di u fino a $t = 0$. Possiamo allora richiedere la convergenza uniforme della serie (6.31) in tutto $[0,\pi] \times [0,\infty[$, certamente implicata dalla convergenza della serie numerica $\sum_n |a_n|$. Perché quest'ultima converga, come abbiamo visto nell'Esempio 6.1, è sufficiente che $\varphi \in H^1(0,\pi)$ e si annulli negli estremi.

La regolarità ulteriore di u fino all'istante $t = 0$ è poi legata a una migliore convergenza della serie (6.31), dunque alla regolarità di φ e all'annullamento negli estremi delle derivate di ordine pari.

6.8. Esempio. Consideriamo ora il problema ottenuto dal problema (6.27–29) sostituendo le condizioni di Dirichlet (6.28) con le seguenti di Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(b,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{6.32}$$

Prendendo anche in questo caso $[a,b] = [0,\pi]$, possiamo ripercorrere la stessa via e ottenere un problema di autovalori e un'equazione differenziale per i coefficienti. Con ovvie notazioni abbiamo ora

$$\begin{aligned} &- w_n''(x) = \lambda_n w_n(x) \quad \text{in} \ \ ]0,\pi[, \qquad w_n'(0) = w_n'(\pi) = 0 \\ &u_n'(t) + \lambda_n u_n(t) = 0 \qquad \text{per} \ \ t > 0. \end{aligned}$$

Arriviamo pertanto alla formula

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos nx$$

ove i coefficienti numerici devono essere tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx = \varphi(x).$$

Otteniamo dunque, anche in questo caso, una e una sola funzione u e lo studio della sua regolarità è dello stesso tipo di quello dell'esempio precedente.

Sottolineiamo un fatto: non solo con le condizioni di Dirichlet ma anche con le condizioni di Neumann la soluzione è unica e la sua esistenza non richiede alcuna compatibilità di tipo globale sul dato iniziale. Ciò è in contrasto con quanto accade per l'equazione di Laplace, per la quale il problema di Neumann non ha mai soluzione unica e ha soluzione solo se il dato di Neumann ha integrale nullo. Notiamo che l'equazione del calore ha la sua versione in due variabili spaziali: la derivata seconda ∂_x^2 è sostituita dal laplaciano. Dunque l'equazione di Laplace modella le soluzioni stazionarie dell'equazione del calore e la situazione che abbiamo incontrato rispecchia un fatto più generale: un problema di evoluzione può avere sempre soluzione mentre le cose possono andare in modo diverso per il corrispondente problema stazionario. Del resto tutto ciò è ben chiaro se si pensa a un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie e al sistema algebrico corrispondente nel caso in cui la matrice sia singolare.

6.9. Esempio. Consideriamo l'equazione delle onde in una variabile spaziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad a < x < b, \quad t > 0, \tag{6.33}$$

ove $c > 0$ è una costante nota e u è la funzione incognita delle due variabili x e t. Imponiamo anche condizioni al bordo, ad esempio di tipo Dirichlet, e le condizioni iniziali come segue

$$u(a,t) = u(b,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{6.34}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \qquad x \in [a,b], \tag{6.35}$$

ove φ e ψ sono due funzioni assagnate in $[a,b]$.

Notiamo che, se in un'interpretazione fisica della (6.33) le variabili x e t hanno le dimensioni di una lunghezza e di un tempo, allora c rappresenta una velocità qualunque sia la dimensione fisica di u. La più semplice interpretazione è però quella relativa alle vibrazioni trasversali di una corda e proprio per questo motivo la (6.33) è detta anche *equazione della corda vibrante*. In questo caso l'intervallo $[a,b]$ schematizza la corda a riposo e $u(x,t)$ rappresenta lo spostamento trasversale all'istante t del punto x, così che le (6.34) significano che, durante le sue vibrazioni, la corda è tenuta fissa agli estremi. Pertanto u ha le dimensioni di una lunghezza e φ e ψ si interpretano come configurazione iniziale e velocità iniziale della corda.

Ancora prendiamo $[a,b] = [0,\pi]$ e cerchiamo u del tipo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) w_n(x)$$

ove $\{w_n\}$ è un sistema ortogonale e completo in $L^2(0,\pi)$ da determinare e i coefficienti u_n sono funzioni incognite di una variabile. Procedendo come al solito otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bigl(u_n''(t) w_n(x) - c^2 u_n(y) w_n''(x) \bigr) = 0$$

per cui siamo indotti a imporre che w_n'' sia proporzionale a w_n. Tenendo conto anche delle (6.34), scriviamo il problema di autovalori

$$-w_n''(x) = \lambda_n w_n(x) \quad \text{in }]0, \pi[, \qquad w_n(0) = w_n(\pi) = 0 \tag{6.36}$$

mentre i coefficienti u_n dovranno risolvere l'equazione differenziale

$$u_n''(t) + c^2 \lambda_n u_n(t) = 0 \qquad \text{per } \ t > 0.$$

Arriviamo pertanto alla formula

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(a_n \cos nct + b_n \sin nct\bigr) \sin nx \tag{6.37}$$

e, imponendo le condizioni (6.35), troviamo le uguaglianze

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = \varphi(x) \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ncb_n \sin nx = \psi(x)$$

mediante le quali si determinano le due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$.

Chiaramente otteniamo un'unica funzione u candidata a essere soluzione del problema. Tuttavia, a differenza di quanto abbiamo notato a proposito dell'equazione del calore, nel caso in esame non si ha alcun effetto regolarizzante e ciò si vede in modo particolarmente trasparente se si suppone $\psi = 0$. In tal caso u è data dalla formula

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nct \sin nx$$

che, grazie all'identità

$$\cos nct \sin nx = \frac{1}{2}\bigl(\sin n(x - ct) + \sin n(x + ct)\bigr),$$

può essere riscritta come

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\bigl(\Phi(x - ct) + \Phi(x + ct)\bigr) \tag{6.38}$$

ove $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx. \tag{6.39}$$

Osservato che $\Phi = \varphi$ in $[0, \pi]$ per costruzione, Φ è l'unica funzione $2\pi-$ periodica dispari che prolunga φ. Dunque la (6.38) dice che, in ogni istante $t > 0$, la funzione $u(\cdot, t)$ è la media delle due funzioni ottenute da Φ mediante le traslazioni di $\pm ct$. Al variare del tempo, queste traslate costituiscono due onde che si spostano in direzioni opposte e con velocità c.

Tornando al problema della regolarità vediamo che, se un punto x_0 è singolare per Φ, la funzione u sarà singolare in tutti i punti (x,t) tali che $x = x_0 \pm ct$ a meno che nella somma le singolarità non si compensino, il che di solito non avviene. Si noti che le due equazioni $x = x_0 \pm ct$ rappresentano due rette nel piano (x,t), dette *rette caratteristiche* uscenti da $(x_0, 0)$.

Ad esempio, se $\varphi = 1$, allora Φ è costante a tratti e presenta un salto in ogni multiplo di π per cui la funzione u sarà discontinua nei punti delle rette del piano (x,t) di equazioni $x = n\pi \pm ct$ per ogni n intero.

Chiaramente, in questo caso, u non può essere una soluzione classica e l'esistenza di soluzioni classiche non può che comportare ipotesi pesantissime sul dato iniziale: φ deve essere una funzione di classe C^2 nulla in 0 e in π con le sue derivate seconde. Solo in queste condizioni, infatti, il prolungamento Φ è di classe C^2. Questo semplice esempio suggerisce l'opportunità di cambiare la nozione di soluzione del problema in modo che la (6.38) possa essere accettata come soluzione in ogni caso.

6.10. Esempio. Consideriamo l'equazione del calore in tre variabili spaziali

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

ove u è una funzione delle quattro variabili x, y, z, t. Il punto (x,y,z) varia in un aperto Ω dello spazio mentre t varia in $[0, \infty[$. Se Ω è la palla di centro l'origine e raggio ad esempio unitario, è naturale passare alle coordinate sferiche $(\rho, \vartheta, \vartheta')$, legate alle coordinate cartesiane dalle formule

$$x = \rho \cos\vartheta \cos\vartheta', \quad y = \rho \sin\vartheta \cos\vartheta' \quad \text{e} \quad z = \rho \sin\vartheta',$$

e assumere come incognita la funzione

$$(\rho, \vartheta, t) \mapsto u(\rho \cos\vartheta \cos\vartheta', \rho \sin\vartheta \cos\vartheta', \rho \sin\vartheta', t)$$

che chiamiamo ancora u con un abuso di notazioni. L'equazione nelle nuove variabili ha una struttura piuttosto complessa, che però si semplifica considerevolmente se si suppone a priori che u non dipenda da ϑ e da ϑ'. Consideriamo pertanto il caso seguente: l'incognita u è una funzione delle due sole variabili ρ e t. In tali condizioni l'equazione differenziale che u deve soddisfare è

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0, \qquad 0 < \rho < 1, \qquad t > 0, \tag{6.40}$$

alla quale aggiungiamo la condizione di Dirichlet e la condizione iniziale

$$u(1,t) = 0, \qquad t > 0 \tag{6.41}$$

$$u(\rho, 0) = \varphi(\rho), \qquad 0 < \rho < 1. \tag{6.42}$$

Imponiamo infine una condizione di non singolarità per $\rho \to 0$ e cerchiamo u del tipo

$$u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) w_n(\rho)$$

ove $\{w_n\}$ è un sistema ortogonale e completo da determinare, così come è da determinare la successione $\{u_n\}$ dei coefficienti. Imponendo l'equazione otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(u_n'(t) w_n(\rho) - u_n(t) w_n''(\rho) - \frac{2}{\rho} u_n(t) w_n'(\rho) \Big) = 0$$

per cui siamo indotti a cercare w_n verificante un'equazione del tipo

$$-w_n''(\rho) - \frac{2}{\rho} w_n'(\rho) = \lambda_n w_n(\rho) \qquad \text{in } \left]0,1\right[\tag{6.43}$$

ove le costanti λ_n sono per ora indeterminate. Imposta inoltre la condizione di Dirichlet sulle w_n, cioè

$$w_n(1) = 0, \tag{6.44}$$

cerchiamo soluzioni non banali dell'equazione (6.43) verificanti anche la condizione (6.44) e regolari per $\rho \to 0$. Questo è dunque, sia pure in una forma ancora vaga, il problema di autovalori che dobbiamo risolvere e che non sembra, a prima vista, rientrare nella teoria generale. Osserviamo però che l'equazione (6.43) può essere riscritta nella forma

$$-\frac{\partial}{\partial \rho} \big(\rho^2 w_n'(\rho) \big) = \lambda_n \rho^2 w_n(\rho) \qquad \text{in } \left]0,1\right[\tag{6.45}$$

molto più vicina della precedente alla teoria generale. La differenza sostanziale è che la funzione ρ^2 non ha estremo inferiore positivo e che nel secondo membro compare il fattore ρ^2 a moltiplicare w_n. Ciò comporta che gli spazi H e V non potranno essere $L^2(0,1)$ e, rispettivamente, un sottospazio chiuso di $H^1(0,1)$. Ciò nonostante, tentiamo di riprodurre qui il procedimento seguito nel caso regolare: moltiplichiamo per la generica funzione regolare v nulla per $\rho = 1$ e integriamo per parti. Otteniamo

$$\int_0^1 \rho^2 w_n'(\rho) v'(\rho) \, d\rho = \lambda_n \int_0^1 \rho^2 w_n(\rho) v(\rho) \, d\rho \tag{6.46}$$

il che porta a scelte praticamente obbligate degli spazi V e H. Precisamente H deve essere costituito dalle funzioni misurabili v tali che converga l'integrale

$$\int_0^1 \rho^2 v^2(\rho) \, d\rho$$

e deve essere munito del prodotto scalare

$$(w, v) = \int_0^1 \rho^2 w(\rho) v(\rho) \, d\rho$$

mentre la definizione di V e del suo prodotto scalare sarà legata a integrali dello stesso tipo in cui però intervengono anche le derivate. Data l'esigenza di costruire uno spazio di Hilbert le derivate dovranno essere di tipo debole. Ciò suggerisce di imitare la definizione del sottospazio di $H^1(0,1)$ costituito dalle funzioni nulle in 1.

Definiamo pertanto dapprima l'analogo $\widetilde{V}$ di $H^1(0,1)$ come segue: una funzione u appartiene a $\widetilde{V}$ se e solo se $u \in H$ ed esiste $w \in H$ tale che

$$\int_0^1 wv \, d\rho = - \int_0^1 uv' \, d\rho$$

per ogni $v \in C^1[0,1]$ nulla in 1 e in un intorno di 0. Si noti che la condizione di annullamento imposta a v garantisce la convergenza dei due integrali. Anche in questo caso la funzione w è unica, viene chiamata derivata di u ed è denotata con u'. Il prodotto scalare in $\widetilde{V}$ è definito dall'uguaglianza

$$(u,v)_{\widetilde{V}} = (u,v) + (u',v')$$

ove $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ è il prodotto scalare di H definito sopra.

La completezza dei due spazi H e $\widetilde{V}$ si controlla senza difficoltà come ora mostriamo. Se $\{u_n\}$ è una successione di Cauchy in H e se poniamo $u_n^* = \rho u_n$, allora la successione $\{u_n^*\}$ è di Cauchy in $L^2(0,1)$ e quindi converge in tale spazio a una certa funzione u^*. Posto $u = u^*/\rho$, abbiamo allora che $u \in H$ e che $u_n \to u$ in H. Sia ora $\{u_n\}$ una successione di Cauchy in $\widetilde{V}$. Allora le due successioni $\{u_n\}$ e $\{u_n'\}$ sono di Cauchy in H e quindi convergono in H a due funzioni u e w rispettivamente. Come nel caso di $H^1(0,1)$ si vede che $w = u'$ per cui $u \in \widetilde{V}$ e $u_n \to u$ in $\widetilde{V}$.

Ora osserviamo che, se $u \in \widetilde{V}$, allora la restrizione di u a $]\varepsilon,1[$ appartiene a $H^1(\varepsilon,1)$ per ogni $\varepsilon \in]0,1[$. In particolare ogni funzione $u \in \widetilde{V}$ è continua in $[\varepsilon,1]$ per ogni $\varepsilon \in]0,1[$, cioè è continua nell'intervallo semiaperto $]0,1]$, e per le funzioni di $\widetilde{V}$ vale la formula di integrazione per parti, ora sull'intervallo semiaperto. Si noti che la definizione di $\widetilde{V}$ consente ai suoi elementi singolarità nell'origine ad esempio di tipo $\rho^{-1/2}$ per cui quanto abbiamo detto circa la continuità non può essere migliorato.

Si può poi dimostrare che $C^1[0,1]$ è un sottospazio denso in $\widetilde{V}$, per cui le proprietà di $\widetilde{V}$ si dimostrano imitando il procedimento seguito per $H^1(0,1)$. Dimostriamo la stima che sostituisce la (5.3). Anche in questo caso basta considerare il caso delle funzioni regolari dato che il caso generale segue facilmente per densità. Se $u \in C^1[0,1]$ abbiamo per ogni $\rho, r \in [0,1]$

$$u^2(\rho) = u^2(r) + \int_r^\rho 2uu' \, dt \le u^2(r) + \int_{\min\{\rho,r\}}^1 \bigl(u^2 + (u')^2\bigr) \, dt$$

e moltiplicando per $\rho^2 r^2$ e osservando che $\rho^2 r^2 \le t^2$ per $\min\{\rho,r\} \le t \le 1$ deduciamo

$$\rho^2 r^2 u^2(\rho) \le \rho^2 r^2 u^2(r) + \int_{\min\{\rho,r\}}^1 t^2 \bigl(u^2 + (u')^2\bigr) \, dt \le r^2 u^2(r) + \|u\|^2 .$$

Integrando su $[0,1]$ rispetto a r concludiamo

$$\sup_{\rho^2\in]0,1]} \big(\rho u^2(\rho)\big) \le 6\,\|u\|^2 . \tag{6.47}$$

Dalla (6.47) deduciamo che, per ogni $\rho \in]0,1]$, il funzionale lineare F definito dalla formula $F(v) = v(\rho)$ è continuo per cui, in particolare, il sottospazio

$$V = \{v \in \widetilde{V} :\ v(1) = 0\}$$

è ben definito e chiuso. Sempre dalla (6.47), imitando quanto è stato fatto nel caso di $H^1(0,1)$, deduciamo facilmente la (4.3) per gli spazi V e H in esame.

Infine la forma bilineare a su $V \times V$ è data dalla formula

$$a(w,v) = \int_0^1 \rho^2 w'(\rho) v'(\rho)\, d\rho$$

e la (4.5) vale con $\lambda_0 > 0$ arbitrario e α scelto di conseguenza.

Dunque le ipotesi del Teorema 4.2 sono soddisfatte, per cui si viene a costruire un sistema ortogonale e completo di autosoluzioni ed è rispetto a questo che andrà intesa la teoria delle serie di Fourier. Si osservi poi che, siccome V contiene tutte le funzioni di classe C^1 nulle negli estremi, ogni soluzione $w_n \in V$ della (6.46) effettivamente risolve anche (6.45), il che fornisce un metodo per il calcolo effettivo.

Si noti che tutti gli autovalori sono non negativi dato che λ_0 può essere scelto positivo ad arbitrio. Inoltre $\lambda = 0$ non è autovalore in quanto l'integrale generale dell'equazione

$$-\frac{\partial}{\partial\rho}\big(\rho^2 w'(\rho)\big) = 0$$

è dato dalla formula

$$w(\rho) = c + \frac{c'}{\rho}$$

con c e c' costanti arbitrarie e l'unica soluzione appartenente a V è la funzione nulla.

Per quanto riguarda la determinazione degli autovalori e delle corrispondenti autosoluzioni conviene scrivere $\lambda_n = \omega_n^2$, ove $\omega_n > 0$ è da determinarsi, riscrivere la (6.45) nella forma (6.43) e cambiare incognita ponendo, per ogni n fissato, $w_n(\rho) = z(\omega_n \rho)$. La nuova incognita z è definita in $[0,\omega_n]$ e l'equazione che z deve risolvere è allora la seguente:

$$yz''(y) + 2z'(y) + yz(y) = 0. \tag{6.48}$$

Inoltre il comportamento di z per $y \to 0$ deve essere tale che la sua riscalata w_n appartenga a V . Il cambiamento di incognita dato dalla formula $z(y) = v(y)/y$ trasforma la (6.48) nell'equazione $v'' + v = 0$, per cui l'integrale generale della (6.48) è dato da

$$z(y) = c\frac{\sin y}{y} + c'\frac{\cos y}{y}$$

e, se $c' \neq 0$, nessuna riscalata di z appartiene a V. Dunque le funzioni w_n che andiamo cercando sono, a meno di un fattore moltiplicativo, tutte e sole quelle del tipo

$$w_n(\rho) = \frac{\sin \omega_n \rho}{\rho}$$

ove ω_n va determinato in modo che $w_n(1) = 0$. Abbiamo dunque $\omega_n = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$

Determinati autovalori e autosoluzioni, si può riprendere la costruzione della funzione u. Procedendo come nei casi precedenti si arriva alla formula

$$u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\omega_n^2 t} \frac{\sin \omega_n \rho}{\rho}$$

ove $\{c_n\}$ è la successione dei coefficienti di Fourier del dato iniziale. Ricordata la formula del prodotto scalare di H abbiamo pertanto

$$c_n = \frac{\int_0^1 \rho^2 \varphi(\rho) w_n(\rho)\, d\rho}{\int_0^1 \rho^2 w_n^2(\rho)\, d\rho} = 2 \int_0^1 \rho \varphi(\rho) \sin n\pi\rho\, d\rho.$$

6.11. Osservazione. Nel caso esaminato, le autosoluzioni del problema monodimensionale di autovalori sono note in forma esplicita in quanto siamo stati in grado di calcolare esplicitamente la funzione z e i suoi zeri. In altre situazioni ciò non avviene.

Ad esempio nell'analogo problema ottenuto sostituendo la palla di $\mathbb{R}^3$ con il disco di $\mathbb{R}^2$ l'equazione che sostituisce la (6.43) contiene il fattore $1/\rho$ in sostituzione di $2/\rho$ e il carattere elementare del calcolo è totalmente compromesso. Tuttavia il procedimento non cambia: sostanzialmente basta, rispetto al caso esaminato, sostituire ρ^2 con ρ nei due membri della (6.45), di conseguenza anche nelle definizioni di H e di V e dei loro prodotti scalari, e rinunciare alla pretesa di esprimere in termini elementari le soluzioni z dell'equazione cui si perviene, che è la seguente, detta *equazione di Bessel*:

$$yz''(y) + z'(y) + yz(y) = 0. \tag{6.49}$$

Per studiare la (6.49) si può, in un primo momento, cercarne le soluzioni che possono essere scritte come serie di potenze. Si trovano le multiple della cosiddetta *funzione di Bessel di prima specie e di ordine* 0, che è la funzione J_0 data dalla formula

$$J_0(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} y^{2k}.$$

Osservato che $J_0(0) = 1$, per cui J_0 è positiva in un intorno dell'origine, possiamo cambiare incognita ponendo $z = J_0 v$ e semplici calcoli portano alla formula

$$z(y) = cJ_0(y) + c' J_0(y) v(y)$$

ove v è una primitiva della funzione $1/(yJ_0^2(y))$. Siccome v presenta necessariamente una singolarità logaritmica in 0, nessuna riscalata di $J_0 v$ appartiene al nuovo spazio V, per cui le w_n che andiamo cercando sono tutte e sole le multiple della funzione $J_0(\omega_n \rho)$, ove ω_n va determinato in modo che $w_n(1) = 0$. I valori ω_n sono dunque gli zeri positivi della funzione J_0 e la lore esistenza e il fatto che essi costituiscano una successione divergente restano garantiti dal Teorema 4.2 stesso.