Problemi di tipo ellittico: alcuni risultati astratti

Sebbene la teoria si estenda in modo opportuno al caso degli spazi di Banach, noi consideriamo solo il caso hilbertiano. Con ${}_{V'}\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_V$ denotiamo la dualità fra lo spazio di Hilbert V e il suo duale V' e scriviamo semplicemente $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ quando non possono nascere equivoci.

Definizione 1. *Siano V e W due spazi di Hilbert e $L : V \to W$ un operatore lineare e continuo. L'aggiunto di L è l'operatore $L^* : W' \to V'$ che a ogni $w' \in W'$ associa la composizione $w' \circ L$.*

Si noti in particolare che L^* è lineare e continuo e che vale la formula (che, di fatto, coincide con la definizione stessa di aggiunto)

$$ {}_{V'}\langle L^* w', v\rangle_V = {}_{W'}\langle w', Lv\rangle_W \qquad \forall\, w' \in W' \quad \forall\, v \in V. \tag{1} $$

Notiamo che l'aggiunto L^{**} dell'aggiunto L^* di L opera da V'' in W'' e che, se ogni biduale viene canonicamente identificato allo spazio di partenza, L^{**} risulta identificato a L di conseguenza. Di dimostrazione immediata è il risultato seguente:

Proposizione 2. *Siano V, W e Z tre spazi di Hilbert e $L : V \to W$ e $M : W \to Z$ due operatori lineari e continui. Allora*

$$ (M \circ L)^* = L^* \circ M^*. $$

In particolare, se L è un isomorfismo, anche L^* è un isomorfismo.

Definizione 3. *Siano V uno spazio di Hilbert e V_0 e W^0 due sottospazi di V e di V' rispettivamente. Definiamo*

$$ V_0^\perp = \{v' \in V' : \langle v', v\rangle = 0 \ \ \forall\, v \in V_0\} $$
$$ W_\perp^0 = \{v \in V : \langle v', v\rangle = 0 \ \ \forall\, v' \in W^0\}. $$

Osservazione 4. I due insiemi $V_0^\perp$ e $W_\perp^0$, detti rispettivamente *ortogonale di* V_0 e *ortogonale di* W^0, sono un sottospazio chiuso di V' e, rispettivamente, un sottospazio chiuso di V. Essi sono legati alla più usuale nozione di ortogonalità come ora mostriamo.

Fissato un prodotto scalare $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ in V, denotiamo con $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_*$ il prodotto scalare in V' associato alla corrispondente norma duale e con J il corrispondente isomorfismo canonico di Riesz, cioè l'applicazione di V in V' definita dalla formula

$$ \langle Ju, v\rangle = (u, v) \qquad \forall\, u, v \in V. \tag{2} $$

Come è noto, J è un isomorfismo che, inoltre, è isometrico, cioè

$$ (Ju, Jv)_* = (u, v) \qquad \forall\, u, v \in V. $$

Se V_0 e W^0 sono nelle condizioni della definizione precedente, denotiamo (solo momentaneamente) con $V_0^\top$ l'ortogonale di V_0 in V rispetto al prodotto scalare $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ e con $W^0_\top$ l'ortogonale di W^0 in V' rispetto al prodotto scalare $(\cdot,\cdot)_*$. Allora, come si verifica facilmente, valgono le relazioni

$$V_0^\perp = J(V_0^\top) = (JV_0)_\top \qquad \text{e} \qquad W^0_\perp = J^{-1}(W^0_\top) = (J^{-1}W^0)^\top.$$

In particolare, se identifichiamo V' con V tramite J, i quattro simboli $^\perp$, $_\perp$, $^\top$ e $_\top$ assumono lo stesso significato. Tuttavia è spesso utile non effettuare tale identificazione. Allora ciò che più ci preme è osservare che dalle ben note conseguenze del Teorema delle proiezioni

$$(V_0^\top)^\top = \overline{V_0} \qquad \text{e} \qquad (W^0_\top)_\top = \overline{W^0}$$

si deducono le relazioni analoghe

$$(V_0^\perp)_\perp = \overline{V_0} \qquad \text{e} \qquad (W^0_\perp)^\perp = \overline{W^0}. \tag{3}$$

Nel seguito, se L è un operatore lineare e continuo fra due spazi di Hilbert, i simboli

$$N(L) \qquad \text{e} \qquad R(L) \tag{4}$$

denotano il *nucleo* e l'*immagine* di L. Allora $N(L)$ è un *sottospazio chiuso* del dominio e $R(L)$ è un sottospazio del codominio, *non necessariamente chiuso*. Ad esempio, se prendiamo $V = W = L^2(0,1)$ e scegliamo L definito dalla formula $(Lv)(x) = xv(x)$, l'immagine $R(L)$ non esaurisce W e, contemporaneamente, è densa in W.

Teorema 5. *Siano V e W due spazi di Hilbert e $L: V \to W$ un operatore lineare e continuo. Allora vale la relazione di ortogonalità*

$$\overline{R(L)} = (N(L^*))_\perp. \tag{5}$$

Dimostrazione. Dimostriamo le due inclusioni. Si ha subito

$$R(L) \subseteq (N(L^*))_\perp.$$

Infatti, se $w \in R(L)$ e $w' \in N(L^*)$, scelto $v \in V$ tale che $Lv = w$, abbiamo

$${}_{W'}\langle w', w\rangle_W = {}_{W'}\langle w', Lv\rangle_W = {}_{V'}\langle L^*w', v\rangle_V = {}_{V'}\langle 0, v\rangle_V = 0.$$

Siccome $(N(L^*))_\perp$ è chiuso in W deduciamo poi

$$\overline{R(L)} \subseteq (N(L^*))_\perp. \tag{6}$$

Verifichiamo ora che

$$(R(L))^\perp \subseteq N(L^*).$$

Sia infatti $w' \in (R(L))^{\perp}$. Da $v \in V$ deduciamo $Lv \in R(L)$, per cui

$$ {}_{V'}\langle L^* w', v \rangle_V = {}_{W'}\langle w', Lv \rangle_W = 0, $$

cioè $L^* w'$ è il funzionale nullo. Dunque è dimostrata l'inclusione voluta. Prendendo gli ortogonali deduciamo

$$ ((R(L))^{\perp})_{\perp} \supseteq (N(L^*))_{\perp} $$

e applicando a $R(L) \subseteq W$ la prima delle (3) otteniamo

$$ \overline{R(L)} \supseteq (N(L^*))_{\perp}. $$

Questa è l'inclusione opposta della (6) e la dimostrazione è conclusa.

Richiamiamo la definizione di operatore compatto e enunciamo due risultati comodi nelle applicazioni, il secondo dei quali è facile conseguenza del primo.

Definizione 6. *Siano V e W due spazi di Hilbert e $L : V \to W$ un operatore lineare e continuo. Diciamo che L è compatto quando, per ogni limitato B di V, l'immagine $L(B)$ è relativamente compatta in W.*

Proposizione 7. *Siano V e W due spazi di Hilbert e $L : V \to W$ un operatore lineare e continuo. Condizione necessaria e sufficiente perché L sia compatto è che valga la condizione*

$$ v_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } V \qquad \Longrightarrow \qquad Lv_n \to 0 \quad \text{in } W. \tag{7} $$

Dimostrazione. La necessità è immediata. Per la sufficienza si applichi a V il Teorema di compattezza debole.

Corollario 8. *Siano V, W e Z tre spazi di Hilbert e $L : V \to W$ e $M : W \to Z$ due operatori lineari e continui. Se almeno uno di essi è compatto, allora è compatto anche l'operatore $M \circ L$.*

Il teorema successivo, importante per lo studio dei problemi ai limiti di tipo ellittico, è una versione semplificata della cosiddetta *teoria di Riesz–Schauder*. Premettiamo un lemma di interesse anche autonomo.

Lemma 9. *Siano V e W due spazi di Hilbert e $L : V \to W$ un operatore lineare e continuo. Se L è compatto, allora anche L^* è compatto.*

Dimostrazione. Usiamo la Proposizione 7. Sia dunque $w'_n \rightharpoonup 0$ in W'. Dimostriamo che $L^* w'_n \to 0$ in V'. Per $v \in V$ abbiamo

$$ {}_{V'}\langle L^* w'_n, v \rangle_V = {}_{W'}\langle w'_n, Lv \rangle_W. $$

In particolare, detto J l'isomorfismo di Riesz di V su V' e scelto $v = J^{-1} L^* w'_n$, otteniamo

$$ {}_{V'}\langle L^* w'_n, J^{-1} L^* w'_n \rangle_V = {}_{W'}\langle w'_n, L J^{-1} L^* w'_n \rangle_W. $$

Il primo membro vale $\|L^* w'_n\|^2_{V'}$. D'altra parte

$$_{W'}\langle w'_n, LJ^{-1}L^* w'_n \rangle_W \le \|w'_n\|_{W'} \, \|LJ^{-1}L^* w'_n\|_W$$

e l'ultimo membro tende a zero in quanto l'operatore $LJ^{-1}L^*$ è compatto per il Corollario 8 e la successione $\{w'_n\}$ è limitata.

Teorema 10. *Siano V e W due spazi di Hilbert, $A, B, L : V \to W$ tre operatori lineari e continui verificanti le condizioni seguenti*

$$A \text{ è un isomorfismo}, \quad B \text{ è compatto} \quad \text{e} \quad L = A + B\,. \tag{8}$$

Allora i due nuclei $N(L)$ e $N(L^*)$ hanno dimensione finita, l'immagine $R(L)$ è chiusa in W e vale l'uguaglianza

$$R(L) = (N(L^*))_\perp. \tag{9}$$

In particolare L è suriettivo se e solo se L^* è iniettivo.

Dimostrazione. Per dimostrare che $N(L)$ ha dimensione finita, verifichiamo che nello spazio di Hilbert ottenuto munendo $N(L)$ della topologia indotta da V la convergenza debole implica la convergenza forte. Supponiamo dunque $v_n \rightharpoonup 0$ in $N(L)$. Abbiamo allora $v_n \rightharpoonup 0$ in V , da cui $Bv_n \to 0$ in W per la compattezza di B . Siccome $Lv_n = 0$ per ogni n , deduciamo

$$Av_n = -Bv_n \to 0 \quad \text{in } W$$

e, siccome A è un isomorfismo, concludiamo che $v_n \to 0$ in V .

Siccome $L^* = A^* + B^*$ è nelle stesse condizioni di L grazie alla Proposizione 2 e al Lemma 9, anche $N(L^*)$ ha dimensione finita. Infine la (9) segue dalla (5) non appena sappiamo che l'immagine $R(L)$ è chiusa. Controlliamo allora questo fatto. Supponiamo dunque $w_n \in R(L)$ e $w_n \to w$ in W e dimostriamo che $w \in R(L)$.

Siano $v_n \in V$ tali che $Lv_n = w_n$. Decomposto V nella somma diretta

$$V = N(L) \oplus Z$$

ove Z è un sottospazio chiuso di V (come Z si prende l'ortogonale di $N(L)$ in V rispetto a un prodotto scalare fissato), presentiamo v_n come $v_n = u_n + z_n$ con $u_n \in N(L)$ e $z_n \in Z$. Allora la successione $\{z_n\}$ può essere limitata o illimitata, almeno a priori. Nel primo caso estraiamo una successione, che denotiamo ancora con $\{z_n\}$, convergente debolmente a un certo $z \in V$. Deduciamo allora

$$Lv_n = Lz_n \rightharpoonup Lz \quad \text{in } W\,.$$

Siccome $Lv_n \to w$ in W , concludiamo che $w = Lz \in R(L)$.

Dimostriamo ora che, di fatto, il secondo caso non si può presentare. Supponiamo dunque $\{z_n\}$ non limitata e cerchiamo di arrivare a una contraddizione. Estraiamo una successione, che denotiamo ancora con $\{z_n\}$, tale che

$$\|z_n\|_V \to \infty$$

e introduciamo la successione normalizzata $\{y_n\}$ ponendo $y_n = z_n/\|z_n\|_V$. Da questa estraiamo una successione, che denotiamo ancora con $\{y_n\}$, convergente debolmente a un certo $y \in V$ e dimostriamo che y è contemporaneamente nullo e non nullo.

Per vedere che $y = 0$ osserviamo che

$$\|Ly_n\|_W = \frac{\|Lz_n\|_W}{\|z_n\|_V} = \frac{\|Lv_n\|_W}{\|z_n\|_V}.$$

Ma il denominatore diverge per costruzione e il numeratore converge dato che $Lv_n \to w$ in W, per cui otteniamo

$$Ly_n \to 0 \quad \text{in } W. \tag{10}$$

Siccome $Ly_n \rightharpoonup Ly$ in W, deduciamo $Ly = 0$ e $y \in N(L)$. D'altra parte $y \in Z$ dato che $y_n \in Z$ per ogni n e Z è chiuso. Ciò implica $y = 0$.

Vediamo ora che $y \neq 0$. La compattezza di B implica che $By_n \to By$ in W. Tenendo conto della (10), deduciamo $Ay_n \to Ay$ in W e quindi anche $y_n \to y$ in V dato che A è un isomorfismo. Siccome $\|y_n\|_V = 1$ per ogni n, concludiamo che $\|y\|_V = 1$. Dunque $y \neq 0$ e la dimostrazione è completa.

Osservazione 11. Di grande interesse teorico è poi il seguito della teoria di Riesz-Schauder, la quale assicura che le dimensioni di $N(L)$ e di $N(L^*)$ sono uguali. In particolare L^* è iniettivo se e solo se L è iniettivo, per cui vale l'alternativa: L non è iniettivo oppure L è un isomorfismo. Tuttavia, già il Teorema 10 costituisce uno strumento valido dal punto di vista operativo.

Per quanto riguarda la generalizzazione agli spazi di Banach, si può vedere il libro di Analisi funzionale di Brézis, dove la teoria di Riesz–Schauder viene trattata nel caso in cui $W = V$ e A è l'identità, ma a questo si può facilmente ricondurre il caso generale.

Segnaliamo che, date ancora le Definizioni 1 e 3, la seconda delle (3) continua a valere se si suppone V riflessivo e che occorre lo stesso tipo di ipotesi per avere $L^{**} = L$. Ancora bisogna supporre V riflessivo nella generalizzazione della Proposizione 7, dato che nel caso generale la (7) è solo necessaria per la compattezza. Si prenda ad esempio $V = W = \ell^1$ e si scelga come L l'identità, che è un operatore lineare e continuo, ma non compatto dato che ℓ^1 ha dimensione infinita; eppure la (7) vale in quanto le convergenze debole e forte in ℓ^1 coincidono. La Proposizione 2, il Corollario 8 e il Lemma 9 valgono invece per spazi di Banach qualunque. Anzi, più precisamente, un risultato dovuto a Schauder afferma che L^* è compatto se e solo se L è compatto.

Vediamo ora l'applicazione del Teorema 10 a problemi variazionali astratti di tipo ellittico. Il quadro è quello di una terna hilbertiana (V, H, V') con l'ulteriore ipotesi

$$\textit{l'immersione di } V \textit{ in } H \textit{ è compatta.} \tag{11}$$

Assegnamo poi una forma bilineare e continua a su $V \times V$ verificante l'ipotesi di *debole coercività* seguente: con le notazioni abituali legate al quadro della terna hilbertiana, esistano $\alpha > 0$ e $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tali che

$$a(v,v) + \lambda_0 |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2 \qquad \forall\, v \in V. \tag{12}$$

Nelle applicazioni concrete la (11) è soddisfatta se *l'aperto* Ω *è limitato* (e regolare) e la (12) equivale alla disuguaglianza di Gårding. Per ogni $F \in V'$ consideriamo allora il problema di trovare

$$u \in V \qquad \text{tale che} \qquad a(u,v) = \langle F, v \rangle \quad \forall\, v \in V. \tag{13}$$

Introdotto (canonicamente) l'operatore lineare e continuo $L : V \to V'$ mediante

$$\langle Lu, v \rangle = a(u,v) \qquad \forall\, u, v \in V \tag{14}$$

il problema (13) coincide con il problema di trovare una controimmagine di F tramite L. Denotata con I l'immersione di V in V', applichiamo il Teorema 10 con le scelte

$$W = V', \qquad A = L + \lambda_0 I \qquad \text{e} \qquad B = -\lambda_0 I \tag{15}$$

pur di controllare che A è un isomorfismo e che B è compatto. La prima affermazione vale per il Teorema di Lax–Milgram; la seconda segue dalla (11) e dal Corollario 8 se si osserva che l'immersione I di V in V' si ottiene componendo, nell'ordine, le immersioni di V in H e di H in V'. Dunque il Teorema 10 è effettivamente applicabile. Per rendere più trasparente ciò che si ottiene, conviene esplicitare la costruzione dell'aggiunto L^* di L, che opera da $W' = V''$ in V'. Identificato però V'' a V in modo canonico, L^* opera da V in V' ed è definito dalla relazione

$$\langle L^* u, v \rangle = \langle Lv, u \rangle \qquad \forall\, u, v \in V.$$

Esso, dunque, coincide con l'operatore canonicamente associato (cioè tramite l'analoga della (14)) alla forma bilineare e continua $a^* : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$a^*(u,v) = a(v,u) \qquad \forall\, u, v \in V \tag{16}$$

e detta *aggiunta di* a. Il Teorema 10 fornisce allora il risultato fondamentale seguente:

Teorema 12. *Siano* (V, H, V') *una terna hilbertiana verificante la (11) e* $a : V \times V \to \mathbb{R}$ *una forma bilineare, continua e debolmente coerciva, cioè tale che esistano* $\alpha > 0$ *e* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *in modo che valga la (12). Allora, se* $F \in V'$*, il problema (13) ha almeno una soluzione se e solo se vale la condizione di compatibilità*

$$\langle F, u^* \rangle = 0$$

per ogni soluzione u^* *del problema*

$$u^* \in V \qquad \textit{tale che} \qquad a^*(u^*, v) = 0 \quad \forall\, v \in V \tag{17}$$

ove a^* *è la forma aggiunta di* a *data dalla (16). In particolare (13) ha soluzioni qualunque sia* $F \in V'$ *se e solo se il problema (17) ha solo la soluzione* $u^* = 0$.

Osservazione 13. Nelle applicazioni concrete le scelte (15) non sono le uniche possibili. Si consideri ad esempio il caso dello spazio $V = H^1(\Omega)$, ove Ω è limitato e regolare, e della forma bilineare

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx + \int_\Omega (\mathbf{b} \cdot \nabla u)\, v\, dx + \int_\Omega (\mathbf{c} u) \cdot \nabla v\, dx$$

con coefficienti $b_i, c_i \in L^\infty(\Omega)$. Denotati con $a_j(u,v)$, $j = 1,2,3$, i tre integrali rispettivamente e detto L_j l'operatore associato alla forma a_j , possiamo prendere come A l'isomorfismo L_1 (lo stesso discorso, dunque, si ripete per forme a_1 più generali associate a isomorfismi) e porre $B = L_2 + L_3$. Per una certa costante c e per ogni $u, v \in V$ abbiamo infatti

$$|\langle L_2 u, v\rangle| \le c\, \|u\|\, |v| \qquad \text{e} \qquad |\langle L_3 u, v\rangle| \le c |u|\, \|v\| \,. \tag{18}$$

La seconda delle due stime equivale alla possibilità di prolungare L_3 in un operatore $\widetilde{L_3}$ lineare e continuo da H in V' . Allora L_3 si decompone come $L_3 = \widetilde{L_3} \circ I$, ove ora I è l'immersione di V in H . Dunque L_3 è compatto per il Corollario 8. Per vedere la compattezza di L_2 notiamo che la prima delle (18) dice che $R(L_2) \subseteq H$ e che, di fatto, L_2 è lineare e continuo da V in H . D'altra parte l'immersione di H in V' è l'operatore aggiunto dell'immersione di V in H quando H venga identificato al suo duale tramite l'operatore di Riesz associato al fissato prodotto scalare di H , per cui, grazie al Lemma 9, anche l'immersione di H in V' è compatta. Deduciamo che anche L_2 , visto, come deve essere, come operatore da V in V' , è compatto.

Considerazioni analoghe si possono fare per formulazioni variazionali di problemi ai limiti di ordine superore al secondo. In forma imprecisa possiamo dire che, nel caso dell'aperto limitato e regolare e in condizioni ragionevoli sui coefficienti, sono compatti gli operatori associati alle parti della forma bilineare che corrispondono a derivate di ordine inferiore.

Infine, anche integrali di bordo possono essere presi in considerazione. Ritornando all'esempio appena introdotto, possiamo aggiungere la forma bilineare

$$a_4(u,v) = \int_\Gamma \varphi\, u\, v\, ds, \qquad u, v \in V,$$

ove $\varphi \in L^\infty(\Gamma)$. In tali condizioni anche l'operatore $L_4 : V \to V'$ associato alla forma a_4 è compatto. Supponiamo infatti $u_n \rightharpoonup 0$ in V e dimostriamo che $L_4 u_n \to 0$ in V' . Dette c_1 la norma di φ in $L^\infty(\Gamma)$ e c_2 la norma dell'operatore di traccia di V in $L^2(\Gamma)$, per ogni $v \in V$ abbiamo infatti

$$|\langle L_4 u_n, v\rangle| = |a_4(u_n, v)| \le c_1\, \|u_n\|_{L^2(\Gamma)}\, \|v\|_{L^2(\Gamma)} \le c_1 c_2\, \|u_n\|_{L^2(\Gamma)}\, \|v\|$$

e deduciamo

$$\|L_4 u_n\|_* \le c_1 c_2\, \|u_n\|_{L^2(\Gamma)} \,.$$

La convergenza forte viene allora dal fatto seguente, che ci limitiamo a enunciare: l'operatore di traccia, solo continuo da V in $H^{1/2}(\Gamma)$, è compatto da V in $L^2(\Gamma)$.

La nozione di aggiunto di un operatore $L : V \to V'$ lineare e continuo nel contesto della terna hilbertiana (V, H, V') è legata all'analoga nozione per un operatore non limitato in H, come ora vediamo.

Definizione 14. *Chiamiamo operatore (lineare) non limitato in H ogni operatore lineare A definito in un sottospazio vettoriale $D(A)$ di H a valori in H. Il sottospazio $D(A)$ è detto dominio di A.*

Definizione 15. *Sia A un operatore non limitato in H e si supponga $D(A)$ denso in H. Definiamo l'aggiunto A^* di A come segue. Poniamo*

$$D(A^*) = \{u \in H : \ \exists\, z \in H : \ \forall\, v \in D(A) \ \ (z, v) = (u, Av)\}.$$

Osservato poi che, se $u \in D(A^*)$, l'elemento z della definizione è unico, denotiamo tale z con A^*u. Abbiamo dunque

$$(A^*u, v) = (u, Av) \qquad \forall\, u \in D(A^*) \quad \forall\, v \in D(A).$$

Diciamo poi che A è autoaggiunto quando $D(A^*) = D(A)$ e $A^* = A$.

Definizione 16. *Siano (V, H, V') una terna hilbertiana e $L : V \to V'$ un operatore lineare e continuo. Posto*

$$D(L; H) = \{v \in V : \ Lv \in H\},$$

denotiamo con L_H l'operatore non limitato in H che si ottiene restringendo L al sottospazio $D(L; H)$ di H, cioè l'operatore L_H definito dalle condizioni

$$D(L_H) = D(L; H) \qquad \text{e} \qquad L_H v = Lv \quad \forall\, v \in D(L; H).$$

Notiamo che $D(L; H)$ può non essere denso in H e che ciò può avvenire non appena $V \neq H$. In tali condizioni, infatti, abbiamo $H \neq \{0\}$ e $V' \neq H$ e possiamo fissare $u_0 \in H \setminus \{0\}$ e $u_0' \in V' \setminus H$ e definire $L : V \to V'$ mediante la formula $Lv = (v, u_0)u_0'$. Allora L è lineare e continuo e $D(L; H)$ è contenuto nell'ortogonale di u_0 in H, che è un sottospazio chiuso di H diverso da H.

Teorema 17. *Nelle condizioni della definizione precedente, supponiamo che $D(L; H)$ sia denso in H. Allora l'aggiunto dell'operatore non limitato L_H è un prolungamento dell'operatore L_H^* non limitato in H costruito mediante la Definizione 16 a partire dall'aggiunto L^* di L.*

Se, in aggiunta, L è debolmente coercivo o, più in generale, se $L + \lambda I$, ove I è l'immersione di V in V', è un isomorfismo di V su V' per almeno un valore di λ, allora $D(L; H)$ è denso in V e in H, l'aggiunto di L_H coincide con L_H^* e L_H è autoaggiunto se e solo se L è simmetrico, cioè $L^* = L$.

Dimostrazione. Per evitare equivoci denotiamo con $L_H^\bullet$ l'aggiunto dell'operatore non limitato L_H. La prima parte dell'enunciato significa allora

$$D(L^*; H) \subseteq D(L_H^\bullet) \qquad \text{e} \qquad L^*u = L_H^\bullet u \quad \forall\, u \in D(L^*; H).$$

Sia $u \in D(L^*; H)$. Posto $z = L^*u$, abbiamo $z \in H$ e per $v \in D(L; H)$ risulta

$$(z, v) = \langle z, v \rangle = \langle L^*u, v \rangle = \langle Lv, u \rangle = (Lv, u) = (L_H v, u) = (u, L_H v).$$

Dunque $u \in D(L_H^\bullet)$ e $L_H^\bullet u = z = L_H^* u$.

Dimostriamo ora la seconda parte procedendo in varie tappe. Supponiamo dapprima che L sia un isomorfismo e dimostriamo che $D(L; H)$ è denso in V e in H. Infatti L^{-1} è un isomorfismo di V' su V e, dunque, trasforma insiemi densi in V' in insiemi densi in V. Siccome H è denso in V' e $D(L; H)$ è l'immagine di H tramite L^{-1}, deduciamo che $D(L; H)$ è denso in V, di conseguenza anche in H.

Sempre supponendo che L sia un isomorfismo, dimostriamo che $L_H^\bullet = L_H^*$. Data la prima parte del teorema, basta verificare che

$$D(L_H^\bullet) \subseteq D(L^*; H).$$

Premettiamo un'osservazione. Ricordiamo che, prima dell'identificazione canonica di V'' con V, l'aggiunto L^* è un isomorfismo di V'' su V' e il suo inverso $(L^*)^{-1}$ e l'aggiunto $(L^{-1})^*$ dell'inverso L^{-1}, che operano da V' in V'', sono lo stesso operatore. Con l'identificazione canonica di V'' con V, già utilizzata per modificare la definizione di L^* in modo da ottenere un operatore da V in V', gli operatori $(L^*)^{-1}$ e $(L^{-1})^*$ operano da V' in V e, ovviamente, ancora coincidono. Si ha precisamente

$$\langle u', (L^*)^{-1}v' \rangle = \langle u', (L^{-1})^*v' \rangle = \langle v', L^{-1}u' \rangle \qquad \forall\, u', v' \in V'.$$

Ciò premesso, dimostriamo l'inclusione cui siamo interessati. Sia dunque $u \in D(L_H^\bullet)$ e sia $L_H^\bullet u \in H$ dato dalla definizione di aggiunto. Dunque $(L_H^\bullet u, y) = (u, L_H y)$ per ogni $y \in D(L_H) = D(L; H)$. Poniamo $w = (L^*)^{-1} L_H^\bullet u$ osservando che $w \in D(L^*; H)$. Allora, se $v \in H$, il che implica $L^{-1}v \in D(L; H)$, deduciamo

$$\begin{aligned}(w, v) &= (v, w) = \langle v, w \rangle = \langle v, (L^*)^{-1} L_H^\bullet u \rangle = \langle v, (L^{-1})^* L_H^\bullet u \rangle \\ &= \langle L_H^\bullet u, L^{-1}v \rangle = (L_H^\bullet u, L^{-1}v) = (u, L_H L^{-1} v) = (u, L L^{-1} v) = (u, v)\end{aligned}$$

e concludiamo che $u = w \in D(L; H)$.

Sia ora λ tale che $L + \lambda I$ sia un isomorfismo di V su V' e applichiamo quanto abbiamo dimostrato a $L + \lambda I$. Abbiamo

$$D((L + \lambda I)_H^\bullet) = D(L^* + \lambda I^*; H).$$

Ma il secondo membro è $D(L^*; H)$ dato che $I^* = I$. D'altra parte il primo membro è $D(L_H^\bullet)$, come si vede immediatamente: se, infatti, $u \in D(L_H^\bullet)$ e $z \in H$ è come nella definizione di aggiunto di L_H , allora $z + \lambda u$ appartiene ad H e soddisfa quanto deve soddisfare in relazione alla definizione di aggiunto di $(L + \lambda I)_H$, e viceversa.

Veniamo infine all'ultima affermazione. Se $L^* = L$, allora l'aggiunto di L_H , cioè L_H^* , coincide con L_H , banalmente. Viceversa, se L_H è autoaggiunto, cioè se $L_H^* = L_H$, per $u, v \in D(L; H)$ abbiamo

$$\big\langle L^* u, v \big\rangle = (L_H^* u, v) = (L_H v, u) = \big\langle Lv, u \big\rangle$$

e la densità di $D(L; H)$ in V implica $\big\langle L^* u, v \big\rangle = \big\langle Lu, v \big\rangle$ per ogni $u, v \in V$.

Illustriamo il Teorema 12 con alcuni esempi. Partiamo con problemi tipici e importanti che possono essere trattati anche con strumenti di tipo diverso.

Esempio 18. Consideriamo l'equazione

$$-\operatorname{div}(A \nabla u) = f \qquad \text{in } \Omega$$

ove Ω è un aperto limitato, connesso e regolare di $\mathbb{R}^n$, A è una matrice $n \times n$ di funzioni di $L^\infty(\Omega)$ verificante la condizione di ellitticità uniforme e $f \in L^2(\Omega)$, per fissare le idee. Se per l'equazione data consideriamo il problema di Dirichlet omogeneo

$$u = 0 \qquad \text{su } \Gamma ,$$

allora il problema della ricerca di soluzioni $u \in H^1(\Omega)$ rientra nel Teorema 12 con le scelte

$$V = H_0^1(\Omega) \qquad \text{e} \qquad a(u, v) = \int_\Omega (A \nabla u) \cdot \nabla v \, dx.$$

La forma a_* aggiunta di a è data dalla formula

$$a_*(u, v) = u(v, u) = \int_\Omega (A \nabla v) \cdot \nabla u \, dx = \int_\Omega (A^* \nabla u) \cdot \nabla v \, dx$$

ove A^* è la matrice trasposta di A . Allora il problema aggiunto è l'analogo problema omogeneo ottenuto da quello dato mettendo A^* al posto di A . Detta w una sua soluzione qualunque, prendendo w stessa come funzione test e usando l'ellitticità uniforme di A^* , vediamo che $\nabla w = 0$. Dunque w è costante. Essendo $w \in H_0^1(\Omega)$, concludiamo che $w = 0$ e che il problema dato ha soluzioni per ogni f .

Considerazioni perfettamente analoghe valgono se la condizione di Dirichlet è sostituita dalle condizioni di tipo misto

$$u = 0 \quad \text{su } \Gamma_0 \qquad \text{e} \qquad (A \nabla u) \cdot \nu = g \quad \text{su } \Gamma_1 ,$$

ove Γ_0 e Γ_1 sono due parti regolari e complementari di Γ e $g \in L^2(\Gamma_1)$. Ancora il problema ha sempre soluzione.

La situazione è invece diversa per il problema di Neumann

$$(A\nabla u)\cdot\nu = g \quad \text{su } \Gamma\,.$$

Ora un ragionamento simile porta ancora a concludere che ogni soluzione del problema aggiunto è costante, ma, siccome lo spazio ambiente V è tutto $H^1(\Omega)$, ogni costante risolve ora il problema aggiunto e il problema dato ha soluzione se e solo se il funzionale F che compare nel secondo membro della formulazione variazionale si annulla sulla funzione $w = 1$. Nel caso del problema concreto considerato tale condizione diventa

$$\langle F, 1\rangle = \int_\Omega f\,dx + \int_\Gamma g\,ds = 0.$$

Esempio 19. Consideriamo ora il problema

$$-u'' = f \quad \text{in } \mathbb{R}$$

del quale cerchiamo soluzioni $u \in H^1(\mathbb{R})$ con dato $f \in L^2(\mathbb{R})$, per fissare le idee. Passando alle formulazioni variazionali, si vede che il problema aggiunto è quello di trovare $w \in H^1(\mathbb{R})$ tale che $-w'' = 0$. Dunque esso ha solo la soluzione nulla. Eppure il problema dato non ha soluzioni se f è non negativa e non identicamente nulla. In questo caso il teorema non poteva essere applicato dato che la (11) è falsa.

Esempio 20. Cerchiamo soluzioni $u \in H^1(0,\pi)$ del problema di Dirichlet

$$-u'' - u = f \quad \text{in } (0,\pi)\,, \qquad u(0) = u(\pi) = 0,$$

con dato f, ad esempio, in $L^2(0,\pi)$. Il problema aggiunto coincide con il problema omogeneo associato e le sue soluzioni sono generate dalla funzione $w(x) = \sin x$. Allora il problema dato ha soluzioni se e solo se

$$\int_0^\pi f(x)\,\sin x\,dx = 0.$$

Esempio 21. Cerchiamo soluzioni $u \in H^1(0,2\pi)$ del problema

$$-u'' - u = f \quad \text{in } (0,2\pi)\,, \qquad u(0) = u(2\pi), \qquad -u'(0) + u'(2\pi) = g$$

con dati f, ad esempio, in $L^2(0,2\pi)$ e $g \in \mathbb{R}$. Notiamo incidentalmente che le condizioni al bordo con $g = 0$ vengono dette *condizioni di periodicità*. La formulazione variazionale corrisponde al problema (13) con le scelte seguenti:

$$V = \left\{ v \in H^1(0,2\pi) :\ v(0) = v(2\pi) \right\},$$

$$a(u,v) = \int_0^{2\pi} (u'v' - uv)\,dx \quad \text{e} \quad \langle F, v\rangle = \int_0^{2\pi} f\,v\,dx + g\,v(0).$$

Allora il problema aggiunto coincide con il problema omogeneo associato e le sue soluzioni sono generate dalle due funzioni $w_1(x) = \sin x$ e $w_2(x) = \cos x$. Quindi il problema dato ha soluzioni se e solo se

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin x \, dx = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx + g = 0.$$

Esempio 22. Consideriamo infine il problema di trovare $u \in H^1(\Omega)$ tale che

$$-\Delta u - \operatorname{div}(\mathbf{c}u) = f \quad \text{in } \Omega \,, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mathbf{c} \cdot \nu) u = g \quad \text{su } \Gamma \,,$$

ove Ω è un aperto limitato, connesso e regolare di $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \in L^\infty(\Omega)^n$ e, per fissare le idee, $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(\Gamma)$. Notiamo incidentalmente che la scrittura della condizione al bordo è formale in generale e corretta se $\mathbf{c}$ è regolare. La scrittura corretta in ogni caso è $(\nabla u + \mathbf{c}u) \cdot \nu = g$. La formulazione variazionale corrisponde al problema (13) con le scelte seguenti:

$$V = H^1(\Omega), \qquad a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u + \mathbf{c}u) \cdot \nabla v \, dx,$$
$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma g v \, ds.$$

La forma bilineare a_* aggiunta di a è allora data dalla formula

$$a_*(u,v) = a(v,u) = \int_\Omega \bigl(\nabla u \cdot \nabla v + (\mathbf{c} \cdot \nabla u) v \bigr) \, dx$$

e il problema aggiunto significa

$$-\Delta w + \mathbf{c} \cdot \nabla w = 0 \quad \text{in } \Omega \,, \qquad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \Gamma \,.$$

Siccome ogni costante risolve l'aggiunto, condizione necessaria per la risolubilità del problema dato è che $\langle F, 1 \rangle = 0$. Tale condizione è anche sufficiente se solo le costanti risolvono l'aggiunto. Ciò vale sicuramente nel caso monodimensionale, come si vede facilmente.

Esempio 23. Vediamo ora, invece, un esempio a commento del Teorema 17 e mostriamo che, senza le ipotesi della seconda parte del teorema, può non essere vero che l'aggiunto di L_H coincida con l'operatore L_H^* citato nell'enunciato e che L_H può non essere autoaggiunto anche se L è simmetrico.

Posto $\Omega = (0,1)^2$, consideriamo la terna hilbertiana costruita con gli spazi $V = H_0^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$ e prendiamo $L = -D_1^2$, ove D_1 è la derivazione rispetto alla prima variabile. La forma bilineare che definisce L come operatore ad essa associato è data dalla formula

$$a(u,v) = \int_\Omega (D_1 u) \, (D_1 v) \, dx$$

e non è debolmente coerciva, come si vede immediatamente prendendo la successione $\{v_n\}$ costituita dalle funzioni definite dalle formule $v_n(x) = \sin \pi x_1 \sin n\pi x_2$. In questo caso L_H è dato dalle condizioni

$$D(L_H) = D(L;H) = \big\{v \in H^1_0(\Omega) : \ D^2_1 v \in L^2(\Omega)\big\} \qquad \text{e} \qquad L_H v = -D^2_1 v.$$

Siccome a è simmetrica, anche L è simmetrico e, dunque, L^*_H coincide con L_H e l'aggiunto di L_H nel senso degli operatori non limitati in $L^2(\Omega)$ prolunga L_H . Ora vediamo che esso prolunga L_H in senso stretto. Per questo è sufficiente osservare che $D(L_H)$ è incluso in V e verificare che della stessa proprietà non gode invece il dominio dell'aggiunto. Precisamente, denotata con Γ_1 l'unione dei due lati verticali di $\partial\Omega$, mostriamo che ogni funzione regolare u nulla su Γ_1 appartiene al dominio dell'operatore aggiunto. Sia infatti u in queste condizioni e si prenda $z = -D^2_1 u$, che appartiene a $L^2(\Omega)$. Allora, se $v \in D(L;H)$, integrando per parti due volte sull'intervallo $(0,1)$ rispetto alla variabile x_1 e usando l'annullamento di u e di v su Γ_1 , otteniamo

$$\int_0^1 z(x_1,x_2)\, v(x_1,x_2)\, dx_1 = -\int_0^1 u(x_1,x_2)\, D^2_1 v(x_1,x_2)\, dx_1$$

per quasi ogni $x_2 \in (0,1)$ e, integrando successivamente in $(0,1)$ rispetto a x_2 , abbiamo

$$(z,v) = \int_\Omega (-D^2_1 u)\, v\, dx = \int_\Omega u\, (-D^2_1 v)\, dx = (u, L_H v).$$

Dunque u appartiene al dominio dell'aggiunto.