Forme differenziali lineari

Gianni Gilardi

Queste pagine riguardano le forme differenziali lineari. Il centro della trattazione verte sulle condizioni necessarie e sufficienti per l'esattezza e sulla connessione fra le nozioni di forma esatta e di forma chiusa. Limitatamente al caso tridimensionale riformuliamo poi in termini di campi vettoriali i risultati ottenuti per le forme differenziali. Infine dedichiamo gli ultimi paragrafi a un cenno sul problema del potenziale vettore e a qualche applicazione della teoria svolta.

I risultati che presentiamo si basano su vari concetti collegati, come quelli di cammino e di circuito, di integrale di una forma differenziale lungo un cammino e di omotopia fra circuiti, sui quali ci soffermiamo con sufficiente dettaglio. Riguardo al concetto di cammino, mostriamo come esso renda, in modo completamente rigoroso, l'idea intuitiva di "percorso con istruzioni sulla percorrenza". La nozione di omotopia fra circuiti, inizialmente presentata in una forma vicina a quella usualmente data nei corsi di Topologia algebrica, viene poi utilizzata in questioni che necessitano di una regolarità superiore alla continuità. Tutto ciò ci porta a uno sviluppo dell'argomento di una certa corposità e a operazioni di regolarizzazione talora particolarmente complicate. Le relative dimostrazioni, tuttavia, possono essere lasciate dal lettore in secondo piano. Nonostante tutto la trattazione si mantiene a un livello sostanzialmente elementare.

1. Il duale dello spazio euclideo

Se V e W sono due spazi vettoriali reali, possiamo considerare l'insieme, che denotiamo con $\mathrm{Hom}(V;W)$, di tutte le applicazioni lineari $L : V \to W$, dette comunemente anche *operatori lineari*. Ricordiamo che questo ha una struttura naturale di spazio vettoriale: la *somma* di due elementi $L_1, L_2 \in \mathrm{Hom}(V;W)$ e il *prodotto* di $L \in \mathrm{Hom}(V;W)$ per lo scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ sono le applicazioni $L_1 + L_2$ e αL definite rispettivamente dalle formule

$$(L_1 + L_2)(v) = L_1 v + L_2 v \quad \text{e} \quad (\alpha L)(v) = \alpha L v \quad \text{per } v \in V. \tag{1.1}$$

La cosa funziona in quanto tali applicazioni effettivamente sono lineari, come si verifica subito. Dopo di che si controlla senza alcuna difficoltà che $\mathrm{Hom}(V;W)$, munito di tali operazioni, diventa uno spazio vettoriale reale.

1.1. Definizione. *Se V è uno spazio vettoriale reale, lo spazio vettoriale reale* $\mathrm{Hom}(V;\mathbb{R})$ *si chiama duale di V e viene denotato con V^*. Gli elementi di V^* vengono detti funzionali lineari, o forme lineari, su V e l'applicazione $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : V^* \times V \to \mathbb{R}$ che a ogni coppia $(f, v) \in V^* \times V$ associa il valore $f(v)$ si chiama dualità fra V^* e V.* $\square$

Più propriamente V^* è detto *duale algebrico di V*. Per quanto riguarda la dualità, detta anche *prodotto di dualità*, osserviamo che, proprio per definizione, abbiamo

$$\langle f, v \rangle = f(v) \quad \text{per ogni } f \in V^* \text{ e per ogni } v \in V \tag{1.2}$$

e che essa è un'applicazione bilineare di $V^* \times V$ in $\mathbb{R}$, cioè, come si usa dire, una *forma bilineare su $V^* \times V$*. La linearità nel primo argomento è vera per la definizione stessa di somma in V^* e di prodotto di un elemento di V^* per uno scalare (casi particolari di (1.1)). La linearità nel secondo argomento è pure banalmente vera. Fissato infatti $f \in V^*$, l'applicazione $v \mapsto \langle f, v \rangle$ di cui dobbiamo controllare la linearità coincide con il funzionale lineare f per definizione di $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Nel risultato fondamentale successivo e nel seguito usiamo i simboli di Kronecker δ_{ij} definiti da

$$\delta_{ii} = 1 \quad \text{e} \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{se } i \neq j. \tag{1.3}$$

1.2. Teorema. *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita. Allora anche lo spazio duale V^* ha dimensione finita e si ha $\dim V^* = \dim V$. Più precisamente, se V ha dimensione n finita positiva e se $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base di V, allora esiste una base $B^* = \{e^1, \ldots, e^n\}$ di V^* tale che*

$$\langle e^i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{per } i, j = 1, \ldots, n. \; \square \tag{1.4}$$

Dimostrazione. Se $V = \{0\}$ allora, banalmente, V^* si riduce al solo funzionale nullo. Dunque entrambi gli spazi hanno dimensione nulla. Supponiamo ora $\dim V = n > 0$ (e finita) e sia $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V. Per $i = 1, \ldots, n$ consideriamo l'applicazione $e^i : V \to \mathbb{R}$ definita dalla condizione: per ogni $v \in V$, $e^i(v)$ è la i-esima coordinata di v rispetto alla base B, cioè

$$e^i(v) = v_i \quad \text{se} \quad v = \sum_{j=1}^n v_j e_j \quad \text{con } v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Allora si verifica immediatamente che $e^i \in V^*$ e che vale la (1.4). Rimane da controllare che $B^* = \{e^1, \ldots, e^n\}$ è una base di V^*. Sia $f \in V^*$. Rappresentato il generico $v \in V$ come nella (1.5) e posto $c_j = \langle f, e_j \rangle$ per $j = 1, \ldots, n$, abbiamo per ogni $v \in V$

$$\langle f, v \rangle = \left\langle f, \sum_{j=1}^n v_j e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n v_j \langle f, e_j \rangle = \sum_{j=1}^n c_j v_j = \sum_{j=1}^n c_j \langle e^j, v \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n c_j e^j, v \right\rangle$$

da cui $f = \sum_{j=1}^n c_j e^j$. Ciò mostra che B^* genera V^*. Supponiamo ora che $\sum_{j=1}^n c_j e^j = 0$ per certi $c_j \in \mathbb{R}$ e dimostriamo che tali coefficienti sono tutti nulli. Per $i = 1, \ldots, n$ abbiamo subito

$$0 = \langle 0, e_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n c_j e^j, e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n c_j \langle e^j, e_i \rangle = \sum_{j=1}^n c_j \delta_{ji} = c_i. \; \square$$

Siccome un funzionale $f \in V^*$ è noto non appena sono noti i valori che esso assume sugli elementi di una base di V, segue che le condizioni (1.4) individuano univocamente tutti i funzionali e^i. Dunque la base $\{e^1, \ldots, e^n\}$ è unica e risulta giustificata la definizione che segue.

1.3. Definizione. *Nelle condizioni del Teorema 1.2, la base B^* è detta duale della base B.* $\square$

1.4. Osservazione. Ricordiamo che ogni forma bilineare sul prodotto $V \times W$ di due spazi di dimensione finita, cioè un'applicazione bilineare di $V \times W$ in $\mathbb{R}$, si rappresenta per mezzo di una matrice non appena siano state fissate le basi negli spazi V e W. Vediamo che accade quando $W = V^*$ e la base di V^* è la duale di una base fissata di V. Rappresentati il generico vettore $v \in V$ e il generico funzionale $f \in V^*$ per mezzo di B e di B^* rispettivamente, abbiamo

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i, \quad f = \sum_{i=1}^n f_i e^i \quad \text{e} \quad \langle f, v \rangle = \sum_{i,j=1}^n f_i v_j \langle e^i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n f_i v_i. \tag{1.6}$$

Cioè la matrice che rappresenta il prodotto di dualità è la matrice identità. $\square$

Nel caso $V = \mathbb{R}^n$ la base canonica è privilegiata rispetto alle altre. La sua base duale agisce come segue $\langle e^i, v \rangle = v_i$ se $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, per $i = 1, \ldots, n$. Semplifichiamo il linguaggio:

1.5. Definizione. *La base duale della base canonica di $\mathbb{R}^n$ è detta base canonica di $(\mathbb{R}^n)^*$.* $\square$

Se $\{e^1, \ldots, e^n\}$ è la base canonica in $(\mathbb{R}^n)^*$, conviene poi definire $|f|$ mediante la formula

$$|f|^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2 \quad \text{se} \quad f = \sum_{i=1}^n f_i e^i \in (\mathbb{R}^n)^* \tag{1.7}$$

così che la disuguaglianza di Schwarz in $\mathbb{R}^n$ applicata alla (1.6) fornisce

$$|\langle f, v\rangle| \le |f|\,|v| \quad \text{per ogni } f \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ e } v \in \mathbb{R}^n. \tag{1.8}$$

Ricorrere alla base duale può essere comodo in varie situazioni. Abbiamo ad esempio

$$\left\langle f, \textstyle\int_a^b v(t)\,dt \right\rangle = \int_a^b \langle f, v(t)\rangle\, dt \quad \text{per ogni } f \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ e } v : [a,b] \to \mathbb{R}^n \text{ integrabile.} \tag{1.9}$$

Basta infatti scrivere $v(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t)\, e_i$ e $f = \sum_{i=1}^n f_i e^i$ e usare la (1.6).

2. Forme differenziali

Un esempio importante di elemento del duale $(\mathbb{R}^n)^*$ di $\mathbb{R}^n$ è il differenziale $df(x)$ in un punto x di una funzione reale f definita in un aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente x e differenziabile in x. Infatti $df(x)$ è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, cioè un elemento di $(\mathbb{R}^n)^*$ appunto. Ora, proprio questo esempio suggerisce una notazione. Partiamo dal caso $n = 1$ e dalla notazione di Leibniz per la derivata: $f'(x) = df(x)/dx$. Eliminando i denominatori senza preoccuparsi troppo, si ottiene $df(x) = f'(x)\,dx$. Ma se interpretiamo il primo membro proprio come il differenziale di f in x, il quale è l'applicazione $h \mapsto f'(x)h$ di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, siamo indotti ad attribuire a dx il significato seguente: dx è l'applicazione $h \mapsto h$ di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, cioè l'unico elemento della base canonica di $\mathbb{R}^*$.

2.1. Definizione. *Se si denota con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ la variabile in $\mathbb{R}^n$, allora la base canonica di $(\mathbb{R}^n)^*$, duale della base canonica di $\mathbb{R}^n$, si denota con $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$.* □

Naturalmente, se si sceglie una notazione diversa per la variabile in $\mathbb{R}^n$, si usa la notazione corrispondente per la base canonica di $(\mathbb{R}^n)^*$. Ad esempio, se si denota con (x, y, z) la variabile in $\mathbb{R}^3$, la base canonica di $(\mathbb{R}^3)^*$ sarà $\{dx, dy, dz\}$. Con la notazione standard abbiamo

$$dx_i \in (\mathbb{R}^n)^* \quad \text{e} \quad \langle dx_i, h\rangle = h_i \quad \text{per ogni } h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Torniamo al caso del differenziale, ora nel caso n generico. Se denotiamo con $D_i f(x)$ le derivate parziali di f in x, allora sappiamo che

$$\langle df(x), h\rangle = \sum_{i=1}^n D_i f(x)\, h_i \quad \text{per ogni } h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Combinando con la (2.1), otteniamo $\langle df(x), h\rangle = \sum_{i=1}^n D_i f(x)\, \langle dx_i, h\rangle$ per ogni $h \in \mathbb{R}^n$, da cui

$$df(x) = \sum_{i=1}^n D_i f(x)\, dx_i\,. \tag{2.2}$$

Questa è la notazione standard usata per il differenziale quando lo si vuole esprimere in termini di derivate parziali. Va però detto che, spesso, soprattutto presso i non matematici, il termine dx_i viene interpretato come l'incremento della variabile i-esima anziché come elemento di $(\mathbb{R}^n)^*$.

Corrispondentemente, il primo membro della (2.2) viene letto come l'incremento che f subisce di conseguenza, quando si trascuri l'infinitesimo di ordine superiore che costituisce il resto dello sviluppo del prim'ordine. La formula corretta è invece

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x)\, \Delta x_i + o(|\Delta x|) \quad \text{ove} \quad \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

nella quale si è semplicemente scritto Δx anziché h e che resta simile all'interpretazione scorretta della formula (2.2), di fatto corretta. Tutto ciò ha origini storiche, legate in parte a una visione non standard ma imprecisa dell'Analisi matematica (cioè alla Leibniz, versione antica della cosiddetta Analisi non standard) e in parte alla confusione, nelle notazioni, fra funzione e valore assunto dalla funzione stessa. Noi daremo invece ai vari termini il significato che essi devono avere. $\square$

Riprendiamo la (2.2) e lasciamo variare x: otteniamo una famiglia di elementi di $(\mathbb{R}^n)^*$ dipendenti dal parametro x. Ciò viene formalizzato diversamente nella definizione successiva, nella quale interviene l'aggettivo *differenziale*. Ciò viene dai casi concreti, come quello del differenziale appunto.

2.2. Definizione. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Un'applicazione $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ viene detta forma differenziale lineare in Ω, oppure 1-forma in Ω.* $\square$

2.3. Esempio (il differenziale). Naturalmente l'esempio primo è $\omega = df$, il *differenziale* di una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile (in ogni punto). In tal caso, l'elemento $\omega(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$ che ω associa al punto $x \in \Omega$, è proprio il differenziale $df(x)$ di f in x. Si noti dunque la differenza fra df e $df(x)$ nelle notazioni: df è una forma differenziale, cioè un'applicazione di Ω in $(\mathbb{R}^n)^*$, mentre, quando $x \in \Omega$ è fissato, $df(x)$ è il differenziale di f in x, dunque un elemento di $(\mathbb{R}^n)^*$. $\square$

Se $n = 1$ tutte le forme differenziali ragionevoli sono differenziali di funzioni. Vedremo che, invece, la situazione è completamente diversa se $n > 1$. La ragionevolezza di cui sopra è semplicemente una condizione di regolarità. Questo concetto è precisato in generale nella definizione data di seguito. Osserviamo preliminarmente che ogni forma differenziale (d'ora in poi omettiamo l'aggettivo "lineare" per brevità) si rappresenta come

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx_i \quad \text{con} \quad \omega_i : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{per } i = 1, \ldots, n \tag{2.3}$$

ove le funzioni ω_i, dette *coefficienti di* ω, sono univocamente determinate. Infatti $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ è una base di $(\mathbb{R}^n)^*$. Nella definizione che segue k è un intero ≥ 0 oppure il simbolo ∞.

2.4. Definizione. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale. Diciamo che ω è di classe C^k quando sono di classe C^k tutti i suoi coefficienti ω_i dati dalla* (2.3). $\square$

Notiamo che, se si usasse in $(\mathbb{R}^n)^*$ una base diversa dalla base canonica, si avrebbero diversi coefficienti della forma differenziale. La condizione di regolarità C^k, tuttavia, potrebbe essere espressa in modo equivalente mediante i coefficienti nuovi, dato che i legami fra questi ultimi e quelli canonici sono lineari. $\square$

Poco sopra abbiamo anticipato i legami, veri o falsi, fra le nozioni di forma differenziale e di differenziale di una funzione. Per sviscerare queste relazioni occorre sviluppare la teoria dell'integrazione delle forme differenziali. Questa è l'oggetto dei paragrafi successivi.

3. Cammini, archi e circuiti

Al lettore è noto il concetto di integrale di linea rispetto alla lunghezza d'arco. In tal caso il dominio dell'integrazione è un arco di curva, dunque un oggetto tipicamente geometrico. Nella teoria delle forme differenziali è invece opportuno assumere come "domini di integrazione" oggetti di natura diversa, anche se collegati con le curve geometriche, e le scelte su come procedere possono essere varie. Talora si prendono direttamente funzioni che, in ipotesi di iniettività, potrebbero essere chiamate parametrizzazioni di curve. Così facendo, tuttavia, nel caso di funzioni non iniettive si resta piuttosto lontani dalla nozione consueta di integrale di linea. Inoltre verrebbero ritenute distinte, ad esempio, due parametrizzazioni di uno stesso segmento S solo perché questo viene percorso con velocità diverse nei due casi e sarebbero completamente ingiustificate rappresentazioni grafiche del tipo "segmento con freccia" (che indichi il verso di percorrenza). Dunque procederemo in modo diverso, introducendo oggetti che potremmo ragionevolmente chiamare *curve orientate eventualmente intrecciate e ripiegate su se stesse* oppure *percorsi con istruzioni sulla percorrenza*. Noi useremo il termine *cammino*, specializzandolo poi in *arco* e *circuito*, anche se, altrove, ad esempio in corsi di Topologia, queste parole vengono spesso intese con significato diverso.

L'introduzione rigorosa del concetto di cammino richiede un po' di lavoro, innanzi tutto la scelta del livello di regolarità. Per i nostri scopi la sola continuità non basta. D'altra parte la regolarità C^1 è poco opportuna, come sarà chiaro in seguito. Un buon compromesso è la regolarità C^1 a tratti, la quale consente di sviluppare la trattazione rimanendo a un livello ancora elementare.

3.1. Definizione. *Una funzione* $u : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ *è di classe* C^1 *a tratti quando esistono punti* $t_0, \ldots, t_m \in [a,b]$ *in numero finito verificanti* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ *e*

$$u|_{[t_{k-1},t_k]} \quad \text{è di classe } C^1, \quad \text{per } k = 1, \ldots, m. \ \square \tag{3.1}$$

Naturalmente, le derivate in t_{k-1} e in t_k della restrizione di u a $[t_{k-1}, t_k]$ sono la derivata destra $u'_+(t_{k-1})$ e la derivata sinistra $u'_-(t_k)$ di u.

3.2. Osservazione. Per la regolarità C^1 a tratti abbiamo le proprietà seguenti:

i) ogni funzione di classe C^1 a tratti è continua;

ii) la composizione di una C^1 a tratti con una C^1 a tratti reale monotona è C^1 a tratti;

iii) per le funzioni di classe C^1 a tratti vale la formula fondamentale del calcolo.

Nella *ii*) si pensa a una situazione del tipo $u = v \circ \varphi$ ove $\varphi : [a,b] \to [a',b']$ e $v : [a',b'] \to \mathbb{R}^n$ sono di classe C^1 a tratti (nel senso della definizione data con $N = 1$ e $N = n$ rispettivamente) e φ è monotona. Un commento sulla *iii*). Se $u : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ è di classe C^1 a tratti, la derivata u' non è ovunque definita. Tuttavia tutti i suoi prolungamenti a tutto $[a,b]$ sono integrabili (secondo Riemann) e hanno lo stesso integrale, il quale, infatti, non dipende dal valore attribuito al prolungamento nei punti $t_1, \ldots, t_{m-1}$ (con la notazione (3.1)), che sono in numero finito. Pertanto l'integrale di u' ha senso. Controlliamo la validità della formula

$$\int_\alpha^\beta u'(t)\,dt = u(\beta) - u(\alpha) \quad \text{per ogni } \alpha, \beta \in [a,b]\,. \tag{3.2}$$

Se, per un certo k, si ha $\alpha, \beta \in [t_{k-1}, t_k]$, allora la formula vale perché la restrizione di u a $[t_{k-1}, t_k]$ è di classe C^1. Nel caso opposto, tuttavia, la (3.2) continua a valere. Supponiamo, per fissare le idee, che $t_0 \le \alpha < t_1 < \beta \le t_2$. Allora

$$\int_\alpha^{t_1} u'(t)\,dt = u(t_1) - u(\alpha) \quad \text{e} \quad \int_{t_1}^\beta u'(t)\,dt = u(\beta) - u(t_1)$$

per quanto appena visto e, sommando, otteniamo la formula richiesta. Naturalmente, per le funzioni di classe C^1 a tratti, valgono anche le formule collegate con la formula fondamentale del calcolo, come quelle di integrazione per parti e per sostituzione. $\square$

Introduciamo ora la classe delle funzioni da considerare ammissibili, che successivamente chiameremo *parametrizzazioni di cammini* (da cui la scelta della lettera $\mathcal{P}$ nella definizione che segue). Si noti che ciascuna di esse è una funzione di classe C^1 a tratti.

3.3. Definizione. *Denotiamo con $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle funzioni $u : I \to \mathbb{R}^n$ tali che I è un intervallo compatto $[a,b]$ ed esistono punti $t_0, \ldots, t_m$ verificanti $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ e tali che ciascuna delle restrizioni $u|_{[t_{k-1},t_k]}$ sia di classe C^1 con derivata mai nulla.* □

3.4. Definizione. *Siano $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $v : [a',b'] \to \mathbb{R}^n$ due elementi di $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Diciamo che u e v sono equivalenti quando esiste una funzione $\varphi : [a,b] \to [a',b']$ biiettiva, crescente e di classe C^1 a tratti con la sua inversa tale che $u = v \circ \varphi$.* □

L'equivalenza definita in tal modo è effettivamente una relazione di equivalenza in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. A tale proposito notiamo solo che la proprietà simmetrica dipende dal fatto che, con la notazione della definizione data, abbiamo imposto la stessa regolarità a φ e a φ^{-1}. Valgono inoltre le affermazioni seguenti, di controllo immediato: *i*) due funzioni equivalenti hanno la stessa immagine (ma non viceversa); *ii*) con le notazioni della Definizione 3.4, se u e v sono equivalenti, allora $u(a) = v(a')$ e $u(b) = v(b')$. Resta pertanto giustificata la definizione seguente:

3.5. Definizione. *Poniamo $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)/\sim$, ove $\sim$ è la relazione di equivalenza della Definizione 3.4 e chiamiamo cammino in $\mathbb{R}^n$ ciascuno degli elementi di $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Se $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ è un cammino e $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è un elemento di C, introduciamo la nomenclatura seguente:*

i) *u è una parametrizzazione di C;*
ii) *il sostegno di C è l'immagine di u;*
iii) *il primo estremo di C e il secondo estremo di $\mathcal{C}$ sono i due punti $u(a)$ e $u(b)$ rispettivamente.*

Diciamo poi che un cammino C è un circuito quando i suoi estremi coincidono e che C è un arco in caso contrario. □

3.6. Osservazione. Notiamo che il sostegno di un cammino non può mai essere ridotto a un solo punto, in quanto le funzioni costanti non appartengono a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Torneremo su questo punto.

3.7. Definizione. *Sia C un cammino di $\mathbb{R}^n$. Se $k > 0$ è intero o $k = \infty$, diciamo che C è di classe C^k quando ha almeno una parametrizzazione di classe C^k. Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, diciamo poi che C è un cammino di Ω quando il suo sostegno è incluso in Ω.* □

3.8. Esempio (il segmento orientato). Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, la funzione $u : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ data dalla formula $u(t) = x + t(y-x)$ è di classe C^∞ e appartiene a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ se x e y sono distinti (Osservazione 3.6). In tal caso essa individua un cammino in $\mathbb{R}^n$ (la sua classe di equivalenza) di classe C^∞. Chiameremo tale cammino il *segmento (orientato) che congiunge x a y* e useremo la notazione $[x,y]$. Il sostegno di $[x,y]$ è l'usuale segmento di estremi x e y. Il primo estremo e il secondo estremo di $[x,y]$ sono i punti $u(0) = x$ e $u(1) = y$ rispettivamente. Se si interpreta la variabile t come tempo, il punto $u(t)$ percorre il sostegno partendo da x e arrivando a y con moto uniforme in un intervallo di tempo unitario. Posto $L = |y-x|$, un'altra parametrizzazione di $[x,y]$ è data dalla formula $v(s) = x + (s/L)(y-x)$, $s \in [0,L]$. Abbiamo infatti $u(t) = v(Lt)$ per $t \in [0,1]$, cioè $u = v \circ \varphi$ ove $\varphi(t) = Lt$ per $t \in [0,1]$, e $\varphi : [0,1] \to [0,L]$ è addirittura di classe C^∞, biiettiva e crescente con la sua inversa, data da $\varphi^{-1}(s) = s/L$ per $s \in [0,L]$. L'analoga interpretazione cinematica vede il punto $v(s)$ percorrere il sostegno partendo da x a y con moto uniforme e velocità unitaria. Infatti $v'(s) = (y-x)/L$ da cui $|v'(s)| = 1$. Si noti che il parametro s ha anche il significato di distanza del punto $v(s)$ dal primo estremo x. Una terza parametrizzazione di $[x,y]$, meno regolare, è la funzione $w : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ data dalla formula

$w(t) = u(\psi(t))$ ove $\psi(t) = \max\{t/2, 2t-1\}$. Si noti che $\psi : [0,1] \to [0,1]$ effettivamente è biiettiva, crescente, di classe C^1 a tratti con l'inversa. Il punto mobile parte da x, procede con velocità $(y-x)/2$ fino all'istante $t = 2/3$ e prosegue poi con velocità $2(y-x)$ fino a raggiungere y.

3.9. Esempio (la circonferenza ripercorsa). Se $x_0 \in \mathbb{R}^2$ e r e T sono due numeri reali positivi, la funzione $u : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ data dalla formula $u(t) = x_0 + r(\cos t, \sin t)$, $t \in [0,T]$, appartiene a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ e quindi individua un cammino $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$. Se $T < 2\pi$, la funzione u è iniettiva. Se invece $T \geq 2\pi$, allora non lo è e il sostegno di C è l'intera circonferenza di centro x_0 e raggio r, indipendentemente dal valore T. Il primo estremo di C è $x_0 + r(1,0)$ e il secondo è il punto $x_0 + r(\cos T, \sin T)$. In particolare C è un circuito se e solo T è multiplo di 2π. Se $T = 2n\pi$ con n intero positivo, diciamo che C è *la circonferenza di centro x_0 e raggio r percorsa n volte in senso antiorario*. Notiamo che questo modo di dire nasconde chi siano gli estremi (primo e secondo, in questo caso coincidenti). Tuttavia esso è di uso corrente.

3.10. Esempio. Anche la funzione $u : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ data dalla formula $u(t) = (\cos t, |\sin t|)$ per $t \in [-\pi, \pi]$ appartiene a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ e quindi individua un cammino $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$. Gli estremi sono $u(\pm\pi)$ e coincidono con $(-1,0)$. In particolare C è un circuito. Il sostegno S di C è la semicirconferenza costituita dai punti della circonferenza unitaria (cioè di centro $(0,0)$ e raggio 1) aventi ordinata non negativa. Se interpretiamo t come tempo e $u(t)$ come punto mobile, vediamo che $u(t)$ parte da $(-1,0)$ e inizia a percorrere S in modo che la sua ascissa cresca, fino all'istante $t = 0$, nel quale esso si trova nella posizione $(1,0)$. Poi inverte il senso di percorrenza fino a tornare a $(-1,0)$. Potremmo dire che C è S percorso prima verso destra e poi verso sinistra. □

Nei due esempi precedenti, abbiamo usato modi di dire che non fanno intervenire la velocità con la quale il sostegno è percorso. Si intuisce che ciò è conforme con il concetto di cammino: l'equivalenza della Definizione 3.4, infatti, dichiara equivalenti due funzioni che, pur con velocità diverse, individuano "lo stesso modo" di percorrere il sostegno. Questo fatto sarà molto più chiaro tra breve. Il risultato che dimostreremo, in particolare, ci assicurerà che il concetto di cammino è meno complesso di quanto si potesse immaginare all'inizio. Conviene premettere qualche semplice considerazione e alcune definizioni.

Supponiamo che un cammino C abbia una parametrizzazione iniettiva $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Siccome tutte le altre parametrizzazioni hanno la forma $u \circ \varphi$ con φ biiettiva da un certo intervallo $[\alpha, \beta]$ su $[a,b]$, anch'esse sono tutte iniettive. Per un motivo analogo, se è iniettiva la restrizione di u ad $[a,b)$ e $v : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ è equivalente a u, è iniettiva anche la restrizione di v ad $[\alpha,\beta)$. Resta dunque giustificata la prima delle definizioni che diamo di seguito.

3.11. Definizione. *Un cammino C è semplice quando verifica una delle condizioni seguenti: $i)$ le parametrizzazioni di C sono iniettive; $ii)$ C è un circuito e, se $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una sua parametrizzazione, la restrizione di u ad $[a,b)$ è iniettiva.* □

Ad esempio, sono semplici il segmento orientato e la circonferenza unitaria di $\mathbb{R}^2$ percorsa una volta in senso antiorario (Esempio 3.9). Essi sono un arco e un circuito semplici rispettivamente. Esempi di cammini non semplici sono quello dell'Esempio 3.9 con $T > 2\pi$ e quello dell'Esempio 3.10. Non è semplice nemmeno il cammino individuato da una parametrizzazione $u : [0,2] \to \mathbb{R}^n$ regolare con derivata mai nulla che verifica quanto segue: la restrizione di u a $[0,2)$ è iniettiva ma $u(2) = u(1)$. Infatti non è vericata nessuna delle due condizioni della Definizione 3.11. □

Dalla definizione di cammino segue subito che, prefissati un cammino C e un intervallo compatto $[a,b]$, esiste una parametrizzazione di C avente $[a,b]$ come dominio. Fissata infatti una parametrizzazione qualunque $u : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ di C, basta prendere $u \circ \varphi$ ove φ è il polinomio di primo grado che verifica $\varphi(a) = \alpha$ e $\varphi(b) = \beta$. Nella definizione successiva si fa appunto riferimento alla possibilità di scegliere il dominio della parametrizzazione.

3.12. Definizione. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, C_1 e C_2 due cammini di Ω tali che il secondo estremo di C_1 coincida con il primo estremo estremo di C_2. Siano inoltre $u : [0,1] \to \Omega$ e $v : [1,2] \to \Omega$ due parametrizzazioni di C_1 e di C_2 rispettivamente. Chiamiamo somma dei due cammini dati il cammino $C_1 + C_2$ parametrizzato dalla funzione $w : [0,2] \to \Omega$ definita dalle formule: $w(t) = u(t)$ se $t \in [0,1]$ e $w(t) = v(t)$ se $t \in [1,2]$. Chiamiamo opposto del cammino C_1 il cammino $-C_1$ individuato dalla parametrizzazione $z : [0,1] \to \Omega$ definita dalla formula $z(t) = u(1-t)$ per $t \in [0,1]$.* $\square$

La definizione precedente necessiterebbe di una giustificazione: occorrerebbe infatti verificare che, se di C_1 e C_2 si prendono altre due parametrizzazioni, i cammini $C_1 + C_2$ e $-C_1$ restano gli stessi. Tuttavia possiamo lasciare questo controllo al lettore. Ci preme invece notare alcuni fatti.

i) Supponiamo che le funzioni u e v della definizione precedente siano di classe C^1: non vi è alcun motivo perché la funzione w costruita sia anch'essa di classe C^1. Precisamente w è di classe C^1 se e solo se si ha $u'(1) = v'(1)$, mentre essa è di classe C^1 a tratti in ogni caso, cioè senza ipotesi aggiuntive. Ecco perché abbiamo scelto la regolarità C^1 a tratti come punto di partenza.

ii) In riferimento all'Osservazione 3.6, se avessimo accettato anche le costanti fra gli elementi di $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, in vista della definizione di somma avremmo dovuto accettare anche tutte le funzioni di classe C^1 a tratti la cui derivata, in ogni tratto, fosse mai nulla oppure identicamente nulla. Ciò avrebbe prodotto una nozione di cammino concettualmente più complicata.

iii) La definizione di somma porta a un operazione associativa: se hanno senso le somme $C_1 + C_2$ e $C_2 + C_3$, allora risulta $(C_1 + C_2) + C_3 = C_1 + (C_2 + C_3)$. Restano dunque giustificate scritture senza parentesi, estese anche a più di tre addendi, ad esempio $C_1 + \ldots + C_n$, sempre che, per $k = 2, \ldots, n$, il secondo estremo di C_{k-1} coincida con il primo estremo di C_k.

iv) In generale non ha senso scambiare l'ordine degli addendi di una somma di due cammini. Ma anche quando avesse senso farlo, sarebbe in generale proibito farlo. Ad esempio, se C_1 e C_2 sono due circuiti aventi gli estremi tutti in uno stesso punto, si possono costruire i due cammini $C_1 + C_2$ e $C_2 + C_1$. Questi sono due circuiti di solito diversi fra loro. Per questo motivo, in trattazioni analoghe che mirano a proprietà algebriche, si usa adottare una notazione moltiplicativa anziché additiva e parlare di prodotto di cammini anziché di somma.

v) Nella definizione di cammino opposto abbiamo prese l'intervallo $[0,1]$ per comodità, ma deve essere chiaro che, se $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ parametrizza C e $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ è biiettiva, decrescente e di classe C^1 a tratti con l'inversa, allora $u \circ \varphi$ parametrizza $-C$.

vi) Se ha senso la somma $C_1 + C_2$, allora ha senso anche la somma $(-C_2) + (-C_1)$ e questa coincide con $-(C_1 + C_2)$. Per semplificare scriveremo anche $-C_2 - C_1$ in sostituzione di ciascuna delle due notazioni precedenti. Analogamente scriveremo ad esempio $C_1 - C_2 + C_3$ per denotare il cammino $C_1 + (-C_2) + C_3$, naturalmente nell'ipotesi che sia possibile costruirlo.

3.13. Esempio (poligonali). Con le notazioni dell'Esempio 3.8, se $x^k \in \mathbb{R}^n$ per $k = 0, \ldots, m$ e $x^{k-1} \neq x^k$ per $k = 1, \ldots, m$, ha senso definire il cammino

$$[x^0, \ldots, x^m] = [x^0, x^1] + \ldots + [x^{m-1}, x^m]. \tag{3.3}$$

Questo è detto *poligonale di vertici* $x^0, \ldots, x^m$ (elencati nell'ordine preciso). Esso è un circuito se e solo se $x^m = x^0$. In tal caso si dice anche che *la poligonale è chiusa*. Siccome $-[x,y] = [y,x]$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq y$, deduciamo in generale che $-[x^0, \ldots, x^m] = [x^m, \ldots, x^0]$. Si noti che già una poligonale può variamente "intrecciarsi e ripiegarsi su se stessa".

3.14. Esempio (seguito di 3.9). La circonferenza dell'Esempio 3.9 è la somma di n addendi uguali alla circonferenza di centro x_0 e raggio r percorsa una volta in senso antiorario. Il cammino opposto è detto *circonferenza di centro x_0 e raggio r percorsa n volte in senso orario*. Una sua parametrizzazioni è data da $u(t) = x_0 + r(\cos(-t), \sin(-t)) = x_0 + r(\cos t, -\sin t)$ per $t \in [0, 2n\pi]$.

3.15. Esercizio. Giustificare l'ultima affermazione fatta a proposito della circonferenza.

3.16. Esercizio. Dimostrare che, se C_1, C_2 e C sono tre cammini, allora sono equivalenti le condizioni: *i)* $C = C_1 + C_2$; *ii)* esistono una parametrizzazione $w : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $c \in (a,b)$ tali che $w|_{[a,c]}$ parametrizza C_1 e $w|_{[c,b]}$ parametrizza C_2; *iii)* per ogni parametrizzazione $w : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che $w|_{[a,c]}$ parametrizza C_1 e $w|_{[c,b]}$ parametrizza C_2.

3.17. Esercizio. Dimostrare che, se $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una parametrizzazionese di un cammino C, allora una funzione $v : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ è una parametrizzazione di $-C$ se e solo se esiste una funzione $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ biiettiva, decrescente e di classe C^1 a tratti e con la sua inversa tale che $u = v \circ \varphi$.

3.18. Esercizio. Dare un esempio che mostra che l'uguaglianza $C_1 + C_2 = C_2 + C_1$ è falsa in generale, anche se hanno senso i due membri.

3.19. Esercizio. Siano C un circuito, $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una sua parametrizzazione e $c \in (a,b)$. Verificare che, posto $\ell = b - a$, la funzione $v : [c, c+\ell] \to \mathbb{R}^n$ definita dalle formule $v(t) = u(t)$ se $t \in [c,b]$ e $v(t) = u(t-\ell)$ se $t \in (b, c+\ell]$ è la parametrizzazione di un circuito C' e che C e C' hanno lo stesso sostegno. Mostrare inoltre che esiste una decomposizione di C della forma $C = C_1 + C_2$ tale che $C' = C_2 + C_1$. Osservare infine che, in generale, si ha $C' \neq C$ e caratterizzare i casi in cui invece risulta $C' = C$.

4. La struttura dei cammini

In questo paragrafo enunciamo e dimostriamo i risultati che chiariscono la nozione di cammino. Si noti che gioca un ruolo essenziale l'ipotesi che la derivata di una parametrizzazione non si annulli mai. Senza tale condizione, avremmo ottenuto una nozione di cammino concettualmente diversa e più complessa. Ad esempio, se $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $x \neq y$, anche la funzione definita dalla formula $u(t) = x + t^2(y-x)$ per $t \in [0,1]$, per la quale si ha $u'(0) = 0$, sarabbe stata ammissibile ma non sarebbe risultata equivalente a quelle dell'Esempio 3.8 dato che il cambiamento di parametro $s = t^2$ non corrisponde a una funzione regolare con la sua inversa. Ancora, la funzione $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita dalle formule $u(0) = 0$ e $u(t) = e^{-t}\sin(1/t)$ se $t \in (0,1]$ è addirittura di classe C^∞. Se l'avessimo accettata fra le parametrizzazioni ammissibili, essa avrebbe individuato un cammino in $\mathbb{R}$ e il teorema successivo non sarebbe stato vero. Infatti non esiste alcun $\delta > 0$ tale che la restrizione di u all'intervallo $[0,\delta]$ sia iniettiva. Si noti che $u'(0) = 0$.

4.1. Teorema. *Ogni cammino di $\mathbb{R}^n$ può essere rappresentato come somma di un numero finito di archi semplici di classe C^1.* □

Dimostrazione. Sia C il cammino in questione e sia $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una sua parametrizzazione. Siccome $u \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, possiamo introdurre i punti t_k della Definizione 3.3. Allora ciascuna delle restrizioni $u_k = u|_{[t_{k-1},t_k]}$ appartiene a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ e quindi definisce un cammino C_k, chiaramente di classe C^1. Osservato che C coincide con la somma $C_1 + \ldots + C_m$, basterà provare che ciascuno dei C_k si può rappresentare come specificato nell'enunciato.

Per non trascinarci l'indice k, abbandoniamo le notazioni già introdotte e supponiamo che già il cammino dato C sia di classe C^1 e abbia una parametrizzazione $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ con derivata mai nulla. Osservato che $|u'|$ è una funzione continua e strettamente positiva, il suo valore minimo σ dato dal Teorema di Weierstrass è strettamente positivo. Siccome anche u' è continua, essa è uniformemente continua grazie al Teorema di Heine, per cui esiste $\delta > 0$ tale che

$$|u'(t) - u'(s)| \le \frac{\sigma}{2n} \quad \text{per ogni coppia di punti } t, s \in [a,b] \text{ verificanti } |t-s| \le \delta.$$

Scegliamo un intero positivo m tale che $(b-a)/m \le \delta$ e consideriamo i punti $t_k = a+(k/m)(b-a)$, $k = 0, \ldots, m$. Risulta $a = t_0 < \ldots < t_m = b$ e possiamo considerare i cammini C_k (dunque nuovo significato delle notazioni) aventi come parametrizzazioni le restrizioni $u|_{[t_{k-1},t_k]}$ $(k = 1, \ldots, m)$. Allora si ha $C = C_1 + \ldots + C_m$ e, per concludere, dimostriamo che tutte le restrizioni $u|_{[t_{k-1},t_k]}$ $(k = 1, \ldots, m)$ sono iniettive. Fissiamo dunque k. Abbiamo $\sigma \le |u'(t_k)| \le \sum_{i=1}^n |u_i'(t_k)|$, così che almeno uno dei valori $|u_i'(t_k)|$ verifica la disuguaglianza $|u_i'(t_k)| \ge \sigma/n$. Scegliamo i in tali condizioni. Per ogni $t \in [t_{k-1}, t_k]$ abbiamo $|t_k - t| \le \delta$ e deduciamo che

$$|u_i'(t_k)| - |u_i'(t)| \le |u_i'(t_k) - u_i'(t)| \le |u'(t_k) - u'(t)| \le \frac{\sigma}{2n}\,.$$

Essendo $|u_i'(t_k)| \ge \sigma/n$ grazie alla scelta fatta di i, otteniamo dunque

$$|u_i'(t)| \ge |u_i'(t_k)| - \frac{\sigma}{2n} \ge \frac{\sigma}{n} - \frac{\sigma}{2n} = \frac{\sigma}{2n} \quad \text{per ogni } t \in [t_{k-1}, t_k]\,. \tag{4.1}$$

Siano ora $t, s \in [t_{k-1}, t_k]$. Applicando il Teorema del valor medio di Lagrange alla funzione reale u_i, troviamo τ compreso fra t e s tale che $u_i(t)-u_i(s) = (t-s)u_i'(\tau)$. Essendo in particolare $\tau \in [t_{k-1}, t_k]$, vale la (4.1) per τ e concludiamo che

$$|u(t) - u(s)| \ge |u_i(t) - u_i(s)| = |t - s|\,|u_i'(\tau)| \ge \frac{\sigma}{2n}\,|t - s|.$$

Dunque $u(t) = u(s)$ implica $t = s$ e la restrizione considerata è iniettiva. □

Il risultato successivo spiega come è fatto un arco semplice di classe C^1: esso può essere sostanzialmente identificato alla coppia costituita dal suo sostegno e dal suo primo estremo. Per questo motivo sono giustificate certe rappresentazioni grafiche. Tipicamente si disegna il sostegno con una freccia (verso di percorrenza) che indica la scelta del primo estremo fra le due possibili. Useremo i due fatti seguenti:

$$\textit{se } \varphi : [a, b] \to [a', b'] \textit{ è continua e biiettiva, allora essa è strettamente monotona} \tag{4.2}$$

$$\textit{se } w : [\alpha, \beta] \to S \subset \mathbb{R}^n \textit{ è continua e biiettiva, anche la sua inversa è continua.} \tag{4.3}$$

Essi sono conseguenze del Teorema degli zeri di Bolzano e del Teorema di Bolzano-Weierstrass.

4.2. Teorema. *Siano $u : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $v : [a', b'] \to \mathbb{R}^n$ due funzioni iniettive di classe C^1 con derivata mai nulla aventi la stessa immagine e siano C e C' gli archi che esse rispettivamente parametrizzano. Allora $C' = C$ se $v(a') = u(a)$ e $C' = -C$ in caso contrario.* □

Dimostrazione. Costruiamo una funzione $\varphi : [a, b] \to [a', b']$ biiettiva e tale che $u = v \circ \varphi$ e dimostriamo che le funzioni φ e φ^{-1} sono strettamente monotone e di classe C^1. Successivamente passiamo alla dimostrazione vera e propria del teorema. Detta S l'immagine comune di u e di v, leggiamo u e v come applicazioni a valori in S (rigorosamente dovremmo fattorizzare introducendo l'iniezione di S in $\mathbb{R}^n$, ma preferiamo non complicare le notazioni). Siccome v è biiettiva, l'applicazione composta $\varphi = v^{-1} \circ u : [a, b] \to [a', b']$ è ben definita e verifica $u = v \circ \varphi$. Osserviamo incidentalmente che, se anche $\psi : [a, b] \to [a', b']$ verifica $u = v \circ \psi$, allora $v(\psi(t)) = v(\varphi(t))$ per ogni $t \in [a, b]$, da cui $\psi(t) = \varphi(t)$ per ogni $t \in [a, b]$, dato che v è iniettiva. Ciò prova l'unicità della funzione φ verificante $u = v \circ \varphi$. Passiamo alle proprietà di φ e di φ^{-1} e osserviamo che, siccome φ^{-1} gioca il ruolo di φ se si scambiano u e v e queste verificano le stesse ipotesi, basta dimostrare che φ è strettamente monotona. Per la (4.3) anche v^{-1} è continua.

Ciò implica che $\varphi = v^{-1} \circ u$ è continua. La stretta monotonia viene allora dalla (4.2) e abbiamo precisamente

$$\varphi \text{ cresce se e solo se } \varphi(a) = a' \quad \text{e} \quad \varphi \text{ decresce se e solo se } \varphi(b) = a' . \tag{4.4}$$

Il punto più laborioso è la regolarità C^1. Dimostriamo dapprima che φ è differenziabile. Fissato $t^* \in [a, b]$ poniamo

$$\ell_- = \liminf_{t \to t^*} \frac{\varphi(t) - \varphi(t^*)}{t - t^*} \quad \text{e} \quad \ell_+ = \limsup_{t \to t^*} \frac{\varphi(t) - \varphi(t^*)}{t - t^*}$$

e dimostriamo che $\ell_\pm$ sono finiti e uguali. Consideriamo ℓ_-. Sia $\{t_k\}$ una successione di punti di $[a, b]$ diversi da t^* tale che

$$\lim_{k \to \infty} t_k = t^* \quad \text{e} \quad \lim_{k \to \infty} \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t^*)}{t_k - t^*} = \ell_- .$$

Posto $s^* = \varphi(t^*)$ e $s_k = \varphi(t_k)$, abbiamo $s_k \neq s^*$ in quanto φ è iniettiva e possiamo scrivere

$$\frac{u(t_k) - u(t^*)}{t_k - t^*} = \frac{v(\varphi(t_k)) - v(\varphi(t^*))}{t_k - t^*} = \frac{v(s_k) - v(s^*)}{s_k - s^*} \, \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t^*)}{t_k - t^*} .$$

Il primo membro converge a $u'(t^*)$ e il primo quoziente all'ultimo membro converge a $v'(s^*)$ dato che $\{s_k\}$ converge a s^* in quanto φ è continua. Se ora fosse $\ell_- = \pm\infty$, siccome $v'(s^*) \neq 0$, il prodotto all'ultimo membro avrebbe modulo divergente, mentre esso deve convergere a $u'(t^*)$. Dunque ℓ_- è finito. Passando al limite otteniamo $u'(t^*) = \ell_- v'(s^*)$. Analogamente si dimostra che ℓ_+ è finito e che $u'(t^*) = \ell_+ v'(s^*)$. Sottraendo allora membro a membro deduciamo anche che $(\ell_+ - \ell_-) v'(s^*) = 0$, da cui $\ell_- = \ell_+$ in quanto $v'(s^*) \neq 0$. Ciò mostra che esiste finita la derivata $\varphi'(t^*)$ e che essa verifica $u'(t^*) = \varphi'(t^*) \, v'(s^*)$. Per l'arbitrarietà di t^* concludiamo che

$$\varphi \text{ è differenziabile e} \quad u'(t) = \varphi'(t) \, v'(\varphi(t)) \quad \text{per ogni } t \in [a, b] . \tag{4.5}$$

Si noti che ciò implica anche che $\varphi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$ dato che u' non si annulla mai. Per dimostrare che φ' è continua ragioniamo analogamente, ora sulla formula (4.5) anziché sui rapporti incrementali. Fissiamo $t^* \in [a, b]$ e introduciamo (con nuovo significato dei simboli)

$$\ell_- = \liminf_{t \to t^*} \varphi'(t) \quad \text{e} \quad \ell_+ = \limsup_{t \to t^*} \varphi'(t).$$

Dimostriamo che questi sono finiti e coincidono con $\varphi'(t^*)$. Consideriamo ad esempio il minimo limite ℓ_- (per ℓ_+ il ragionamento è identico) e introduciamo una successione $\{t_k\}$ di punti di $[a, b]$ diversi da t^* tale che

$$\lim_{k \to \infty} t_k = t^* \quad \text{e} \quad \lim_{k \to \infty} \varphi'(t_k) = \ell_- .$$

Se ℓ_- fosse infinito, grazie alla continuità di u', v' e φ avremmo

$$\lim_{k \to \infty} |\varphi'(t_k) \, v'(\varphi(t_k))| = +\infty \quad \text{in quanto} \quad \lim_{k \to \infty} v'(\varphi(t_k)) = v'(\varphi(t^*)) \neq 0$$

in contraddizione con il fatto che $\{u'(t_k)\}$ converge a $u'(t^*)$. Dunque ℓ_- è finito e passando al limite nella (4.5) scritta in $t = t_k$ si ottiene $u'(t^*) = \ell_- v'(\varphi(t^*))$. D'altra parte possiamo scrivere

scrivere la (4.5) nel punto t^*. Sottraendo membro a membro e sfruttando il fatto che $v'(\varphi(t^*) \neq 0$ otteniamo $\ell_- = \varphi'(t^*)$. Ciò conclude la dimostrazione della regolarità C^1 di φ.

Veniamo alla dimostrazione vera e propria del teorema. Supponiamo dapprima $v(a') = u(a)$ e dimostriamo che $C' = C$. Abbiamo $\varphi(a) = v^{-1}(u(a)) = a'$, per cui la monotonia è crescente grazie alla (4.4). Dunque φ verifica tutte le proprietà richieste dalla Definizione 3.4 e u e v sono equivalenti. Ciò mostra che $C' = C$. Supponiamo ora $v(a') \neq u(a)$ e usiamo la (4.4): siccome il primo caso implica l'uguaglianza $u(a) = v(\varphi(a)) = v(a')$, falsa per ipotesi, deve valere l'altro. Deduciamo che $v(a') = u(b)$. Sia ora p il polinomio di primo grado che verifica $p(a) = b$ e $p(b) = a$. Allora $z = u \circ p$ è di classe C^1, iniettiva, con derivata mai nulla ed ha ancora S come immagine. In più essa verifica $z(a) = u(b) = v(a')$. Applicando a z e a v quanto abbiamo già dimostrato vediamo che esse sono equivalenti. D'altra parte z è una parametrizzazione del cammino $-C$. Dunque $C' = -C$ e la dimostrazione è conclusa. □

4.3. Osservazione. Se una sola delle due applicazioni u e v è di classe C^1 e l'altra è solo di classe C^1 a tratti, suddividendo opportunamente gli intervalli dei parametri ci riconduciamo al caso precedente. Deduciamo che la funzione φ della dimostrazione appena fatta è di classe C^1 a tratti con la sua inversa ma conserva la proprietà di monotonia. Dunque la tesi del teorema continua a valere anche in questa situazione più generale.

4.4. Esercizio. Dimostrare che ogni cammino in $\mathbb{R}$ è poligonale.

4.5. Esercizio. Dimostrare che non esistono circuiti semplici in $\mathbb{R}$.

4.6. Esercizio. Sarà vero o falso che ogni circuito di $\mathbb{R}^n$ può essere scritto come somma di un numero finito di circuiti semplici? □

Naturalmente un cammino e il suo sostegno non vanno assolutamente confusi, così come non vanno confusi il cammino e la coppia costituita dal sostegno e dal primo estremo quando il cammino non è semplice. Tuttavia i Teoremi 4.1 e 4.2 sostanzialmente autorizzano l'uso di rappresentazioni grafiche di tipo "curve con frecce", anche in casi di curve in qualche modo intrecciate o ripiegate su se stesse purché con un basso livello di complessità. Infatti deve essere chiaro che il sostegno di un cammino può essere un insieme complesso, talora molto complesso. Ecco un esempio.

4.7. Esempio. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Allora la formula $u(t) = (t, f(t))$ per $t \in [0,1]$ definisce $u \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Infatti u è di classe C^1 e la sua derivata non si annulla mai. Inoltre u è iniettiva. Quindi u parametrizza un arco semplice di $\mathbb{R}^2$ che ha come sostegno il grafico di f. Consideriamo ora due funzioni f_1 e f_2 nelle condizioni dette e verificanti $f_1(1) = f_2(1) = 0$ e denotiamo con C_1 e C_2 i cammini rispettivi. Allora ha senso il cammino $C = C_1 - C_2$: infatti il secondo estremo di C_1 è il punto $(1,0)$ e coincide con il secondo estremo di C_2, cioè con il primo estremo di $-C_2$. Il sostegno di C, che è l'unione dei grafici di f_1 e f_2, può allora essere molto complicato. Ad esempio potremmo prendere come f_1 la funzione nulla e definire f_2 mediante le formule $f_2(t) = e^{-t} \sin(\pi/t)$ per $t \in (0,1]$ e $f_2(0) = 0$: otterremmo una funzione f_2 nulla in 1 e addirittura di classe C^∞. Ciò nonostante il sostegno di C ha infiniti intrecci. Ma, conservando la scelta della funzione nulla f_1, possiamo anche andare ben oltre. Si può infatti dimostrare che, prefissato un chiuso $K \subseteq [0,1]$, esiste una funzione $f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ addirittura di classe C^∞ che verifica $f_2(t) = 0$ se $t \in K$ e $f_2(t) \neq 0$ se $t \notin K$. Scelto allora K contenente 1 e considerata la corrispondente f_2, i grafici di f_1 e f_2 hanno come intersezione esattamente $K \times \{0\}$. Siccome esiste un compatto di questo tipo tale che $[0,1] \setminus K$ sia costituito da soli irrazionali, si capisce quanto possa essere complesso il sostegno del cammino C che si viene a costruire.

4.8. Osservazione. Le cose sono diverse nel caso di un arco semplice C di classe C^1 proprio grazie al Teorema 4.2. Denotiamo con S il sostegno di C e consideriamo due parametrizzazioni $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $v : [a',b'] \to \mathbb{R}^n$ di C di classe C^1. Esse sono iniettive con derivata mai nulla ed esiste una e una sola $\varphi : [a,b] \to [a',b']$ tale che $u = v \circ \varphi$. Questa è di classe C^1 con l'inversa ed è strettamente crescente. Segue che $\varphi'(t) > 0$ per ogni $t \in [a,b]$ (con la disuguaglianza stretta altrimenti u' si annullerebbe). Per ogni $x \in S$ consideriamo i due punti $t = u^{-1}(x)$ e $s = v^{-1}(x)$. Abbiamo allora

$$u'(t) = \varphi'(t)v'(\varphi(t)) = \varphi'(t)v'(s) \quad \text{da cui} \quad |u'(t)| = \varphi'(t)|v'(s)| \quad \text{e} \quad \frac{u'(t)}{|u'(t)|} = \frac{v'(s)}{|v'(s)|}\,.$$

D'altra parte, considerata ad esempio la parametrizzazione u, vediamo che il cono tangente T_xS a S in x è uno spazio vettoriale di dimensione 1, precisamente l'immagine del differenziale $du(t)$, in quanto u è iniettiva, con derivata non nulla e con inversa continua. Ne viene che T_xS contiene esattamente due versori, fra loro opposti. Ora $u'(t)/|u'(t)|$ è uno di questi e il semplice calcolo fatto sopra mostra che due parametrizzazioni qualunque di C individuano lo stesso versore fra i due possibili. Denotiamo tale versore con $\tau(x)$. Abbiamo pertanto

$$\tau(x) = \frac{u'(u^{-1}(x))}{|u'(u^{-1}(x))|} \quad \text{per ogni } x \in S \tag{4.6}$$

e la funzione $\tau : S \to \mathbb{R}^n$ è anche continua. Se considerassimo il cammino opposto $-C$, il sostegno non cambierebbe ma la funzione τ si muterebbe nella sua opposta. Concludiamo pertanto che un arco semplice C nelle condizioni dette è concettualmente identificabile anche alla coppia (S,τ), ove S è il sostegno di C e $\tau : S \to \mathbb{R}^n$ è una funzione *continua* tale che $\tau(x) \in T_xS$ e $|\tau(x)| = 1$ per ogni $x \in S$, cioè una funzione continua che assegna a ciascuno dei punti di S uno dei due possibili versori tangenti. La funzione τ può essere ragionevole chiamata *orientamento di* S.

4.9. Osservazione. Se si abbandona l'ipotesi fatta nell'osservazione precedente occorre fare attenzione. Se u è una parametrizzazione di classe C^1 a tratti del cammino C in questione, si presentano situazioni nuove: *i*) se in un punto t_0 le derivate unilatere $u'_\pm(t_0)$ sono diverse, queste sono due versori tangenti al sostegno S nel punto $u(t_0)$ corrispondente; *ii*) se $x \in S$, di solito $u^{-1}(x)$ non è ridotto a un solo punto e il cono tangente T_xS non è una retta. Tuttavia possiamo applicare il Teorema 4.1 e scrivere C come somma di archi semplici C_k, $k = 1,\dots,m$, di classe C^1. Dunque siamo nel caso dell'osservazione precedente e risulta ben definita la funzione $\tau_k : S_k \to \mathbb{R}^n$ che a ogni punto del sostegno S_k di C_k associa il versore tangente orientato correttamente. Dunque abbiamo una collezione $\{\tau_k\}$ di funzioni anziché un'unica funzione τ. Naturalmente, se $x \in S$, a x possono venire attribuiti più versori tangenti, i versori $\tau_k(x)$ per i valori di k per i quali si ha $x \in S_k$, e questi, di solito, sono diversi fra loro. Il lettore costruisca qualche esempio.

5. Lunghezza di un cammino

Ora introduciamo la nozione di lunghezza di un cammino. Riservandoci di commentarla immediatamente, diamo la definizione seguente:

5.1. Definizione. *Sia $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ e sia $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrizzazione di C. Definiamo la lunghezza di C mediante la formula*

$$\operatorname{lungh} C = \int_a^b |u'(t)|\,dt. \ \square \tag{5.1}$$

Il primo commento, doveroso, riguarda l'indipendenza dalla parametrizzazione. Consideriamo un'altra parametrizzazione $v : [a',b'] \to \mathbb{R}$ di C e sia $\varphi : [a,b] \to [a',b']$ con le proprietà richieste nella Definizione 3.4 tale che $u = v \circ \varphi$. Allora, essendo $\varphi' > 0$, abbiamo

$$\int_a^b |u'(t)|\,dt = \int_a^b |(v\circ\varphi)'(t)|\,dt = \int_a^b |v'(\varphi(t))|\,\varphi'(t)\,dt = \int_{a'}^{b'} |v'(s)|\,ds.$$

Il secondo riguarda i legami fra la lunghezza del cammino e quella del suo sostegno. Ora, a un livello elementare dobbiamo pensare che la seconda non sia nemmeno sempre definita: infatti il sostegno può avere una struttura complessa, come avviene nell'Esempio 4.7. Se invece il cammino è semplice e, per fissare le idee, con estremi distinti, allora le sue parametrizzazioni sono iniettive e fungono da parametrizzazioni anche della curva regolare a tratti che costituisce il sostegno. Riconosciamo allora nella (5.1) anche la lunghezza di tale curva. Abbiamo ad esempio $\operatorname{lungh}[x,y] = |x-y|$. Per contro abbiamo $\operatorname{lungh}[x,y,x] = 2|x-y|$, mentre la lunghezza del sostegno della poligonale $[x,y,x]$ continua ad essere $|x-y|$. Infatti la nozione di lunghezza di un cammino precisa l'idea di *strada percorsa dalle parametrizzazioni* (la stessa per tutte, indipendentemente dalla velocità). Ciò viene ultieriormente chiarito dal risultato successivo.

5.2. Proposizione. *Siano $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Allora valgono le formule*

$$\operatorname{lungh}(C_1 + C_2) = \operatorname{lungh} C_1 + \operatorname{lungh} C_2 \quad e \quad \operatorname{lungh}(-C_1) = \operatorname{lungh} C_1 \tag{5.2}$$

la prima nell'ipotesi che il secondo estremo di C_1 coincida con il primo estremo di C_2. □

Dimostrazione. Con le notazioni della Definizione 3.12 abbiamo

$$\operatorname{lungh}(C_1 + C_2) = \int_0^2 |w'(t)|\,dt = \int_0^1 |u'(t)|\,dt + \int_1^2 |v'(t)|\,dt = \operatorname{lungh} C_1 + \operatorname{lungh} C_2$$
$$\operatorname{lungh}(-C_1) = \int_0^1 |z'(t)|\,dt = \int_0^1 |u'(1-t)|\,dt = \int_0^1 |u'(s)|\,ds = \operatorname{lungh} C_1 . \ \square$$

La nozione di lunghezza discussa sopra si presta anche a trovare parametrizzazioni di tipo particolare, dette *parametrizzazioni per lunghezza d'arco*. Esse sono caratterizzate dal fatto che il punto mobile si muove con velocità unitaria.

5.3. Proposizione. *Sia C un cammino di $\mathbb{R}^n$ e sia L la sua lunghezza. Allora esiste una e una sola parametrizzazione $v : [0,L] \to \mathbb{R}^n$ di C tale che $|v'(s)| = 1$ per tutti i punti di $[0,L]$ con l'eccezione al più di un numero finito.* □

Dimostrazione. Sia $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una parametrizzazione di C. Definiamo $\ell : [a,b] \to [0,L]$ per mezzo della formula

$$\ell(t) = \int_a^t |u'(\tau)|\,d\tau \quad \text{per } t \in [a,b] \tag{5.3}$$

e osserviamo che ℓ effettivamente assume valori in $[0,L]$, è monotona non decrescente e suriettiva. Inoltre, rappresentata u come nella Definizione 3.3 di elemento di $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, vediamo che la restrizione di $|u'|$ a ciascuno degli intervalli $[t_{k-1}, t_k]$ ha un minimo positivo. Deduciamo che esiste $\sigma > 0$ tale che $|u'(t)| \ge \sigma$ per ogni $t \in [a,b]$ diverso dai t_k. Ciò, in particolare, implica che vale la disuguaglianza $\ell(t) - \ell(t') \ge \sigma(t - t')$ per ogni coppia di punti di $[a,b]$ verificanti $t > t'$. Dunque ℓ è anche strettamente monotona e quindi invertibile. Inoltre abbiamo

$$\ell'(t) = |u'(t)| \quad \text{per ogni } t \in [a,b] \text{ diverso dai } t_k$$

la formula estendendosi alle derivate separatamente destre e sinistre nei punti t_k. Ciò mostra che ℓ è anche di classe C^1 a tratti e si vede facilmente, ricordando che $|u'| \ge \sigma$, che della stessa proprietà gode la funzione $\varphi = \ell^{-1} : [0,L] \to [a,b]$. Poniamo $v = u \circ \varphi$, osservando che v è ancora una parametrizzazione di C grazie alle proprietà di ℓ e di φ appena controllate. Posto $s_k = \ell(t_k)$, se $s \in [0,L]$ è diverso dagli s_k, abbiamo infine

$$v'(s) = u'(\varphi(s))\,\varphi'(s) = \frac{u'(\varphi(s))}{\ell'(\varphi(s))} = \frac{u'(\varphi(s))}{|u'(\varphi(s))|} \quad \text{da cui} \quad |v'(s)| = 1.$$

Sia ora $w : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ un'altra parametrizzazione di C con la stessa proprietà. Allora risulta $w = v \circ \psi$ per una certa funzione $\psi : [0, L] \to [0, L]$ biiettiva, crescente, di classe C^1 a tratti con l'inversa. Con l'eccezione al più di un numero finito di valori di s abbiamo allora

$$1 = |w'(s)| = |v'(\psi(s))\, \psi'(s)| = |v'(\psi(s))|\, \psi'(s) = \psi'(s) \quad \text{da cui} \quad \psi(s) = \psi(0) + \int_0^s \psi'(\tau)\, d\tau = s$$

e quindi $w = v$. □

5.4. Osservazione. Se, fissato $t_0 \in [a, b]$, definiamo per $t \in [a, b]$ il valore $\ell_0(t)$ mediante

$$\ell_0(t) = \int_{t_0}^t |u'(\tau)|\, d\tau = \ell(t) - \ell(t_0) \quad \text{ove } \ell \text{ è data dalla (5.3)}$$

otteniamo una funzione $\ell_0 : [a, b] \to [-s_0, L - s_0]$, ove $s_0 = \ell(t_0)$, che è ancora biiettiva, crescente, di classe C^1 con l'inversa. Quindi $z = u \circ \ell_0^{-1}$ è ancora una parametrizzazione di C che verifica $|z'(s)| = 1$ con l'eccezione al più di un numero finito di valori di s. Ora s può assumere non solo valori non negativi e il suo significato è il seguente: *i)* se $t = t_0$ e $s = \ell_0(t)$, allora $s = 0$; *ii)* se $t > t_0$ e $s = \ell_0(t)$, si ha $s > 0$ e s è la lunghezza del cammino parametrizzato dalla restrizione di u a $[t_0, t]$; *iii)* se $t < t_0$ e $s = \ell_0(t)$, si ha $s < 0$ e $|s|$ è la lunghezza del cammino parametrizzato dalla restrizione di u a $[t, t_0]$. Si dice che s è *l'ascissa curvilinea* del punto generico nel sistema di origine $u(t_0)$. Naturalmente, se il cammino non è semplice, a un punto del suo sostegno possono venire attribuiti più valori dell'ascissa curvilinea, e sono le parametrizzazioni a decidere quando. Nel caso del segmento $[x, y]$ con $x \neq y$ si ha $L = |x - y|$ e la parametrizzazione mediante ascissa curvilinea con origine in x è data da $u(s) = x + (s/L)(y - x)$ per $s \in [0, L]$. L'analoga parametrizzazione, ma con origine nel punto medio del segmento, è invece data dalla formula $u(s) = x + ((s + L/2)/L)(y - x)$ per $s \in [-L/2, L/2]$.

Riprendendo poi l'Osservazione 4.8 notiamo che, se u è una parametrizzazione per lunghezza d'arco dell'arco semplice C, la (4.6) si semplifica e diventa $\tau(x) = u'(u^{-1}(x))$. In altre parole, se la scelta del parametro per la rappresentazione di C è l'ascissa curvilinea s (con una certa origine), abbiamo che $u'(s)$ è il versore tangente al sostegno di C nel suo punto $u(s)$. Questa seconda versione non richiede poi che la parametrizzazione sia iniettiva: $u'(s)$ è *uno dei versori tangenti*.

5.5. Esercizio. Dare la parametrizzazione per lunghezza d'arco con origine in $(r, 0)$ della circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio r percorsa n volte in senso antiorario, rispettivamente orario. Nel caso $n = 1$ dare le analoghe parametrizzazioni prendendo come origine del sistema di ascisse curvilinee prima il punto $(-r, 0)$ e poi il punto $(0, r)$.

5.6. Esercizio. Dati $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ fra loro distinti, dare la parametrizzazione per lunghezza d'arco della poligonale $[x, y, z]$ assumendo come origine prima x, poi y e infine z. Spiegare che cosa accade se invece $z = x$.

6. L'integrale di una forma differenziale

In questo paragrafo definiamo l'integrale di una forma differenziale e dimostriamo le sue proprietà principali. Consideriamo solo il caso di forme di classe C^0 (vedi Definizione 2.4) perché solo queste avranno in seguito un ruolo significativo.

6.1. Definizione. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale di classe C^0 e C un cammino di Ω. Poniamo*

$$\int_C \omega = \int_a^b \langle \omega(u(t)), u'(t) \rangle \; dt \tag{6.1}$$

ove $u : [a, b] \to \Omega$ è una parametrizzazione di C. □

Come nel caso della definizione di lunghezza di un cammino, è doveroso verificare che la definizione data non dipende dalla parametrizzazione, ma ciò è immediato. Se v e φ sono come nella Definizione 3.4, abbiamo infatti

$$\int_a^b \langle \omega(u(t)), u'(t) \rangle \ dt = \int_a^b \langle \omega((v \circ \varphi)(t)), (v \circ \varphi)'(t) \rangle \ dt$$
$$= \int_a^b \langle \omega(v(\varphi(t))), \varphi'(t)\, v(\varphi(t)) \rangle \ dt = \int_a^b \langle \omega(v(\varphi(t))), v(\varphi(t)) \rangle \ \varphi'(t)\, dt = \int_{a'}^{b'} \langle \omega(v(s)), v'(s) \rangle \ ds.$$

6.2. Osservazione. Notiamo che, quando si esplicita la scrittura della forma differenziale ω per mezzo dei suoi coefficienti ω_i della rappresentazione canonica, la (6.1) diventa

$$\int_C \sum_{i=1}^n \omega_i(x)\, dx_i = \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(u(t))\, u_i'(t)\, dt.$$

In particolare si vede che le sostituzioni

$$x_i = u_i(t) \quad \text{e} \quad dx_i = u_i'(t)\, dt$$

producono il risultato corretto (abbinate alla scelta corretta degli estremi di integrazione).

6.3. Osservazione. Notiamo che, se due punti $x', x'' \in \mathbb{R}^n$ differiscono solo per una delle loro coordinate, diciamo la prima per non appesantire le notazioni, per cui $x'' = (x_1'', x_2', \ldots, x_n')$, si ha

$$\int_{[x',x'']} \omega = \int_{x_1'}^{x_1''} \omega_1(x_1, x_2', \ldots, x_n')\, dx_1 \,.$$

Dunque la sostituzione $dx_i = 0$ se $i > 1$ nell'espressione di ω produce il risultato corretto. Infatti, nei due casi $x_1' < x_1''$ e $x_1' > x_1''$, possiamo prendere come parametrizzazioni di $[x', x'']$ le applicazioni $t \mapsto (t, x_2', \ldots, x_n')$, $t \in [x_1', x_2']$, e, rispettivamente, $t \mapsto x_1' + x_1'' - t$, $t \in [x_1'', x_1']$ e poi eseguire le sostituzioni $t = x_1$ e $t = x_1' + x_1'' - x_1$ negli integrali ottenuti.

6.4. Osservazione. Riprendiamo l'Osservazione 4.8 riguardante gli archi semplici e conserviamone ipotesi e notazioni. Abbiamo allora

$$\int_C \omega = \int_a^b \langle \omega(u(t)), u'(t) \rangle \ dt = \int_a^b \langle \omega(u(t)), \tau(u(t)) \rangle \ |u'(t)|\, dt = \int_S \langle \omega(x), \tau(x) \rangle \ ds \tag{6.2}$$

l'ultimo membro essendo il consueto integrale di una funzione continua sulla curva regolare S (che tale è, come detto nell'osservazione citata) rispetto alla lunghezza d'arco ds. Se invece il cammino è generico la notazione (6.2) diventa ambigua (ciò nonostante è talora usata) dato che l'applicazione τ non è ben definita (Osservazione 4.9). Riprenderemo il discorso più in là.

6.5. Esempio. Se $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\omega : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ è una forma differenziale di classe C^0, abbiamo

$$\int_{[x,y]} \omega = \int_0^1 \langle \omega(x + t(y-x)), y - x \rangle \ dt. \tag{6.3}$$

Ad esempio, se $\omega(x) = \sum_{i=1}^n 2x_i\, dx_i$, l'integrale vale $|y-x|^2$. Tutto ciò se $x \neq y$, altrimenti il cammino $[x, y]$ non è definito. Tuttavia è chiaro che il secondo membro della formula continua ad avere significato e si annulla quando $x = y$. Allora è conveniente attribuire in tal caso valore 0 anche al primo membro della (6.3) (senza tuttavia pretendere di avere un caso particolare della definizione generale). Ciò rimpiazza bene il non aver definito cammini con sostegno ridotto a un punto e sarà comodo in seguito. Ad esempio, con tale convenzione, vediamo che, fissata la forma ω, la funzione $(x, y) \mapsto \int_{[x,y]} \omega$ è continua in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, come si vede applicando al secondo membro della (6.3) la teoria degli integrali dipendenti da parametri.

6.6. Esempio (l'indice di avvolgimento). Siano $x^* \in \mathbb{R}^2$, C un cammino di $\mathbb{R}^2$ e S il suo sostegno. Se S non contiene x^* (comunemente si dice che C *non passa per* x^*), ogni parametrizzazione $u : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ di C può essere scritta nella forma

$$u(t) = x^* + \bigl(\rho(t)\cos\vartheta(t), \rho(t)\sin\vartheta(t)\bigr) \quad \text{per } t \in [a,b] \tag{6.4}$$

ove $\rho : [a,b] \to (0,+\infty)$ e $\vartheta : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni di classe C^1 a tratti. Ciò è del tutto intuitivo e può essere dimostrato rigorosamente, ad esempio passando per il Teorema della funzione implicita (infatti la funzione $t \mapsto (\rho(t), \vartheta(t))$ da definire deve risolvere per t fissato l'equazione $(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) = u(t) - x^*$ di incognita (ρ, ϑ) e tale equazione, effettivamente, definisce localmente la funzione che ci interessa pur di partire da un punto che già verifica l'equazione stessa). Precisamente la funzione ρ è univocamente determinata ed è data dalla formula $\rho(t) = |u(t) - x^*|$ mentre ϑ è determinata dalla scelta del suo valore, fra gli infiniti ammissibili, in un punto di partenza. Ad esempio, considerato il punto $t = a$, vi sono infiniti valori reali che possono essere presi come $\vartheta(a)$ in modo da rendere vera la (6.4) con $t = a$ e, scelto ad arbitrio uno di essi, restano obbligate le scelte di $\vartheta(t)$ per ogni altro t semplicemente richiedendo che ϑ sia una funzione continua. Introduciamo ora $\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{x^*\} \to (\mathbb{R}^2)^*$ mediante

$$\omega(x) = -\frac{x_2 - x_2^*}{|x - x^*|^2}\,dx_1 + \frac{x_1 - x_1^*}{|x - x^*|^2}\,dx_2 \quad \text{per } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x^*\}$$

ove naturalmente x_i^* sono le coordinate di x^*. Calcoliamo l'integrale di ω su C. Prepariamo il calcolo. Per $t \in [a,b]$ abbiamo

$$\begin{aligned}\langle \omega(u(t)), u'(t) \rangle = {}& \frac{-\sin\vartheta(t)}{\rho(t)}\bigl(\rho'(t)\cos\vartheta(t) - \rho(t)\vartheta'(t)\sin\vartheta(t)\bigr) \\ &+ \frac{\cos\vartheta(t)}{\rho(t)}\bigl(\rho'(t)\sin\vartheta(t) + \rho(t)\vartheta'(t)\cos\vartheta(t)\bigr) = \vartheta'(t).\end{aligned}$$

Dunque otteniamo

$$\int_C \omega = \int_a^b \langle \omega(u(t)), u'(t) \rangle \; dt = \int_a^b \vartheta'(t)\,dt = \vartheta(b) - \vartheta(a)$$

e vediamo che il significato dell'integrale è l'incremento che la coordinata angolare (la seconda delle coordinate polari nel sistema di centro x^*) subisce quando il punto mobile $u(t)$ percorre il cammino. Se C è un circuito, tale incremento deve essere un multiplo di 2π, non necessariamente nullo. Poniamo in tal caso

$$\operatorname{ind}(C, x^*) = \frac{1}{2\pi}\int_C -\frac{x_2 - x_2^*}{|x - x^*|^2}\,dx_1 + \frac{x_1 - x_1^*}{|x - x^*|^2}\,dx_2\,. \tag{6.5}$$

Otteniamo un numero intero (che può essere positivo, nullo, negativo) detto *indice di avvolgimento di C intorno a x^**. Ad esempio l'indice intorno a x_0 della circonferenza di centro x_0 e raggio r percorsa n volte in senso antiorario dell'Esempio 3.9 vale esattamente n. Le proprietà di additività dell'integrale che dimostriamo nel teorema successivo implicano che l'indice di una somma finita di circuiti C_k è la somma degli indici dei singoli circuiti C_k e che l'indice cambia di segno quando si passa da un circuito al suo opposto. Si può anche pensare, fissato il circuito C di $\mathbb{R}^2$ e detto S il suo sostegno, di considerare la funzione $\operatorname{ind}_C : \mathbb{R}^2 \setminus S \to \mathbb{Z}$ che a ogni punto $x \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ associa $\operatorname{ind}(C, x)$. Si dimostrano allora i fatti seguenti, estremamente intuitivi: *i*) ogni punto dell'aperto $\mathbb{R}^2 \setminus S$ ha un intorno in cui ind_C è costante e, più precisamente, ind_C è costante su ogni componente connessa di $\mathbb{R}^2 \setminus S$; *ii*) la funzione ind_C è nulla sulla componente connessa illimitata di $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Notiamo che $\mathbb{R}^2 \setminus S$ è effettivamente aperto dato che S è un compatto (immagine continua di un intervallo compatto). Le nozioni di insieme connesso e di componente connessa, peraltro intuitive, vengono precisate nel paragrafo successivo.

6.7. Teorema (proprietà dell'integrale). *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\omega, \sigma : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ due forme differenziali di classe C^0, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e C un cammino di Ω. Allora valgono le formule*

$$\int_C \lambda_1\omega + \lambda_2\sigma = \lambda_1 \int_C \omega + \lambda_2 \int_C \sigma \quad \text{e} \quad \Bigl| \int_C \omega \Bigr| \le \sup_{x\in S} |\omega(x)| \; \mathrm{lungh}\, C \tag{6.6}$$

ove S è il sostegno di C. Se poi C_1, C_2 sono due cammini di Ω abbiamo

$$\int_{C_1+C_2} \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega \quad \text{e} \quad \int_{-C_1} \omega = - \int_{C_1} \omega \tag{6.7}$$

la prima nell'ipotesi che il secondo estremo di C_1 coincida con il primo estremo di C_2. □

Dimostrazione. Sia $u : [a,b] \to \Omega$ una parametrizzazione di C. Allora

$$\int_C \lambda_1\omega + \lambda_2\sigma = \int_a^b \langle \lambda_1\omega(u(t)) + \lambda_2\sigma(u(t)), u'(t) \rangle \; dt$$
$$= \lambda_1 \int_a^b \langle \omega(u(t)), u'(t) \rangle \; dt + \lambda_2 \int_a^b \langle \sigma(u(t)), u'(t) \rangle \; dt = \lambda_1 \int_C \omega + \lambda_2 \int_C \sigma$$

per la bilinearità del prodotto di dualità e la linearità dell'integrale sull'intervallo. Inoltre, tenendo conto della (1.8) e usando le proprietà elementari dell'integrale sull'intervallo, abbiamo

$$\Bigl| \int_C \omega \Bigr| = \Bigl| \int_a^b \langle \omega(u(t)), u'(t) \rangle \; dt \Bigr| \le \int_a^b |\, \langle \omega(u(t)), u'(t) \rangle \,| \, dt$$
$$\le \int_a^b |\omega(u(t))| \, |u'(t)| \, dt \le \sup_{t\in[a,b]} |\omega(u(t))| \int_a^b |u'(t)| \, dt = \sup_{x\in S} |\omega(x)| \; \mathrm{lungh}\, C.$$

Per le (6.7) usiamo le notazioni della Definizione 3.12. Abbiamo

$$\int_{C_1+C_2} \omega = \int_0^2 \langle \omega(w(t)), w'(t) \rangle \; dt$$
$$= \int_0^1 \langle \omega(u(t)), u'(t) \rangle \; dt + \int_1^2 \langle \omega(v(t)), v'(t) \rangle \; dt = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega$$

ancora per l'additività dell'integrale sull'intervallo. Inoltre

$$\int_{-C_1} \omega = \int_0^1 \langle \omega(z(t)), z'(t) \rangle \; dt = \int_0^1 \langle \omega(u(1-t)), -u'(1-t) \rangle \; dt$$
$$= - \int_0^1 \langle \omega(u(s)), u'(s) \rangle \; dt = - \int_{C_1} \omega$$

di nuovo per la bilinearità del prodotto di dualità e la linearità dell'integrale sull'intervallo. □

Naturalmente la prima delle (6.6) e le (6.7) si chiamano proprietà di *linearità* e, rispettivamente, di *additività*. Notiamo che, per la seconda delle (6.7), si ottiene l'effetto di integrare su $-C$ anziché su C se nel secondo membro della (6.1) semplicemente si scambiano gli estremi di integrazione.

6.8. Esercizio. Con le notazioni dell'Esercizio 3.19, verificare che gli integrali di ω su C e su C' sono gli stessi qualunque sia la forma differenziale ω continua in un aperto che include il sostegno di C. Possiamo esprimere questo fatto in una forma suggestiva dicendo che l'integrale di una forma differenziale su un circuito C non cambia se il sostegno di C viene percorso a partire da un punto di inizio diverso ma con le stesse indicazioni di percorrenza tipiche di C.

6.9. Osservazione. Riprendiamo le Osservazioni 4.8, 4.9 e 6.4 sull'esistenza o meno della funzione τ che assegna i versori tangenti al sostegno S del cammino C e alla rappresentazione dell'integrale nella forma (6.2). Ricordiamo il Teorema 4.1 e la proprietà additiva dell'integrale. Se C è rappresentato come somma di archi C_k $(k = 1, \ldots, m)$ semplici di classe C^1, abbiamo

$$\int_C \omega = \sum_{k=1}^m \int_{C_k} \omega.$$

Ora, per C_k vale la rappresentazione (6.2), ove naturalmente deve comparire la funzione τ_k dell'Osservazione 4.9. Dunque possiamo scrivere

$$\int_C \omega = \sum_{k=1}^m \int_{C_k} \omega = \sum_{k=1}^m \int_{C_k} \langle \omega(x), \tau_k(x) \rangle \, ds \tag{6.8}$$

ove nell'ultimo membro abbiamo usato lo stesso simbolo C_k per denotare in realtà il sostegno. Per semplicità si può comunque utilizzare la notazione (6.2) per tutti i cammini, *con la convenzione che essa debba essere interpretata nella forma* (6.8) *quando* C *non è un arco semplice*. $\square$

Ora vediamo come la nozione di integrale sia legata a limiti di somme finite. Consideriamo solo il caso di cammini di classe C^1, ma il risultato vale per cammini generici.

6.10. Proposizione. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale di classe C^0 e C un cammino di Ω di classe C^1. Sia inoltre $u : [a, b] \to \Omega$ una parametrizzazione di C di classe C^1. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni scelta di punti $t_0, \ldots, t_m$ e $t_1^*, \ldots, t_m^*$ verificanti*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b \quad \text{e, per } k = 1, \ldots, m, \quad t_k^* \in [t_{k-1}, t_k] \quad \text{e} \quad t_k - t_{k-1} \le \delta \tag{6.9}$$

e posto

$$S' = \sum_{k=1}^m \langle \omega(u(t_k^*)), u'(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) \rangle \quad \text{e} \quad S'' = \sum_{k=1}^m \langle \omega(u(t_k^*)), u(t_k) - u(t_{k-1}) \rangle \tag{6.10}$$

valgano le disuguaglianze

$$\Bigl| \int_C \omega - S' \Bigr| \le \varepsilon \quad \text{e} \quad \Bigl| \int_C \omega - S'' \Bigr| \le \varepsilon. \ \square \tag{6.11}$$

Dimostrazione. Sebbene la prima delle due tesi sia sostanzialmente nota al lettore, dimostriamo il risultato completamente. Eseguiamo semplici calcoli preliminari. Per ogni scelta dei punti t_k verificanti la prima delle (6.9) abbiamo

$$\int_C \omega = \int_a^b \langle \omega(u(t)), u'(t) \rangle \, dt = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle \omega(u(t)), u'(t) \rangle \, dt \tag{6.12}$$

e, se $t_1^*, \ldots, t_m^* \in [a,b]$, abbiamo banalmente

$$\sum_{k=1}^{m} \langle \omega(u(t_k^*)), u'(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) \rangle = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle \omega(u(t_k^*)), u'(t_k^*) \rangle \, dt \tag{6.13}$$

nonché, usando in particolare le (3.2) e (1.9), l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^{m} \langle \omega(u(t_k^*)), u(t_k) - u(t_{k-1}) \rangle = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle \omega(u(t_k^*)), u'(t) \rangle \, dt. \tag{6.14}$$

Fissiamo ora $\varepsilon > 0$ ad arbitrio. Siccome le componenti ω_i di ω sono continue in Ω e u e u' sono continue in $[a,b]$, tenendo conto del Teorema di Heine vediamo che esiste $\delta > 0$ tale che le disuguaglianze

$$|\, \langle \omega(u(t)), u'(t) \rangle - \langle \omega(u(s)), u'(s) \rangle \,| \le \varepsilon \quad \text{e} \quad |\omega(u(t)) - \omega(u(s))| \le \varepsilon \tag{6.15}$$

valgano per ogni coppia di punti $t, s \in [a,b]$ verificanti $|t-s| \le \delta$. Siano ora t_k e t_k^* come nella (6.9). Allora, combinando le (6.12–13) e usando la prima delle (6.15), otteniamo

$$\begin{aligned} &\Bigl| \int_C \omega - \sum_{k=1}^{m} \langle \omega(u(t_k^*)), u'(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) \rangle \Bigr| \\ &\le \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\, \langle \omega(u(t)), u'(t) \rangle - \langle \omega(u(t_k^*)), u'(t_k^*) \rangle \,| \, dt \le \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1}) \varepsilon = \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Combinando invece le (6.12) e (6.14) e usando la seconda delle (6.15), otteniamo

$$\begin{aligned} &\Bigl| \int_C \omega - \sum_{k=1}^{m} \langle \omega(u(t_k^*)), u(t_k) - u(t_{k-1}) \rangle \Bigr| \le \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\, \langle \omega(u(t)), u'(t) \rangle - \langle \omega(u(t_k^*)), u'(t) \rangle \,| \, dt \\ &\le \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\omega(u(t)) - \omega(u(t_k^*))| \, |u'(t)| \, dt \le \varepsilon \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |u'(t)| \, dt = \varepsilon \operatorname{lungh} C. \end{aligned}$$

Siccome a, b e la lunghezza di C sono noti fin dall'inizio, la dimostrazione è completa. □

6.11. Osservazione. Interpretiamo il k-esimo contributo di ciascuna delle somme S' e S'' date dalle (6.10) supponendo per semplicità che la restrizione di u a $[t_{k-1}, t_k]$ sia iniettiva. In tal caso, al variare di t in $[t_{k-1}, t_k]$, il punto $u(t)$ descrive un arco C_k senza passare due volte in uno stesso punto e scegliere $t_k^* \in [t_{k-1}, t_k]$ equivale a scegliere un punto $x_k^* \in C_k$. Il k-esimo contributo di S' vale pertanto

$$\langle \omega(u(t_k^*)), u'(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) \rangle = \langle \omega(x_k^*), v_k \rangle$$

ove $v_k = u'(t_k^*)(t_k - t_{k-1})$ è un vettore tangente a C_k in x_k^*, precisamente un vettore tangente che è approssimativamente lungo quanto la distanza degli estremi x_{k-1} e x_k di C_k. Infatti

$$x_k - x_{k-1} = u(t_k) - u(t_{k-1}) \approx u'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) \approx u'(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) = v_k$$

se $t_k - t_{k-1}$ è piccolo. Il k-esimo contributo di S'', invece, vale esattamente

$$\langle \omega(u(t_k^*)), u(t_k) - u(t_{k-1}) \rangle = \langle \omega(x_k^*), x_k - x_{k-1} \rangle \, .$$

Si sarà notato che la somma S' della (6.10) è una comune somma di Cauchy relativa all'integrale in questione. La somma S'', invece, è nella direzione del cosiddetto *integrale di Stieltjes*, ma non vogliamo andare oltre queste parole.

7. Aperti connessi

La nozione di insieme connesso può presentare qualche aspetto piuttosto delicato. Nel caso degli aperti, invece, essa coincide con la connessione per archi e risulta molto chiara. Quindi diamo le definizioni nel caso generale ma passiamo rapidamente a considerare solo aperti.

7.1. Definizione. *Sia S un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Una sconnessione di S è una coppia (A, A') di aperti di $\mathbb{R}^n$ verificante le condizioni seguenti: $i)$ entrambi gli insiemi A e A' hanno intersezione non vuota con S; $ii)$ essi sono disgiunti; $iii)$ la loro unione include S. Il sottoinsieme S è connesso quando non esistono sconnessioni di S.* $\square$

7.2. Esempio. Verifichiamo che $[0,1]$ è connesso. Per assurdo sia (A, A') una sconnessione di $[0,1]$. Gli estremi 0 e 1 appartengono a uno dei due insiemi. Supponiamo dapprima che uno dei due, diciamo 0, appartenga ad A, e l'altro appartenga ad A' e poniamo $\lambda = \sup A$. Allora $\lambda \in (0,1)$ dato che 0 è interno ad A e 1 è interno ad A'. Ma $\lambda \in A \cup A'$. Se $\lambda \in A$, dato che A è aperto, esiste $x > \lambda$ che appartiene ad A, contro la definizione di λ. Se $\lambda \in A'$, allora esiste $\lambda' < \lambda$ tale che $(\lambda', \lambda] \subseteq A'$. Ma nessun $x > \lambda$ può appartenere ad A. Dunque $A \subseteq (-\infty, \lambda']$ e ancora la definizione di λ viene contraddetta, per cui siamo all'assurdo. Se invece 0 e 1 appartengono allo stesso dei due aperti, diciamo ad A, si ragiona analogamente sul punto $\lambda = \inf A'$ oppure su $\lambda = \sup A'$ e ancora si arriva a una contraddizione.

Più precisamente si dimostra che i connessi di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli intervalli e un esempio di sconnessione dell'insieme $(0,1] \cup [3,4]$ si ottiene prendendo $A = (0,2)$ e $A' = (2,5)$. $\square$

Siccome vogliamo solo giustificare una terminologia e non abbiamo la necessità di usarlo, il risultato seguente viene enunciato ma non dimostrato.

7.3. Teorema. *Sia S un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$. Allora esiste una e una sola partizione $\mathcal{F}$ di S verificante le condizioni seguenti: $i)$ ogni elemento di $\mathcal{F}$ è connesso; $ii)$ ogni sottoinsieme connesso di S è incluso in uno degli elementi di $\mathcal{F}$.* $\square$

7.4. Definizione. *Sia S un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$. Gli elementi della famiglia $\mathcal{F}$ data dal Teorema 7.3 si chiamano componenti connesse di S.* $\square$

Se S è connesso allora $\mathcal{F} = \{S\}$ e S è la sua unica componente connessa. Le componenti connesse dell'insieme $S = (0,1] \cup [3,4]$ considerato sopra sono invece due, precisamente gli intervalli $(0,1]$ e $[3,4]$. Infatti essi costituiscono una partizione di S, sono connessi e ogni sottoinsieme connesso di S, dovendo essere un intervallo, deve essere incluso in uno dei due precedenti.

7.5. Definizione. *Un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi quando, per ogni coppia di punti $x, y \in S$, esiste una funzione continua $u : [0,1] \to S$ tale che $u(0) = x$ e $u(1) = y$.* $\square$

Ad esempio è connesso per archi ogni sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ che sia convesso. Se $x, y \in S$, per soddisfare la definizione basta definire $u(t) = x + t(y - x)$. Più in generale S è connesso per archi non appena esso sia stellato rispetto a un suo punto x_0. Infatti, se $x, y \in S$, basta definire ora u mediante: $u(t) = x + 2t(x_0 - x)$ se $t \in [0, 1/2]$ e $u(t) = x_0 + (2t-1)(y - x_0)$ se $t \in [1/2, 1]$. Le immagini delle due restrizioni di u che intervengono nella definizione data sono infatti il segmento di estremi x e x_0 e quello di estremi x_0 e y, che risultano inclusi in S per ipotesi. $\square$

La nozione di connessione per archi è più forte di quella di connessione. Nel caso degli aperti, per i quali, diciamo, c'è una certa libertà di movimento, la situazione si semplifica e i due concetti coincidono. Non solo: valgono numerose altre caratterizzazioni della connessione e il risultato che ci accingiamo a dare ne mostra qualcuna. Tuttavia noi, in seguito, useremo prevalentemente quella concernente i cammini. In vista della costruzione di poligonali (vedi (3.3)) e di cammini di classe C^∞ premettiamo alcuni lemmi tecnici. I primi due sono però di interesse generale.

7.6. Lemma. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e K un compatto incluso in Ω. Allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq \Omega$ per ogni $x \in K$.* □

Dimostrazione. Se $\Omega = \mathbb{R}^n$ ogni $r > 0$ banalmente verifica quanto richiesto. Supponiamo dunque $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Allora $C = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ non è vuoto e possiamo introdurre la funzione $d : K \to \mathbb{R}$ definita dalla formula $d(x) = \operatorname{dist}(x, C) = \inf_{y \in C} |x - y|$. Essa è continua in quanto, come si controlla facilmente, vale la disuguaglianza $|d(x) - d(x')| \leq |x - x'|$ per ogni $x, x' \in K$. Dunque d ha minimo in un punto $x_0 \in K$. Siccome Ω è aperto e, in particolare, $x_0 \in \Omega$, esiste una palla $B_r(x_0) \subseteq \Omega$. Quindi $d(x) \geq d(x_0) \geq r$ per ogni $x \in K$, cioè $B_r(x) \subseteq \Omega$ per ogni $x \in K$. □

7.7. Lemma. *Esistono funzioni $\rho, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ verificanti*

$$\rho(t) > 0 \quad \textit{se } t \in (0,1), \qquad \rho(t) = 0 \quad \textit{se } t \notin (0,1) \quad \textit{e} \quad \int_0^1 \rho(t)\, dt = 1. \tag{7.1}$$

$$\rho(1-t) = \rho(t) \quad \textit{per ogni } t \in \mathbb{R} \tag{7.2}$$

$$r(t) = 0 \quad \textit{se } t \leq 0, \qquad r(t) = 1 \quad \textit{se } t \geq 1, \qquad r'(t) > 0 \quad \textit{se } 0 < t < 1 \tag{7.3}$$

$$r(t) + r(1-t) = 1 \quad \textit{per ogni } t \in \mathbb{R}. \tag{7.4}$$

Inoltre, per ogni $\varepsilon \in (0,1)$, esiste una funzione $R_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ verificante

$$R_\varepsilon(t) = 0 \quad \textit{se } t \leq 1 - \varepsilon, \qquad R_\varepsilon(t) = t - 1 \quad \textit{se } t \geq 1 \quad \textit{e} \quad |R_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon \quad \textit{per ogni } t \leq 1. \ \square \tag{7.5}$$

Dimostrazione. Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalle formule $\alpha(t) = \exp(-1/t)$ se $t > 0$ e $\alpha(t) = 0$ se $t \leq 0$. Essa è di classe C^∞ ed è nulla in $(-\infty, 0]$ e positiva in $(0, +\infty)$. Allora la funzione $\rho_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla formula $\rho_0(t) = \alpha(t)\alpha(1-t)$ è di classe C^∞, verifica le prime due delle (7.1) e ha integrale positivo. Si può quindi prendere $\rho = \kappa\rho_0$ ove $\kappa > 0$ è scelto in modo da soddisfare anche la terza delle (7.1). Si noti che resta garantita anche la proprietà (7.2) di simmetria. Per costruire r basta porre

$$r(t) = \int_0^t \rho(s)\, ds \quad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$

Le (7.3) sono infatti immediate. Per quanto riguarda la (7.4), abbiamo per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} r(t) + r(1-t) &= \int_0^t \rho(s)\, ds + \int_0^{1-t} \rho(s)\, ds = \int_0^t \rho(s)\, ds + \int_t^1 \rho(1-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \rho(s)\, ds + \int_t^1 \rho(\tau) d\tau = \int_0^1 \rho(s)\, ds = 1. \end{aligned}$$

Fissiamo ora $\varepsilon \in (0,1)$ e costruiamo R_ε. A partire dalla funzione r poniamo

$$r_\varepsilon(t) = r\Big(\frac{t - (1-\varepsilon)}{\varepsilon}\Big) \quad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

e osserviamo che r_ε è di classe C^∞ e che

$$r_\varepsilon(t) = 0 \quad \text{se } t \leq 1 - \varepsilon, \quad r_\varepsilon(t) = 1 \quad \text{se } t \geq 1 \quad \text{e} \quad r'_\varepsilon(t) > 0 \quad \text{se } 1 - \varepsilon < t < 1.$$

Tenendo conto di ciò e della (7.4) si deduce che

$$\begin{aligned} \int_0^1 r_\varepsilon(t)\, dt &= \int_{1-\varepsilon}^1 r_\varepsilon(t)\, dt = \varepsilon \int_0^1 r(s)\, ds = \varepsilon \int_0^{1/2} r(s)\, ds + \varepsilon \int_{1/2}^1 r(s)\, ds \\ &= \varepsilon \int_0^{1/2} r(t)\, dt + \varepsilon \int_0^{1/2} r(1-t)\, dt = \varepsilon \int_0^{1/2} \big(r(t) + r(1-t)\big)\, dt = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

A questo punto possiamo definire $R_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$R_\varepsilon(t) = \int_0^t r_\varepsilon(s)\,ds - r_\varepsilon(t) \int_0^1 r_\varepsilon(s)\,ds \quad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$

Chiaramente R_ε è di classe C^∞ e $R_\varepsilon(t) = 0$ se $t \le 1-\varepsilon$. Inoltre, se $t \ge 1$, si ha

$$R_\varepsilon(t) = \int_0^1 r_\varepsilon(s)\,ds + \int_1^t r_\varepsilon(s)\,ds - \int_0^1 r_\varepsilon(s)\,ds = \int_1^t r_\varepsilon(s)\,ds = t-1.$$

Infine, se $t \le 1$, abbiamo

$$|R_\varepsilon(t)| \le \int_0^1 r_\varepsilon(s)\,ds + r_\varepsilon(t) \int_0^1 r_\varepsilon(s)\,ds \le 2 \int_0^1 r_\varepsilon(s)\,ds = \varepsilon. \ \square$$

7.8. Lemma. *Siano $t_\pm \in \mathbb{R}$ tali che $t_- < t_+$ e $w_\pm \in \mathbb{R}^n$. Siano inoltre $x_0, x_\pm \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon \in (0,1/2)$ tali che $|x_\pm - x_0| < \varepsilon/3$. Si supponga infine che $x_+ - x_-$ e w_- siano linearmente indipendenti e che $x_+ - x_-$ e w_+ siano linearmente indipendenti. Allora esiste una funzione $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ e con derivata mai nulla tale che*

$$v(t_\pm) = x_\pm, \quad v'(t) = w_- \quad \text{per ogni } t \le t_-, \quad v'(t) = w_+ \quad \text{per ogni } t \ge t_+ \tag{7.6}$$

$$|v(t) - x_0| < \varepsilon \quad \text{per ogni } t \in [t_-, t_+]. \ \square \tag{7.7}$$

Dimostrazione. Poniamo $y_\pm = (t_+ - t_-)w_\pm$ e scegliamo $\varepsilon' > 0$ tale che $|\varepsilon' y_\pm| < \varepsilon/6$. Sia ora r, data dal Lemma 7.7, di classe C^∞ verificante le (7.3–4). Applichiamo inoltre lo stesso lemma con ε' anziché ε: otteniamo una funzione, che tuttavia chiamiamo ancora R_ε, che è di classe C^∞ e verifica le (7.5) ove ε è sostituito da ε' nell'ultima disuguaglianza. Finalmente definiamo $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mediante la formula

$$v(t) = r\big(1 - \vartheta(t)\big)\, x_- + r\big(\vartheta(t)\big)\, x_+ - R_\varepsilon\big(1 - \vartheta(t)\big)\, y_- + R_\varepsilon\big(\vartheta(t)\big)\, y_+ \quad \text{ove} \quad \vartheta(t) = \frac{t - t_-}{t_+ - t_-}\,.$$

Chiaramente v è di classe C^∞. Inoltre, se $t \le t_-$, si ha $\vartheta(t) \le 0$ e quindi $1 - \vartheta(t) \ge 1$. Segue che $v(t) = x_- + \vartheta(t)\, y_-$. Dunque $v(t_-) = x_-$ e $v'(t) = w_-$. Supponiamo ora $t \ge t_+$. Allora $\vartheta(t) \ge 1$ e quindi $1 - \vartheta(t) \le 0$. Segue che $v(t) = x_+ + \big(\vartheta(t) - 1\big)\, y_+$. Dunque $v(t_+) = x_+$ e $v'(t) = w_+$. Ciò prova le (7.6). Per verificare la (7.7) osserviamo che la (7.4) implica

$$v(t) - x_0 = r\big(1 - \vartheta(t)\big)\, (x_- - x_0) + r\big(\vartheta(t)\big)\, (x_+ - x_0) - R_\varepsilon\big(1 - \vartheta(t)\big)\, y_- + R_\varepsilon\big(\vartheta(t)\big)\, y_+$$

e ricordiamo che, se $s \in [0,1]$, si ha senz'altro $0 \le r(s) \le 1$ e $|R_\varepsilon(s)| \le \varepsilon'$. Quindi, se $t \in [t_-, t_+]$, essendo $\vartheta(t) \in [0,1]$, concludiamo che

$$|v(t) - x_0| \le |x_- - x_0| + |x_+ - x_0| + \varepsilon'\big(|y_-| + |y_+|\big) < \varepsilon.$$

Resta da verificare che $v'(t)$ non si annulla mai e, grazie alle (7.6), basta considerare il caso in cui $t \in (t_-, t_+)$. Calcoliamo $v'(t)$. Posto $\tau = t_+ - t_-$, scrivendo ϑ anziché $\vartheta(t)$ per semplificare la notazione e ricordando la (7.4), abbiamo

$$\begin{aligned} v'(t) &= -\frac{1}{\tau}\, r'(1-\vartheta)\, x_- + \frac{1}{\tau}\, r'(\vartheta)\, x_+ + \frac{1}{\tau}\, R'_\varepsilon(1-\vartheta)\, y_- + \frac{1}{\tau}\, R'_\varepsilon(\vartheta)\, y_+ \\ &= \frac{1}{\tau}\, r'(\vartheta)\, (x_+ - x_-) + R'_\varepsilon(1-\vartheta)\, w_- + R'_\varepsilon(\vartheta)\, w_+\,. \end{aligned}$$

Supponiamo ora $t_- + \varepsilon\tau \le t \le t_+ - \varepsilon\tau$. Allora $\varepsilon \le \vartheta \le 1-\varepsilon$. Segue che $r'(\vartheta) > 0$ mentre $R'_\varepsilon(1-\vartheta) = R'_\varepsilon(\vartheta) = 0$. Siccome l'ipotesi di indipendenza fatta implica $x_+ - x_- \ne 0$, concludiamo che $v'(t) \ne 0$. Supponiamo ora $t_- < t < t_- + \varepsilon\tau$. Allora $0 < \vartheta < \varepsilon < 1-\varepsilon$ per cui $r'(\vartheta) > 0$ e $R'_\varepsilon(\vartheta) = 0$. Siccome $x_+ - x_-$ e w_- sono indipendenti concludiamo che $v'(t) \ne 0$. Infine, se $t_+ - \varepsilon\tau < t < t_+$, si ragiona analogamente sfruttando l'indipendenza dei vettori $x_+ - x_-$ e w_+. $\square$

7.9. Teorema. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: i) Ω è connesso; ii) Ω è connesso per archi; iii) per ogni coppia di punti $x, y \in \Omega$ esiste un cammino di Ω avente x e y come estremi; iv) per ogni coppia di punti $x, y \in \Omega$ esistono punti $x^0, \ldots, x^m$ in numero finito verificanti $x^0 = x$, $x^m = y$ e $x^{k-1} \neq x^k$ per $k = 1, \ldots, m$ e tali che la poligonale $[x^0, \ldots, x^m]$ abbia sostegno incluso in Ω; v) per ogni coppia di punti $x, y \in \Omega$ esiste un cammino di Ω avente x e y come estremi che è anche di classe C^∞.* □

Dimostrazione. Se $n = 1$ tutto si banalizza e si ha l'equivalenza. Supponiamo dunque $n > 1$. Evidentemente la *iv*) implica *iii*) e la *iii*) implica *ii*). Allora, se verifichiamo che *ii*) implica *iv*), abbiamo l'equivalenza fra *ii*), *iii*) e *iv*). Inoltre, banalmente, la *v*) implica la *iii*). Resta allora da dimostrare che: la *ii*) implica la *iv*); la *iv*) implica la *v*); le *i*) e *ii*) sono equivalenti. Procediamo.

Supponiamo Ω connesso per archi e, dati $x, y \in \Omega$, costruiamo la poligonale di cui in *iv*). Se $x = y$ (ricordando l'Osservazione 3.6), scegliamo $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq \Omega$ e $z \in B_r(x) \setminus \{x\}$ e come poligonale prendiamo $[x, z, x]$. Supponiamo ora $x \neq y$. Siccome Ω è connesso per archi, esiste una funzione continua $u : [0, 1] \to \Omega$ tale che $u(0) = x$ e $u(1) = y$. Siccome la sua immagine K è compatta, il Lemma 7.6 fornisce $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subseteq \Omega$ per ogni $x \in K$. Ma u è uniformemente continua per il Teorema di Heine, per cui esiste $\delta > 0$ tale che $|u(t) - u(s)| < \varepsilon$ per ogni coppia di punti $t, s \in [a, b]$ verificanti $|t - s| \leq \delta$. Scelto un intero $m \geq 1/\delta$, poniamo $t_k = k/m$ e $x^k = u(t_k)$ per $k = 0, \ldots, m$. Eventualmente eliminando qualcuno dei punti x^k e rinumerando i rimanenti, ci riconduciamo al caso in cui $x^{k-1} \neq x^k$ per $k = 1, \ldots, m$, così che questi punti individuano una poligonale. Vediamo che questa verifica quanto deve verificare. Si ha $x^0 = u(0) = x$ e $x^m = u(1) = y$. Rimane da dimostrare che il punto $x_s^k = x^{k-1} + s(x^k - x^{k-1})$ appartiene a Ω per ogni $s \in [0, 1]$ e per $k = 1, \ldots, m$. Ma $|x_s^k - x^{k-1}| = s|x^k - x^{k-1}| \leq |x^k - x^{k-1}|$. D'altra parte si ha $|x^k - x^{k-1}| = |u(t_k) - u(t_{k-1})| < \varepsilon$ dato che $t_k - t_{k-1} \leq \delta$. Dunque $x_s^k \in B_\varepsilon(x^{k-1}) \subseteq \Omega$.

Supponiamo ora che valga la *iv*) e, a partire dalla poligonale dell'ipotesi, costruiamo il cammino di classe C^∞. Siano dunque $x, y \in \Omega$ e x^k, $k = 0, \ldots, m$, come in *iv*). Denotiamo con P la poligonale in questione. Se $m = 1$ essa è un segmento e ne prendiamo una parametrizzazione di classe C^∞. Sia dunque $m > 1$. Con un eventuale lavoro preliminare ci riconduciamo al caso in cui, per $k = 1, \ldots, m-1$, i due vettori non nulli $v^k = x^k - x^{k-1}$ e $v^{k+1} = x^{k+1} - x^k$ sono indipendenti. Infatti, se $v^{k+1} = cv^k$ per un certo k e una certa costante $c \in \mathbb{R}$, procediamo come segue. Se $c > 0$ sostituiamo il tratto poligonale $T = [x^{k-1}, x^k, x^{k+1}]$ nell'intera poligonale P con il segmento $[x^{k-1}, x^{k+1}]$. Se $c = -1$ sopprimiamo il tratto. Se $c < -1$, il sostegno del tratto $T = [x^{k-1}, x^k, x^{k+1}]$ coincide con quello della poligonale $[x^{k-1}, x^k, x^{k-1}, x^{k+1}]$ per cui sostituiamo T con $[x^{k-1}, x^{k+1}]$ in P. Se $c \in (-1, 0)$ ci comportiamo analogamente. Dopo questo eventuale lavoro di semplificazione, procediamo. Fissiamo una parametrizzazione $u : [a, b] \to \Omega$ di P tale che, per $k = 1, \ldots, m$, le componenti della restrizione di u a $[t_{k-1}, t_k]$ siano polinomi di primo grado. Segue che la derivata di tale restrizione è un vettore costante non nullo. L'idea è quella di modificare u solo vicino ai punti t_k per $k = 1, \ldots, m-1$ in modo da ottenere una funzione di classe C^∞, ancora con derivata non nulla. Organizziamo le cose in modo che tali modifiche possano essere fatte contemporaneamente senza che esse interferiscano fra loro creando conflitti: infatti, detto t'_k il punto medio dell'intervallo $[t_{k-1}, t_k]$ per $k = 1, \ldots, m$, per "smussare" la poligonale vicino a x^k ($k = 1, \ldots, m-1$) modifichiamo u solo in (t'_k, t'_{k+1}). Per $k = 1, \ldots, m-1$ procediamo come segue, omettendo l'indice k nelle notazioni di quanto introduciamo dato che ora k è fissato. Scegliamo $\varepsilon \in (0, 1/2)$ tale che $B_\varepsilon(x^k) \subseteq \Omega$. In corrispondenza scegliamo $\delta > 0$ tale che $|u(t) - x^k| < \varepsilon/3$ per $|t - t_k| \leq \delta$. Scegliamo $t_- \in (t'_k, t_k)$ e $t_+ \in (t_k, t'_{k+1})$ tali che $|t_\pm - t_k| \leq \delta$ e poniamo $x_\pm = u(t_\pm)$. Infine denotiamo con w_- e w_+ i due valori costanti che u' assume negli intervalli (t'_k, t_k) e (t_k, t'_{k+1}). Applichiamo il Lemma 7.8 con $x_0 = x^k$ osservando che le ipotesi di indipendenza sono soddisfatte come conseguenza dell'indipendenza dei due vettori v^k e v^{k+1} garantita sopra. Troviamo una funzione $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ con derivata mai nulla che coincide con u in ciascuno dei due intervalli (t'_k, t_-) e (t_+, t'_{k+1}). Sostituendo allora $u(t)$ con $v(t)$ per $t \in (t_-, t_+)$ abbiamo regolarizzato come desiderato in quanto il cammino così modificato ha sostegno ancora in Ω. Infatti, per $t \in (t_-, t_+)$, abbiamo $|v(t) - x^k| < \varepsilon$, da cui $v(t) \in B_\varepsilon(x^k) \subseteq \Omega$. La funzione ottenuta parametrizza dunque il cammino richiesto in v).

Supponiamo ora Ω connesso e dimostriamo che esso è connesso per archi. Per $x, y \in \Omega$, scriviamo $x \sim y$ quando esiste una funzione continua $u : [0,1] \to \Omega$ tale che $u(0) = x$ e $u(1) = y$. Si vede senza difficoltà che $\sim$ è una relazione di equivalenza in Ω e ciò che dobbiamo dimostrare è che due punti qualunque di Ω sono equivalenti. Supponiamo che ciò sia falso e fissiamo due punti $x_0, x'_0 \in \Omega$ non equivalenti fra loro. Denotiamo con A la classe di equivalenza di x_0 e poniamo $A' = \Omega \setminus A$. Chiaramente $x_0 \in A$ e $x'_0 \in A'$. Inoltre i due insiemi sono disgiunti e la loro unione è Ω. Se dimostriamo che essi sono entrambi aperti, vediamo allora che la coppia (A, A') è una sconnessione di Ω e contraddiciamo l'ipotesi di connessione. Sia $x \in A$. Siccome Ω è aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B = B_\varepsilon(x) \subseteq \Omega$. Mostriamo che $B \subseteq A$. Infatti, siccome B è un insieme convesso, ogni suo punto è equivalente al suo centro x, il quale è equivalente a x_0. Dunque ogni punto di B è equivalente a x_0 e di conseguenza appartiene ad A. Analogamente, fissati $x' \in A'$ e una palla $B' = B_{\varepsilon'}(x')$ inclusa in Ω, si vede che ogni punto di B' è equivalente a x', il quale non è equivalente a x_0. Dunque i punti di B' non sono equivalenti a x_0 e di conseguenza appartengono ad A'. Ciò mostra che anche A' è aperto e conclude la dimostrazione dell'implicazione in questione.

Supponiamo infine Ω connesso per archi e dimostriamo che Ω è connesso. Per assurdo supponiamo Ω non connesso e fissiamo una sconnessione (A, A') di Ω. Prendendo le intersezioni con Ω, che è aperto, ci riconduciamo al caso in cui A e A' sono aperti non vuoti inclusi in Ω, disgiunti e aventi Ω come unione. Fissiamo $x \in A$ e $y \in A'$. Grazie all'ipotesi di connessione per archi, esiste una funzione continua $u : [0,1] \to \Omega$ tale che $u(0) = x$ e $u(1) = y$. Poniamo $I = u^{-1}(A)$ e $I' = u^{-1}(A')$. Allora $0 \in I$, $1 \in I'$ e, per $\delta > 0$ abbastanza piccolo, abbiamo $[0, \delta) \subseteq I$ e $(1-\delta, 1] \subseteq I'$ dato che A e A' sono aperti e u è continua. Deduciamo che sono aperti anche gli insiemi $I_\delta = I \cup (-\delta, \delta)$ e $I'_\delta = I' \cup (1-\delta, 1+\delta)$, come si vede usando ancora la continuità di u e il fatto che A e A' sono aperti. Dunque (I_δ, I'_δ) è una sconnessione di $[0,1]$, in contraddizione con l'Esempio 7.2. □

7.10. Osservazione. Si dimostra senza eccessive difficoltà che le componenti connesse di un aperto di $\mathbb{R}^n$ sono anch'esse degli aperti. Per questo motivo, quando può essere utile l'ipotesi che un aperto sia connesso, la si può fare con una certa tranquillità. Infatti, capita spesso che un risultato vero in ipotesi di connessione e falso per un aperto generico si estenda in forma opportuna semplicemente considerando le componenti connesse, che pure sono aperti, questa volta connessi. Ecco un esempio. Sappiamo che una funzione differenziabile in un intervallo con derivata identicamente nulla è necessariamente costante. D'altra parte l'analogo enunciato per un generico aperto di $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ è falso. Resta invece vero per un aperto qualunque $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ il fatto che una funzione con derivata nulla è costante su ciascuna delle componenti connesse di Ω. Pertanto, nei paragrafi successivi, supporremo sempre che gli aperti di volta in volta considerati siano connessi.

8. Forme differenziali esatte

Come abbiamo anticipato, nel caso di una sola variabile sostanzialmente ogni forma differenziale è il differenziale di una funzione. Al contrario il risultato è falso in più dimensioni. In questo paragrafo discutiamo a fondo il problema.

8.1. Definizione. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale. Diciamo che ω è una forma esatta, oppure che è un differenziale esatto, quando esiste una funzione differenziabile $F : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\omega = dF$. Ogni funzione F in tali condizioni è detta primitiva di ω. Diciamo poi che ω è localmente esatta quando ogni punto di Ω ha un intorno aperto la restrizione di ω al quale è esatta. Le primitive delle restrizioni esatte di ω sono dette primitive locali di ω.* □

Se Ω è un intervallo aperto della retta, una forma differenziale ω è del tipo $f\,dx$, ove f è una funzione reale definita in Ω, e il problema dell'esattezza di ω coincide con quello di trovare una funzione $F:\Omega\to\mathbb{R}$ differenziabile tale che $F'=f$. Dunque il termine *primitiva* introdotto nella definizione precedente è sostanzialmente coerente con quello abituale: le primitive di ω sono esattamente le primitive di f. Ebbene il problema dell'esattezza si risolve nella sola ipotesi di continuità di f, che ora rileggiamo come segue: ω è una forma di classe C^0. Le primitive di ω costituiscono esattamente l'integrale indifinito di f, sono cioè tutte e sole le funzioni che si ottengono sommando costanti arbitrarie a una funzione integrale di f.

Nel caso generale la situazione è diversa, ma le considerazioni appena fatte suggeriscono di non scendere mai sotto il livello C^0 di regolarità. In questa classe e in classi più ristrette troveremo condizioni necessarie e sufficienti per l'esattezza. A proposito di regolarità, facciamo un'osservazione di carattere generale: se $k\geq 0$ è un intero e ω è di classe C^k, ogni sua (eventuale) primitiva F è di classe C^{k+1}. Infatti F è differenziabile e le sue derivate parziali prime D_iF coincidono ordinatamente con i coefficienti ω_i di ω, che sono di classe C^k.

Il motivo per cui in più variabili le forme esatte sono di tipo particolare è il seguente: trovare una primitiva F di una forma differenziale ω in Ω significa saper risolvere rispetto a F il sistema

$$\omega_i(x)=D_iF(x)\quad\text{per ogni } x\in\Omega,\quad\text{per } i=1,\dots,n \tag{8.1}$$

il quale è un sistema di n equazioni alle derivate parziali nella sola incognita F. Se $n=1$ il numero di equazioni eguaglia quello delle incognite, mentre il sistema è sovradimensionato se $n>1$. Ci si aspetta pertanto che esso *di norma non abbia soluzioni*.

8.2. Esempio. Consideriamo le forme differenziali

$$\omega(x,y)=dx+x\,dy\quad\text{e}\quad\sigma(x,y)=y\,dx+x\,dy\quad\text{per } (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

e cerchiamone primitive F attraverso la risoluzione del sistema (8.1). Nel primo caso abbiamo

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=1\quad\text{e}\quad\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x\quad\text{cioè}\quad F(x,y)=x+\varphi(y)\quad\text{e}\quad F(x,y)=xy+\psi(x)$$

per certe funzioni $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. In particolare si deve avere $F(0,y)=\varphi(y)$ e $F(0,y)=\psi(0)$ per ogni y, da cui $\varphi(y)=\psi(0)$ per ogni y. Dunque, la prima rappresentazione di F diventa $F(x,y)=x+c$ per una certa costante reale c. Ma ciò è incompatibile con la seconda. Dunque ω non ha primitive. Nel caso di σ il sistema (8.1) diventa invece

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=y\quad\text{e}\quad\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x\quad\text{cioè}\quad F(x,y)=xy+\varphi(y)\quad\text{e}\quad F(x,y)=xy+\psi(x)$$

per certe φ e ψ come sopra. Ora il confronto porta all'identità $\varphi(y)=\psi(x)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, il che significa che le due funzioni φ e ψ sono una stessa costante. Dunque σ ha primitive e queste sono tutte e sole le funzioni definite dalla formula $F(x,y)=xy+c$ con $c\in\mathbb{R}$ ad arbitrio. □

Le considerazioni e l'esempio precedenti dicono che le forme esatte sono "rare". Dunque ci si aspetta pure che esse godano di proprietà notevoli. Ecco il risultato fondamentale.

8.3. Teorema. *Siano Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e $\omega:\Omega\to(\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale di classe C^0. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti:*

i) *ω è esatta;*

ii) $\displaystyle\int_{C_1}\omega=\int_{C_2}\omega$ *per ogni coppia di cammini C_1 e C_2 di Ω aventi lo stesso primo estremo e lo stesso secondo estremo;*

iii) $\displaystyle\int_C\omega=0$ *per ogni circuito di Ω.*

Più precisamente valgono i fatti seguenti: iv) se vale la i) e F è una primitiva di ω, per ogni cammino C di Ω risulta

$$\int_C \omega = F(y) - F(x) \quad \text{ove } x \text{ è il primo estremo e } y \text{ è il secondo estremo di } C \tag{8.2}$$

v) se vale la ii) e $x_0 \in \Omega$ è fissato ad arbitrio, la formula

$$F(x) = \int_{C_x} \omega \qquad \begin{array}{l}\text{per } x \in \Omega, \text{ ove } C_x \text{ è un cammino di } \Omega \text{ avente} \\ \text{primo estremo in } x_0 \text{ e secondo estremo in } x\end{array} \tag{8.3}$$

definisce una primitiva di ω nulla in x_0. Infine: vi) due primitive qualunque di ω differiscono per una funzione costante. □

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che, per l'ipotesi di connessione e il Teorema 7.9, per ogni coppia di punti di Ω effettivamente esiste un cammino che li congiunge. Dimostriamo ora l'equivalenza fra le condizioni *ii)* e *iii)*. Valga la *ii)* e sia C un circuito di Ω. Sia $u : [0,2] \to \Omega$ una parametrizzazione di C e siano C_1 e C_2 i cammini parametrizzati dalle restrizioni di u a $[0,1]$ e a $[1,2]$ rispettivamente. Allora il secondo estremo di C_1 e il primo estremo di C_2 coincidono. Ma anche il primo estremo di C_1 e il secondo estremo di C_2 coincidono. Infatti essi sono i punti $u(0)$ e $u(2)$, cioè gli estremi di C, i quali coincidono dato che C è un circuito. Deduciamo che C_1 e $-C_2$ hanno lo stesso primo estremo e lo stesso secondo estremo. Dall'ipotesi *ii)* e dalle formule (6.7) di additività otteniamo allora

$$\int_C \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega = \int_{C_1} \omega - \int_{-C_2} \omega = 0$$

e la *iii)* è dimostrata. Supponiamo ora che valga la *iii)* e dimostriamo la *ii)*. Siano C_1 e C_2 come in *ii)*. Quindi è ben definita la somma $C = C_1 - C_2$, la quale è un circuito. Con un calcolo analogo vediamo allora che gli integrali di ω sui due circuiti hanno lo stesso valore. Ciò conclude la dimostrazione dell'equivalenza fra le condizioni *ii)* e *iii)*.

Dimostriamo ora l'equivalenza fra *i)* e *ii)* e le ultime affermazioni dell'enunciato. Precisamente dimostriamo dapprima la *iv)* e da ciò deduciamo sia che la *i)* implica la *ii)* sia la *vi)*. Supponiamo dunque, come in *iv)*, che ω sia esatta e siano F una primitiva di ω e C un cammino di Ω. Allora F è di classe C^1 e, se $u : [a,b] \to \Omega$ è una parametrizzazione di C, la composizione $F \circ u$ è di classe C^1 a tratti e quindi verifica la formula fondamentale del calcolo. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \int_C \omega &= \int_C dF = \int_a^b \langle dF(u(t)), u'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n D_i F(u(t))\, u_i'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(u(t))\, dt = F(u(b)) - F(u(a)) = F(y) - F(x) \end{aligned}$$

ove x e y sono il primo e il secondo estremo di C. Ciò prova l'affermazione *iv)*. In particolare, se vale *i)* e C_1 e C_2 sono come in *ii)*, gli integrali di ω sui due cammini hanno lo stesso valore. Ciò prova che *i)* implica *ii)*. Ma quanto abbiamo dimostrato sopra prova anche la *vi)*. Siano infatti F e G due primitive di ω. Fissato $x_0 \in \Omega$, applicando la (8.2) a F e a G, al generico punto $x \in \Omega$ e a un cammino C avente primo estremo in x_0 e secondo estremo in x, vediamo che, per ogni $x \in \Omega$, si deve avere

$$F(x) - F(x_0) = \int_C \omega = G(x) - G(x_0) \quad \text{da cui} \quad F(x) - G(x) = F(x_0) - G(x_0).$$

Dunque la differenza $F - G$ è la costante $F(x_0) - G(x_0)$.

Per concludere la dimostrazione basta provare la $v)$. Ciò, infatti, dimostra in particolare anche che $ii)$ implica $i)$. Valga dunque la $ii)$ e verifichiamo che la formula (8.3) definisce una primitiva di ω nulla in x_0. Innanzi tutto la (8.3) ha senso grazie all'ipotesi $ii)$. Fissiamo $x \in \Omega$ e dimostriamo che F è differenziabile in x e che $dF(x) = \omega(x)$, cioè che $F(x+h) - F(x) - \langle \omega(x), h \rangle = o(|h|)$ per $h \to 0$. Fissiamo anche un cammino C_x di Ω avente x_0 come primo estremo e x come secondo estremo e una palla $B_r(x) \subseteq \Omega$. Allora, per $0 < |h| < r$, il cammino $C_x + [x, x+h]$ è ben definito, è un cammino di Ω e i suoi estremi sono ordinatamente x_0 e $x+h$. Pertanto esso può essere usato per calcolare $F(x+h)$. Grazie all'additività dell'integrale abbiamo dunque

$$F(x+h) - F(x) = \int_{C_x + [x,x+h]} \omega - \int_{C_x} \omega = \int_{C_x} \omega + \int_{[x,x+h]} \omega - \int_{C_x} \omega = \int_{[x,x+h]} \omega.$$

Scegliendo la parametrizzazione standard di $[x, x+h]$ otteniamo allora

$$F(x+h) - F(x) - \langle \omega(x), h \rangle = \int_0^1 \langle \omega(x+th), h \rangle \, dt - \int_0^1 \langle \omega(x), h \rangle \, dt = \int_0^1 \langle \omega(x+th) - \omega(x), h \rangle \, dt$$

e ora dimostriamo che l'ultimo membro è $o(|h|)$ per $h \to 0$. Esso, per $h \neq 0$, si scrive come

$$|h| \, q(h) \quad \text{ove} \quad q(h) = \int_0^1 \langle \omega(x+th) - \omega(x), h/|h| \rangle \, dt$$

per cui occorre dimostrare che q è un infinitesimo. Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, sia $\delta \in (0, r)$ tale che $|\omega(y) - \omega(x)| \leq \varepsilon$ per ogni $y \in B_\delta(x)$. Se $|h| < \delta$ abbiamo allora $x + th \in B_\delta(x)$ per ogni $t \in [0,1]$ e quindi $|\omega(x+th) - \omega(x)| \leq \varepsilon$ per ogni $t \in [0,1]$. Abbiamo pertanto

$$|q(h)| \leq \int_0^1 \bigl| \langle \omega(x+th) - \omega(x), h/|h| \rangle \bigr| \, dt \leq \int_0^1 \bigl| \omega(x+th) - \omega(x) \bigr| \, \bigl| h/|h| \bigr| \, dt \leq \int_0^1 \varepsilon \, dt = \varepsilon.$$

Infine verifichiamo che $F(x_0) = 0$ Questo fatto, apparentemente ovvio, va dimostrato in quanto non esistono cammini aventi sostegno ridotto al solo x_0. Tuttavia non ci sono problemi: scelti $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subseteq \Omega$ e $x' \in B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$, possiamo prendere $C_x = [x_0, x', x_0]$. Abbiamo

$$F(x_0) = \int_{[x_0, x', x_0]} \omega = \int_{[x_0, x']} \omega + \int_{[x', x_0]} \omega = 0$$

in quanto $[x', x_0] = -[x_0, x']$. Ciò conclude la dimostrazione. □

8.4. Esercizio. Si dia una dimostrazione alternativa di $v)$ adattando quella data in modo da seguire la traccia indicata. Si dimostri che, per ogni $x \in \Omega$, esiste la derivata parziale $D_i F(x)$ e che questa vale $\omega_i(x)$. Si deduca direttamente che F è di classe C^1 e si concluda.

8.5. Osservazione. Il teorema precedente, di grandissimo interesse teorico, è utile dal punto di vista operativo solo in alcune delle sue parti. Precisamente, *se si sa già che* ω *è esatta*, allora si sa anche che vale la $ii)$ e quindi, per calcolare una primitiva, si può applicare la $v)$ scegliendo il cammino C_x in dipendenza da x nel modo più conveniente di volta in volta. A questo proposito facciamo qualche osservazione: $i)$ la (8.3) fornisce *la* primitiva, che è unica per l'ultimo punto del teorema, che si annulla in x_0; $ii)$ nella (8.3), per $x \neq x_0$ vicino a x_0, possiamo prendere $C_x = [x_0, x]$, il che ci consente poi di eliminare la restrizione $x \neq x_0$ grazie alla convenzione dell'Esempio 6.5 e ottenere $F(x_0) = 0$; $iii)$ se Ω è stellato rispetto a x_0, la scelta $C_x = [x_0, x]$

è lecita per ogni $x \in \Omega$; *iv*) supponendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $x_0 = (0,0)$ solo per non introdurre notazioni complicate, se per ogni $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ (inizialmente con $x_i \neq 0$ per $i = 1, 2$, poi si può abbandonare questa restrizione) è un cammino di Ω la poligonale $[(0,0), (x_1, 0), (x_1, x_2)]$, si può prendere questa come C_x. Tuttavia le situazioni particolari possono suggerire scelte diverse. Ad esempio, se ω è una forma differenziale in $\mathbb{R}^2$ con evidente simmetria circolare, si può pensare di prendere cammini che si descrivono agevolmente in coordinate polari attraverso condizioni del tipo $\rho = \text{costante}$ e $\vartheta = \text{costante}$. Inoltre si può anche cercare di risolvere il sistema (8.1), come abbiamo fatto nell'Esempio 8.2. Però ribadiamo: tutto ciò a patto di sapere già dell'esattezza per evitare un calcolo senza sbocco (come il primo dell'Esempio 8.2). Osserviamo infine che l'indipendenza dell'integrale dal cammino specificata nella condizione *ii*) suggerisce la notazione

$$\int_{x_0}^{x} \omega \quad \text{in sostituzione del secondo membro della (8.3)} \tag{8.4}$$

che nel caso $n = 1$ e $\omega(x) = f(x)\,dx$ diventa $\int_{x_0}^{x} f(y)\,dy$ e fornisce la funzione integrale.

8.6. Esercizio. Le seguenti forme differenziali in $\mathbb{R}^3$

$$z\,dx + x\,dz, \quad y\,dx + x\,dy + z\,dz \quad \text{e} \quad yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

sono esatte. Calcolare le loro primitive che si annullano nell'origine seguendo, secondo le indicazioni dell'Osservazione 8.5, le varie vie possibili e confrontando i risultati ottenuti. Analogamente procedere con la forma $(x\,dx + y\,dy)/(x^2+y^2)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che presenta una simmetria circolare. □

Benché il Teorema 8.3 sia completamente esauriente, presentiamo come complemento altre condizioni equivalenti all'esattezza. Le riuniamo nel teorema enunciato di seguito. Invitiamo il lettore a meditare sul caso $n = 1$, anche se poco significativo, ricordando gli Esercizi 4.4 e 4.5.

8.7. Teorema. *Siano Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale di classe C^0. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti:*

i) *ω è esatta;*

ii) $\displaystyle\int_P \omega = 0$ *per ogni poligonale chiusa P di Ω;*

iii) $\displaystyle\int_P \omega = 0$ *per ogni poligonale chiusa semplice P di Ω;*

iv) $\displaystyle\int_C \omega = 0$ *per ogni circuito semplice C di Ω.* □

Dimostrazione. L'equivalenza fra *i*) e *ii*) è una sorta di versione molto ridotta dell'enunciato del Teorema 8.3 in cui il termine "cammino" è sostituito dal termine "poligonale". Se si riprende l'intera dimostrazione del teorema citato e si effettua in ogni occorrenza la stessa sostituzione, si vede che si ottiene la dimostrazione dell'equivalenza delle prime due condizioni del presente enunciato (e naturalmente anche molto altro). Osserviamo ora che la *i*) implica la *iv*) per il Teorema 8.3 e che, banalmente, la *ii*) implica la *iii*) e la *iv*) implica la *iii*). Per concludere basta allora provare che la *iii*) implica la *ii*). Assumiamo dunque la *iii*) e dimostriamo la *ii*). Procediamo per induzione sul numero di vertici delle poligonali della nostra tesi. Sia $P = [x^0, \ldots, x^m]$ una poligonale chiusa di Ω. Allora $m \geq 2$, per cui $m = 2$ è il valore di innesco del procedimento ricorsivo. Sia dunque $P = [x, y, x]$ con $x \neq y$. Abbiamo allora

$$\int_P \omega = \int_{[x,y]} \omega + \int_{[y,x]} \omega = \int_{[x,y]} \omega + \int_{-[x,y]} \omega = \int_{[x,y]} \omega - \int_{[x,y]} \omega = 0\,. \tag{8.5}$$

Sia ora $m > 2$. Dimostriamo che $\int_P \omega = 0$ per ogni poligonale chiusa $P = [x^0, \dots, x^m]$ di Ω assumendo come ipotesi di induzione che risulti $\int_{P'} \omega = 0$ per ogni poligonale chiusa $P' = [y^0, \dots, y^k]$ di Ω con $k < m$. Sia dunque $P = [x^0, \dots, x^m]$ una poligonale chiusa di Ω. Se P è semplice allora $\int_P \omega = 0$ per l'ipotesi *iii)*. Supponiamo allora che P non sia semplice. Per comodità, prendiamo la parametrizzazione $u : [0, L] \to \Omega$ di P per lunghezza d'arco. Siano $s_0, \dots, s_m \in [0, L]$ verificanti $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = L$ e $u(s_k) = x^k$ per $k = 0, \dots, m$. Per $k = 1, \dots, m$ poniamo $u_k = u|_{[s_{k-1}, s_k]}$ e $\ell_k = s_k - s_{k-1} = |x^k - x^{k-1}|$, per cui $u_k(s) = x^{k-1} + (s - s_k)\ell_k^{-1}(x^k - x^{k-1})$ per $s \in [s_{k-1}, s_k]$. Siccome P è chiusa e non semplice, esistono due punti $a, b \in [0, L]$ con $a < b$ tali che $u(a) = u(b)$ e non verificanti contemporaneamente le due uguaglianze $a = 0$ e $b = L$. Siccome ciascuna delle funzioni u_k è iniettiva, a e b non possono appartenere a uno stesso degli intervalli $[s_{k-1}, s_k]$.

Supponiamo dapprima che a e b appartengano a due consecutivi di tali intervalli, cioè che risulti $s_{k-1} \le a \le s_k \le b \le s_{k+1}$ per un certo k verificante $0 < k < m$. Per quanto detto sopra, nessuno dei due punti a e b può essere s_k, per cui $a < s_k < b$ e il vettore $v^k = x^k - u(a) = x^k - u(b)$ non è nullo. Deduciamo che $x^k - x^{k\pm 1} = c_\pm v^k$ per certi $c_\pm > 0$, da cui $x^k - x^{k+1} = c(x^k - x^{k-1})$ per un certo $c > 0$, e deve necessariamente essere $c = \ell_{k+1}/\ell_k$. Supponiamo ora $\ell_{k+1} = \ell_k$. Allora $x^{k-1} = x^{k+1}$ e possiamo scrivere

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \text{ ove } P_1 = [x^0, \dots, x^{k-1}], \ P_2 = [x^{k-1}, x^k, x^{k+1}] \text{ e } P_3 = [x^{k+1}, \dots, x^m] \tag{8.6}$$

con la convenzione di ignorare P_1 e P_3 rispettivamente nei casi estremi $k = 1$ e $k = m - 1$. Siccome questi sono anche più semplici, supponiamo $1 < k < m - 1$ e osserviamo che $P_1 + P_3$ è una poligonale ben definita in quanto $x^{k-1} = x^{k+1}$. Abbiamo allora

$$\int_P \omega = \int_{P_1} \omega + \int_{P_2} \omega + \int_{P_3} \omega = \int_{P_1 + P_3} \omega + \int_{P_2} \omega \,. \tag{8.7}$$

Ora (come per la (8.5)) l'ultimo integrale è nullo in quanto $x^{k-1} = x^{k+1}$. Ma anche il penultimo lo è, grazie all'ipotesi di induzione. Abbiamo infatti $P_1 + P_3 = [y^0, \dots, y^{m-2}]$ ove $y^i = x^i$ se $0 \le i < k$ e $y^i = x^{i+2}$ se $k \le i \le m - 2$. Se invece $\ell_{k+1} \ne \ell_k$ la situazione è leggermente più complessa. Supponiamo $\ell_k < \ell_{k+1}$ (l'altro caso è analogo). Allora il punto $s'_k = s_k + \ell_k$ appartiene a (s_k, s_{k+1}) e verifica $u(s'_k) = x^{k-1}$. Ne deriva che possiamo scrivere

$$P = [x^0, \dots, x^{k-1}] + [x^{k-1}, x^k, x^{k-1}] + [x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^m]$$

e si verifica una situazione analoga alla precedente. Con analoga notazione, la differenza è che ora $P_1 + P_3$ si scive in una forma del tipo $[y^0, \dots, y^{m-1}]$ anziché $[y^0, \dots, y^{m-2}]$, ma ciò basta ancora per sfrutture l'ipotesi di induzione. Ciò conclude l'esame del caso in cui a e b appartengano a due consecutivi degli intervalli $[s_{k-1}, s_k]$.

Nel caso opposto abbiamo $s_{i-1} \le a \le s_i < s_j \le b \le s_{j+1}$ con $0 < i < j < m$. Allora non avviene più necessariamente che la poligonale si ripieghi su se stessa, dato che può presentarsi il caso di un intreccio. Tuttavia, dal punto di vista tecnico, la dimostrazione ricalca quella svolta finora e possiamo procedere più speditamente. Introduciamo il vertice aggiuntivo $x^* = u(a) = u(b)$, che può coincidere o meno con uno dei vertici di P, e decomponiamo l'integrale in una forma analoga alle (8.6) e (8.7). Il caso peggiore è quello che massimizza il numero di vertici, cioè quello in cui x^* è diverso dai vertici x^k con $k = i - 1, i, j, j + 1$. In tali condizioni, con notazioni analoghe a quelle usate sopra, abbiamo

$$P_2 = [x^*, x^i, \dots, x^j, x^*] \quad \text{e} \quad P_1 + P_3 = [x^0, \dots, x^{i-1}, x^*, x^{j+1}, \dots, x^m]$$

e possiamo scrivere tali poligonali nelle forme $P_2 = [y^0, \dots, y^{j-i}]$ e $P_1 + P_3 = [z^0, \dots, z^{i+m-j}]$. Chiaramente $j - i < m$. Ma abbiamo anche $i + m - j < m$ dato che $i < j$. Dunque, anche in questo caso, possiamo usare l'ipotesi di induzione e concludere. □

9. Forme differenziali chiuse

L'Osservazione 8.5 mette in particolare rilievo l'importanza di sapere già dell'esattezza della forma differenziale in esame. Dunque è essenziale riuscire a dare condizioni sufficienti. Partiamo da una condizione necessaria. Useremo in genere notazioni brevi per le derivate.

9.1. Definizione. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale di classe C^1. Diciamo che ω è chiusa quando*

$$D_i\omega_j(x) = D_j\omega_i(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega \text{ e per } i,j = 1,\dots,n\,. \ \square \tag{9.1}$$

9.2. Teorema. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale di classe C^1. Se ω è esatta, allora ω è chiusa.* $\square$

Dimostrazione. Sia F sia una primitiva di ω. Siccome ω è di classe C^1, si ha che F è di classe C^2. Allora possiamo applicare il Teorema di Schwarz e dedurre che $D_iD_jF = D_jD_iF$ per ogni $i,j = 1,\dots,n$. In termini di ω ciò significa appunto $D_i\omega_j = D_j\omega_i$. $\square$

Nasce spontaneamente la domanda: *è vero che ogni forma chiusa è esatta?* Ebbene la risposta è in generale *negativa*. Per studiare compiutamente il problema introduciamo un nuovo concetto.

9.3. Definizione. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$. Un'omotopia a valori in Ω, brevemente una Ω-omotopia, è un'applicazione $H : R \to \Omega$ verificante le condizioni seguenti:*

i) il dominio R di H è un rettangolo compatto $[a,b] \times [c,d]$ di $\mathbb{R}^2$; (9.2)

ii) la funzione H è continua; (9.3)

iii) si ha $H(a,\lambda) = H(b,\lambda)$ per ogni $\lambda \in [c,d]$. (9.4)

Se C_0 e C_1 sono due circuiti di Ω, diciamo che l'omotopia H è un'omotopia da C_0 a C_1 quando le due funzioni $H(\,\cdot\,,c)$ e $H(\,\cdot\,,d)$ sono parametrizzazioni di C_0 e di C_1 rispettivamente. Diciamo infine che i due circuiti sono Ω-omotopi quando esiste una Ω-omotopia da C_0 a C_1. $\square$

Il concetto di omotopia è importante nella Topologia algebrica. Segnaliamo che, di solito, esso viene dato in una forma un po' diversa, ma su questo punto ritorniamo successivamente. Notiamo invece subito che, come nel caso di un cammino possiamo prefissare ad arbitrio il dominio di una sua parametrizzazione, così possiamo prefissare il rettangolo R dominio dell'omotopia. Questa osservazione può essere utile in varie situazioni, ad esempio, per verificare che

l'omotopia rispetto a Ω è una relazione di equivalenza nell'insieme dei circuiti di Ω. (9.5)

Lasciamo questo controllo al lettore: ad esempio la transitività è l'esercizio successivo.

9.4. Esercizio. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e C_i, $i = 1,2,3$, tre circuiti di Ω. Siano inoltre $H_1 : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ e $H_2 : [0,1] \times [1,2] \to \Omega$ due Ω-omotopie da C_1 a C_2 e da C_2 a C_3 rispettivamente. Si definisca $H : [0,1] \times [0,2] \to \Omega$ mediante le formule

$$H(t,\lambda) = H_1(t,\lambda) \quad \text{se } (t,\lambda) \in [0,1] \times [0,1] \quad \text{e} \quad H(t,\lambda) = H_2(t,\lambda) \quad \text{se } (t,\lambda) \in [0,1] \times (1,2]\,.$$

Si dimostri che H è una Ω-omotopia da C_1 a C_3.

9.5. Osservazione. Notiamo che se $H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ è una Ω-omotopia tale che, per ogni $\lambda \in [0,1]$, la funzione $H(\,\cdot\,,\lambda)$ è la parametrizzazione di un cammino C_λ (il che non è sempre vero dato che H è solo continua), allora C_λ è un circuito di Ω per la proprietà (9.4) che "si muove con continuità" passando da C_0 a C_1. Precisiamo questo fatto. Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, grazie alla continuità uniforme di H data dal Teorema di Heine, esiste $\delta > 0$ tale che $|H(t,\lambda) - H(s,\mu)| \le \varepsilon$ per ogni coppia di punti $(t,\lambda), (s,\mu) \in [a,b] \times [0,1]$ che distano al più δ. In particolare

$$|H(t,\lambda) - H(t,\mu)| \le \varepsilon \quad \text{per ogni } t \in [a,b] \text{ se } |\lambda - \mu| \le \delta .$$

Ciò dice che, se $|\lambda - \mu| \le \delta$, il punto mobile $H(t,\lambda)$ e il punto mobile $H(t,\mu)$ restano a distanza $\le \varepsilon$ per ogni $t \in [a,b]$. In particolare si deduce la convergenza uniforme

$$\lim_{\lambda\to\mu} \sup_{t\in[a,b]} |H(t,\lambda) - H(t,\mu)| = 0.$$

9.6. Esercizio. Con le notazioni dell'Esercizio 3.19, costruire un'omotopia da C a C' avente come immagine il sostegno di C.

9.7. Esercizio. Riprendendo la costruzione della poligonale fatta nella dimostrazione del Teorema 7.9, dimostrare che ogni circuito di Ω è Ω-omotopo a una poligonale chiusa. □

Il risultato che intendiamo presentare, che lega chiusura, esattezza locale e omotopia, necessita di un lemma piuttosto complicato dal punto di vista tecnico. Scriviamo ∂_t anziché $\partial/\partial t$.

9.8. Lemma. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, C_0 e C_1 due circuiti di Ω e $H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ una Ω-omotopia da C_0 a C_1. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una Ω-omotopia $H^* : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ di classe C^∞ tale che*

$$|H^*(t,\lambda) - H(t,\lambda)| \le \varepsilon \quad \textit{per ogni } (t,\lambda) \in [a,b] \times [0,1] \tag{9.6}$$

$$\int_a^b |\partial_t H^*(t,\lambda) - \partial_t H(t,\lambda)|\, dt \le \varepsilon \quad \textit{per } \lambda = 0 \textit{ e } \lambda = 1. \;\square \tag{9.7}$$

Dimostrazione. Poniamo per comodità $u_\lambda = H(\,\cdot\,,\lambda)$ per $\lambda = 0,1$, così che u_0 parametrizza C_0 e u_1 parametrizza C_1. Fissiamo i punti intermedi in accordo con la Definizione 3.3 osservando che possiamo prendere gli stessi punti $t_0, \dots, t_m$ relativamente a u_0 e a u_1. Allora esiste M tale che

$$|u_\lambda'(t)| \le M \quad \text{per } \lambda = 0,1 \text{ e per ogni } t \in [a,b] \text{ diverso dai } t_k . \tag{9.8}$$

Osservato poi che l'immagine di H è un compatto incluso in Ω, applichiamo il Lemma 7.6, il quale ci fornisce un numero $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq \Omega$ per ogni x dell'immagine di H, cioè della forma $x = H(t,\lambda)$ con $(t,\lambda) \in [a,b] \times [0,1]$. Fissiamo ora $\varepsilon > 0$ e costruiamo H^*. Non è restrittivo supporre $\varepsilon < r$. Allora vediamo che ogni funzione H^* verificante la (9.6) assume automaticamente valori in Ω. Dunque non ci preoccupiamo più di questo fatto e cerchiamo solo di costruire una $\mathbb{R}^n$-omotopia da C_0 a C_1 che verifichi le (9.6–7). Siccome H è continua e le restrizioni di u_0 e di u_1 agli intervalli $[t_{k-1}, t_k]$ sono di classe C^1, per il Teorema di Heine esiste $\eta > 0$ tale che

$$|H(t,\lambda) - H(t',\lambda')| \le \varepsilon, \quad |u_0'(t) - u_0'(s)| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{e} \quad |u_1'(t) - u_1'(s)| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

non appena $t,t' \in [a,b]$ e $\lambda,\lambda' \in [0,1]$ verificano $|t - t'| \le \eta$ e $|\lambda - \lambda'| \le \eta$ e i punti t,s appartengono a uno stesso degli intervalli (t_{k-1}, t_k) e verificano $|t - s| \le \eta$. Scegliamo $\delta > 0$ in modo che siano soddisfatte tutte le disuguaglianze

$$2\delta < 1, \quad 2\delta \le \eta, \quad 3\delta < t_k - t_{k-1} \quad \text{per } k = 1,\dots,m, \quad 12\, mM\delta \le \varepsilon$$

e a partire da tale δ costruiamo una leggera deformazione H_0 di H. Le funzioni ausiliarie che ora introduciamo sono approssimazioni delle funzioni $t \mapsto \min\{t,b\}$ e $\lambda \mapsto \min\{\lambda,1\}$. Definiamo dunque $\varphi : [a,+\infty) \to [a,b]$, $\psi : [0,+\infty) \to [0,1]$ e $H_0 : [a,+\infty) \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) = a \quad \text{se } a \le t \le a+\delta, \quad \varphi(t) = a + 2(t-(a+\delta)) \quad \text{se } a+\delta \le t \le a+2\delta \\
&\qquad \varphi(t) = t \quad \text{se } a+2\delta \le t \le b, \quad \varphi(t) = b \quad \text{se } t \ge b \\
&\psi(\lambda) = 0 \quad \text{se } 0 \le \lambda \le \delta, \quad \psi(\lambda) = 2(\lambda-\delta) \quad \text{se } \delta \le \lambda \le 2\delta \\
&\qquad \psi(\lambda) = \lambda \quad \text{se } 2\delta \le \lambda \le 1, \quad \psi(\lambda) = 1 \quad \text{se } \lambda \ge 1 \\
&H_0(t,\lambda) = H(\varphi(t),\psi(\lambda)) \quad \text{per } (t,\lambda) \in [a,+\infty) \times [0,+\infty).
\end{aligned}$$

Fissiamo infine una funzione $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ verificante le (7.1). Preparato tutto il materiale necessario definiamo finalmente $H^* : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$H^*(t,\lambda) = \int_{[0,1]^2} H_0(t+\delta s, \lambda+\delta r)\,\rho(s)\,\rho(r)\,ds\,dr \quad \text{per } (t,\lambda) \in [a,b] \times [0,1] \tag{9.9}$$

e dimostriamo che H^* verifica tutte le proprietà richieste. Per controllare la regolarità C^∞ presentiamo H^* in una forma diversa. Per $(t,\lambda) \in [a,b] \times [0,1]$ risulta

$$\begin{aligned}
H^*(t,\lambda) &= \frac{1}{\delta^2} \int_{[t,t+\delta]\times[\lambda,\lambda+\delta]} H_0(s',r')\,\rho\Big(\frac{s'-t}{\delta}\Big)\,\rho\Big(\frac{r'-\lambda}{\delta}\Big)\,ds'\,dr' \\
&= \frac{1}{\delta^2} \int_{[a,b+\delta]\times[0,1+\delta]} H_0(s',r')\,\rho\Big(\frac{s'-t}{\delta}\Big)\,\rho\Big(\frac{r'-\lambda}{\delta}\Big)\,ds'\,dr'.
\end{aligned}$$

Ma la funzione integranda dell'ultimo membro è continua con le derivate parziali di tutti gli ordini rispetto alle variabili t e λ, per cui si applica la teoria degli integrali dipendenti da parametri (continuità e derivazione sotto il segno di integrale iterata).

Il prossimo passo è la verifica dell'uguaglianza $H^*(a,\lambda) = H^*(b,\lambda)$ per ogni $\lambda \in [0,1]$. Ciò viene dalla correzione di H mediante la funzione φ nella costruzione di H_0. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $s \in [0,1]$, essendo $a+\delta s \in [a,a+\delta]$ e $b+\delta s \ge b$, si ha $\varphi(a+\delta s) = a$ e $\varphi(b+\delta s) = b$, per cui $H_0(a,\lambda) = H(a,\psi(\lambda))$ e $H_0(b,\lambda) = H(b,\psi(\lambda))$. D'altra parte $H(a,\lambda') = H(b,\lambda')$ per ogni $\lambda' \in [0,1]$ dato che H è un'omotopia. Segue che le funzioni integrande degli integrali (9.9) con $t=a$ e $t=b$ sono le stesse e quindi che vale l'identità desiderata.

Passiamo alla verifica delle disuguaglianze (9.6–7) partendo dalla prima. Si vede facilmente che valgono le disuguaglianze

$$|\varphi(t')-t| \le 2\delta \le \eta \quad \text{se } |t'-t| \le \delta \quad \text{e} \quad |\psi(\lambda')-\lambda| \le 2\delta \le \eta \quad \text{se } |\lambda'-\lambda| \le \delta.$$

Ciò vale, in particolare, per le scelte $t' = t+\delta s$ e $\lambda' = \lambda+\delta r$ con $s,r \in [0,1]$. Quindi

$$|H_0(t+\delta s,\lambda+\delta r) - H(t,\lambda)| \le \varepsilon \quad \text{per ogni } t \in [a,b],\ \lambda \in [0,1],\ s \in [0,1] \text{ e } r \in [0,1].$$

Ora osserviamo che, grazie alle proprietà di ρ, abbiamo

$$H(t,\lambda) = H(t,\lambda) \int_{[0,1]^2} \rho(s)\,\rho(r)\,ds\,dr = \int_{[0,1]^2} H(t,\lambda)\,\rho(s)\,\rho(r)\,ds\,dr.$$

Segue immediatamente che

$$
\begin{aligned}
|H^*(t,\lambda) - H(t,\lambda)| &= \left| \int_{[0,1]^2} \Big(H_0(t+\delta s, \lambda+\delta r) - H(t,\lambda) \Big) \, \rho(s)\, \rho(r)\, ds\, dr \right| \\
&\le \int_{[0,1]^2} |H_0(t+\delta s, \lambda+\delta r) - H(t,\lambda)| \, \rho(s)\, \rho(r)\, ds\, dr \le \varepsilon \int_{[0,1]^2} \rho(s)\, \rho(r)\, ds\, dr = \varepsilon .
\end{aligned}
$$

L'ultima verifica riguarda la (9.7). Dobbiamo calcolare $\partial_t H^*(t,\lambda)$ per $\lambda = 0, 1$. Innanzi tutto scriviamo la formula che fornisce le funzioni da derivare in una forma più adatta allo scopo. Notato che $\delta r \in [0,\delta]$ se $r \in [0,1]$, per cui $\psi(\delta r) = 0$, abbiamo per $t \in [a,b]$

$$
\begin{aligned}
H^*(t,0) &= \int_{[0,1]^2} H(\varphi(t+\delta s), \psi(\delta r))\, \rho(s)\, \rho(r)\, ds\, dr = \int_{[0,1]^2} H(\varphi(t+\delta s), 0)\, \rho(s)\, \rho(r)\, ds\, dr \\
&= \int_0^1 \rho(r)\, dr \int_0^1 H(\varphi(t+\delta s), 0)\, \rho(s)\, ds = \int_0^1 u_0(\varphi(t+\delta s))\, \rho(s)\, ds
\end{aligned}
$$

e la formula analoga vale per $\lambda = 1$, in quanto $1 + \delta r \ge 1$ se $r \in [0,1]$, per cui $\psi(1+\delta r) = 1$. Ora, se u_0 e u_1 fossero di classe C^1, si potrebbe derivare sotto il segno di integrale e ottenere

$$
\partial_t H^*(t,\lambda) = \int_0^1 u'_\lambda(\varphi(t+\delta s))\, \varphi'(t+\delta s)\, \rho(s)\, ds \quad \text{per } t \in [a,b] \text{ e } \lambda = 0, 1 . \tag{9.10}
$$

Per aggirare l'ostacolo effettuiamo la sostituzione $s = (s'-t)/\delta$ in modo da spostare la variabile t dentro la funzione regolare ρ. Aggiustiamo poi gli estremi di integrazione usando le proprietà di annullamento di ρ. Quindi deriviamo sotto il segno di integrale e integriamo per parti, il che è lecito per funzioni di classe C^1 a tratti. Naturalmente le derivate di u_λ e di φ non sono definite in tutti i punti, ma ciò non ha conseguenze dato che si sta integrando. Abbiamo

$$
\begin{aligned}
\partial_t H^*(t,\lambda) &= \frac{d}{dt} \int_0^1 u_\lambda(\varphi(t+\delta s))\, \rho(s)\, ds = \frac{d}{dt}\, \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} u_\lambda(\varphi(s'))\, \rho\Big(\frac{s'-t}{\delta}\Big)\, ds' \\
&= \frac{1}{\delta}\, \frac{d}{dt} \int_a^{b+\delta} u_\lambda(\varphi(s'))\, \rho\Big(\frac{s'-t}{\delta}\Big)\, ds' = -\frac{1}{\delta^2} \int_a^{b+\delta} u_\lambda(\varphi(s'))\, \rho'\Big(\frac{s'-t}{\delta}\Big)\, ds' \\
&= \frac{1}{\delta} \int_a^{b+\delta} u'_\lambda(\varphi(s'))\, \varphi'(s')\, \rho\Big(\frac{s'-t}{\delta}\Big)\, ds' = \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} u'_\lambda(\varphi(s'))\, \varphi'(s')\, \rho\Big(\frac{s'-t}{\delta}\Big)\, ds'
\end{aligned}
$$

e con la sostituzione inversa $s' = t + \delta s$ otteniamo la (9.10). Abbiamo allora

$$
\partial_t H^*(t,\lambda) - u'_\lambda(t) = \int_0^1 \Big(u'_\lambda(\varphi(t+\delta s))\, \varphi'(t+\delta s) - u'_\lambda(t) \Big)\, \rho(s)\, ds = \int_0^1 f_\lambda(t,s)\, \rho(s)\, ds \tag{9.11}
$$

con ovvia definizione di $f_\lambda(t,s)$. Per valutare il primo membro stimiamo dapprima $f_\lambda(t,s)$. Resta inteso che $s \in [0,1]$ mentre per t distinguiamo vari casi. Ancora ci saranno punti eccezionali in cui qualche derivata non esiste, ma ciò non ha conseguenze dato che poi integreremo. Ricordata la (9.8) e osservato che $0 \le \varphi'(\tau) \le 2$ per ogni $\tau \ge a$ (diverso da $a+\delta$, $a+2\delta$ e b), abbiamo $|f_\lambda(t,s)| \le 3M$ se $a < t < a+2\delta$. Sia ora $a + 2\delta < t < t_1 - \delta$. Allora $\varphi(t+\delta s) = t + \delta s$. Inoltre entrambi i punti t e $t+\delta s$ appartengono a (t_0, t_1) e distano al massimo $\delta \le \eta$. Deduciamo che $|f_\lambda(t,s)| = |u'_\lambda(\varphi(t+\delta s)) - u'_\lambda(t)| \le \varepsilon/(2(b-a))$. La stessa disuguaglianza vale inoltre per $t \in (t_k - \delta, t_k)$ con $k > 1$ grazie a un ragionamento identico. Supponiamo ora $t \in (t_{k-1}, t_{k-1} + \delta)$

con $k>1$. Allora $|f_\lambda(t,s)| \le 2M$. Stimato così il modulo di f_λ, prendiamo il modulo nella (9.11) e maggioriamo (abbondando per semplificare). Siccome $\rho \ge 0$ e $\int_0^1 \rho(s)\,ds = 1$, concludiamo che

$$|\partial_t H^*(t,\lambda) - u'_\lambda(t)| \le 3M \quad \text{per } t \in (a, a+2\delta) \text{ e } t \in (t_{k-1}, t_{k-1}+\delta) \text{ con } k>1$$
$$|\partial_t H^*(t,\lambda) - u'_\lambda(t)| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{per } t \in (a+2\delta, t_1) \text{ e } t \in (t_k-\delta, t_k) \text{ con } k>1$$

con l'eccezione di un numero finito di punti. Abbiamo dunque (abbondando ancora)

$$\int_a^b |\partial_t H^*(t,\lambda) - u'_\lambda(t)|\,dt \le \sum_{k=1}^m \Bigl(2\delta \cdot 3M + (t_k - t_{k-1})\,\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Bigr) \le 6mM\delta + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon$$

e la dimostrazione è conclusa. □

Il punto chiave è il risultato che diamo di seguito e che presentiamo ancora nella forma di lemma: un'omotopia deforma progressivamente il circuito ma non altera il valore dell'integrale di una forma chiusa. Tuttavia l'enunciato riguarda una generica omotopia regolare e non fa esplicito riferimento ai circuiti, dato che non si impongono condizioni di non annullamento sulla derivata.

9.9. Lemma. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale di classe C^1 chiusa e $H^* : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ una Ω-omotopia di classe C^2 e sia $I^* : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da*

$$I^*(\lambda) = \int_a^b \langle \omega(H^*(t,\lambda)), \partial_t H^*(t,\lambda)\rangle\,dt \quad \text{per } \lambda \in [0,1]\,. \tag{9.12}$$

Allora I^* è una funzione costante. □

Dimostrazione. Per $\lambda \in [0,1]$, con le notazioni brevi D_i e ∂_λ per le derivate parziali, abbiamo

$$\frac{dI^*(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\int_a^b \langle \omega(H^*(t,\lambda)), \partial_t H^*(t,\lambda)\rangle\,dt = \int_a^b \partial_\lambda \langle \omega(H^*(t,\lambda)), \partial_t H^*(t,\lambda)\rangle\,dt.$$

Sviluppiamo la funzione integranda. Abbiamo

$$\partial_\lambda \langle \omega(H^*(t,\lambda)), \partial_t H^*(t,\lambda)\rangle = \sum_{i=1}^n \partial_\lambda \Bigl(\omega_i(H^*(t,\lambda))\,\partial_t H_i^*(t,\lambda)\Bigr)$$
$$= \sum_{i=1}^n \Bigl(\sum_{j=1}^n D_j\omega_i(H^*(t,\lambda))\,\partial_\lambda H_j^*(t,\lambda)\Bigr)\partial_t H_i^*(t,\lambda) + \sum_{i=1}^n \omega_i(H^*(t,\lambda))\,\partial_\lambda\partial_t H_i^*(t,\lambda).$$

D'altra parte abbiamo anche

$$\partial_t \sum_{j=1}^n \omega_j(H^*(t,\lambda))\,\partial_\lambda H_j^*(t,\lambda)$$
$$= \sum_{j=1}^n \Bigl(\partial_t\bigl(\omega_j(H^*(t,\lambda))\bigr)\partial_\lambda H_j^*(t,\lambda) + \omega_j(H^*(t,\lambda))\,\partial_t\partial_\lambda H_j^*(t,\lambda)\Bigr)$$
$$= \sum_{j=1}^n \Bigl(\sum_{i=1}^n D_i\omega_j(H^*(t,\lambda))\,\partial_t H_i^*(t,\lambda)\,\partial_\lambda H_j^*(t,\lambda) + \omega_j(H^*(t,\lambda))\,\partial_t\partial_\lambda H_j^*(t,\lambda)\Bigr)$$
$$= \sum_{i=1}^n \Bigl(\sum_{j=1}^n D_i\omega_j(H^*(t,\lambda))\,\partial_\lambda H_j^*(t,\lambda)\Bigr)\partial_t H_i^*(t,\lambda) + \sum_{j=1}^n \omega_j(H^*(t,\lambda))\,\partial_t\partial_\lambda H_j^*(t,\lambda)$$

e notiamo che quanto abbiamo ottenuto differisce dal risultato del calcolo precedente solo in tre punti: abbiamo $D_i\omega_j$ anziché $D_j\omega_i$; sono scambiate di ordine le derivazioni ∂_t e ∂_λ nella somma con un solo indice; tale indice, e la cosa è inessenziale, è ora j anziché i. Dunque i due calcoli portano allo stesso risultato in quanto ω è chiusa e H^* è di classe C^2. Pertanto deduciamo che

$$\partial_\lambda \langle \omega(H^*(t,\lambda)), \partial_t H^*(t,\lambda)\rangle = \partial_t \sum_{j=1}^n \omega_j(H^*(t,\lambda))\, \partial_\lambda H_j^*(t,\lambda).$$

Siccome $H^*(a,\lambda) = H^*(b,\lambda)$ per ogni $\lambda \in [0,1]$, da cui anche $\partial_\lambda H^*(a,\lambda) = \partial_\lambda H^*(b,\lambda)$ per ogni $\lambda \in [0,1]$, abbiamo allora

$$\begin{aligned}\frac{dI^*(\lambda)}{d\lambda} &= \int_a^b \partial_t \sum_{j=1}^n \omega_j(H^*(t,\lambda))\, \partial_\lambda H_j^*(t,\lambda)\, dt \\ &= \sum_{j=1}^n \Big(\omega_j(H^*(b,\lambda))\, \partial_\lambda H_j^*(b,\lambda) - \omega_j(H^*(a,\lambda))\, \partial_\lambda H_j^*(a,\lambda) \Big) = 0\end{aligned}$$

e quindi I^* è costante. $\square$

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per dimostrare il risultato successivo, che caratterizza le forme differenziali chiuse e lega la chiusura all'esattezza locale.

9.10. Teorema. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ una forma differenziale di classe C^1. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: i) ω è localmente esatta; ii) ω è chiusa; iii) risulta $\int_{C_0} \omega = \int_{C_1} \omega$ per ogni coppia di circuiti C_0 e C_1 di Ω fra loro Ω-omotopi.* $\square$

Dimostrazione. Supponiamo ω localmente esatta e dimostriamo che ω è chiusa. Sia $x \in \Omega$ ad arbitrio. Siccome ω è localmente esatta, esiste una palla $B = B_r(x)$ in cui ω è esatta. Per il Teorema 8.3 la restrizione di ω a B, in quanto esatta, è una forma chiusa. Per l'arbitrarietà di x concludiamo che ω è chiusa.

Supponiamo ora ω chiusa e dimostriamo la iii). Siano C_0 e C_1 due circuiti Ω-omotopi. Se sapessimo dell'esistenza di un'omotopia di classe C^2 da C_0 a C_1, potremmo applicare il Lemma 9.9 e concludere immediatamente. Ma le cose non stanno così e occorre un po' di lavoro aggiuntivo. L'idea è la seguente: verifichiamo che, per ogni $\varepsilon \in (0,1)$, la differenza degli integrali di ω sui due circuiti è dell'ordine di ε. Dall'arbitrarietà di ε discenderà l'uguaglianza voluta. Fissiamo una Ω-omotopia $H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ da C_0 a C_1 e poniamo

$$M = \max\{|H(t,\lambda)| : \ (t,\lambda) \in [a,b] \times [0,1]\} \quad \text{e} \quad L = \max\{\operatorname{lungh} C_0, \operatorname{lungh} C_1\} \tag{9.13}$$

osservando che M è ben definito in quanto H è continua e il suo dominio è compatto. Fissiamo ora $\varepsilon \in (0,1)$ ad arbitrio e applichiamo il Lemma 9.8: otteniamo un'omotopia $H^* : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ di classe C^∞ verificante le (9.6–7). Per il Lemma 9.9 abbiamo $I^*(0) = I^*(1)$, da cui

$$\left| \int_{C_0} \omega - \int_{C_1} \omega \right| \le \left| \int_{C_0} \omega - I^*(0) \right| + \left| \int_{C_1} \omega - I^*(1) \right| \tag{9.14}$$

e ora stimiamo i due termini del secondo membro. Poniamo per comodità $u_\lambda(t) = H(t,\lambda)$ e $v_\lambda(t) = H^*(t,\lambda)$ per $t \in [a,b]$ e $\lambda = 0,1$. Per tali λ abbiamo allora

$$\int_{C_\lambda} \omega - I^*(\lambda) = \int_a^b \langle \omega(u_\lambda(t)) - \omega(v_\lambda(t)), u_\lambda'(t)\rangle\, dt + \int_a^b \langle \omega(v_\lambda(t)), u_\lambda'(t) - v_\lambda'(t)\rangle\, dt.$$

Ricordiamo ora le (9.6–7) e (9.13) e notiamo che $|v_\lambda(t)| \le |u_\lambda(t)| + |v_\lambda(t) - u_\lambda(t)| \le M + \varepsilon \le M + 1$ per $t \in [a,b]$ e $\lambda = 0, 1$. Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_\lambda} \omega - I^*(\lambda) \right| &\le \int_a^b |\omega(u_\lambda(t)) - \omega(v_\lambda(t))| \, |u_\lambda'(t)| \, dt + \int_a^b |\omega(v_\lambda(t))| \, |u_\lambda'(t) - v_\lambda'(t)| \, dt \\
&\le \sup_{t\in[a,b]} |\omega(u_\lambda(t)) - \omega(v_\lambda(t))| \int_a^b |u_\lambda'(t)| \, dt + \sup_{t\in[a,b]} |\omega(v_\lambda(t))| \int_a^b |u_\lambda'(t) - v_\lambda'(t)| \, dt \\
&\le \varepsilon L + (M+1)\varepsilon = \varepsilon(L + M + 1).
\end{aligned}$$

Quindi il primo membro della (9.14) è $\le 2\varepsilon(L + M + 1)$ per ogni $\varepsilon \in (0,1)$ e, di conseguenza, è nullo. Ciò completa la dimostrazione di *iii*) nell'ipotesi *ii*).

Supponiamo infine che valga la *iii*) e dimostriamo che ω è localmente esatta. Fissato $x_0 \in \Omega$, si scelga una palla $B = B_r(x_0) \subseteq \Omega$. Sia ora C un circuito qualunque di B e sia $u : [a,b] \to B$ una sua parametrizzazione. Introduciamo la funzione continua $H : [a,b] \times [0,1] \to B$ mediante la formula $H(t,\lambda) = u(t) + \lambda(x_0 - u(t))$ osservando che, effettivamente, H assume i suoi valori in B dato che B è un convesso. Abbiamo inoltre $H(a,\lambda) = H(b,\lambda)$ per ogni λ dato che $u(a) = u(b)$. Quindi H è una B-omotopia. Infine, per $\lambda \in [0,1)$, $H(\,\cdot\,,\lambda)$ parametrizza un circuito C_λ e si ha $C_0 = C$. Siccome, per ogni $\lambda \in (0,1)$, la restrizione di H ad $[a,b] \times [0,\lambda]$ è una Ω-omotopia da C a C_λ e vale la *iii*) per ipotesi, abbiamo

$$\int_C \omega = \int_{C_\lambda} \omega = \int_a^b \langle \omega(u(t) + \lambda(x_0 - u(t))), (1-\lambda)u'(t) \rangle \, dt \quad \text{per ogni } \lambda \in (0,1).$$

Facendo tendere λ a 1 concludiamo che $\int_C \omega = 0$ e l'esattezza di ω in B segue dal Teorema 8.3. Ciò conclude la dimostrazione. □

9.11. Esempio (seguito di 6.6). Riprendiamo l'Esempio 6.6. Un semplice calcolo mostra che la forma ω in questione, che è addirittura di classe C^∞, è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{x^*\}$. D'altra parte, se ω fosse esatta, il suo integrale su ogni circuito sarebbe nullo, il che non è. La forma ω è invece (come deve essere dato che è chiusa) localmente esatta. Fissato $x_0 \ne x^*$, una primitiva di ω in un intorno di x_0 è la coordinata angolare, cioè la seconda coordinata polare nel sistema di centro x^*, come mostra il calcolo fatto nell'esercizio citato. Variare questa di una costante additiva significa ruotare l'asse polare. Ad esempio, se $x^* = 0$ per semplificare e se ci restringiamo al primo o quarto quadrante, una primitiva di ω è data dalla formula $F(x) = \arctan(x_2/x_1)$, cioè esattamente la coordinata angolare che assume valori in $(-\pi/2, \pi/2)$. Ma si può fare agevolmente la verifica:

$$D_1 \arctan \frac{x_2}{x_1} = \frac{-x_2/x_1^2}{1 + (x_2/x_1)^2} = -\frac{x_2}{|x|^2} = \omega_1(x) \quad \text{e} \quad D_2 \arctan \frac{x_2}{x_1} = \ldots = \frac{x_1}{|x|^2} = \omega_2(x).$$

9.12. Osservazione. L'esempio precedente è una sorta di prototipo. Una forma differenziale chiusa è localmente esatta e quindi esiste *una collezione di sue primitive locali*. Supponiamo che due di queste, diciamo F_1 e F_2, siano definite in $B_1 = B_{r_1}(x^1)$ e in $B_2 = B_{r_2}(x^2)$ e che l'intersezione $I = B_1 \cap B_2$ non sia vuota. Allora le restrizioni di F_1 e F_2 a I sono primitive di ω in I e, di conseguenza, differiscono per una costante (I è connessa). Alterando pertanto F_2 della costante adeguata, si ottiene $F_1 = F_2$ in I. Allora possiamo considerare l'unione $U = B_1 \cup B_2$ e la funzione $F : U \to \mathbb{R}$ definita dalla formula $F(x) = F_i(x)$ se $x \in B_i$. Essa è effettivamente ben definita e ogni punto di U ha un intorno in cui $\omega = dF$. Quindi F è una primitiva di ω in U. Ebbene il caso di una forma chiusa non esatta corrisponde al fatto che, data la collezione delle primitive locali, non è possibile aggiustare le costanti additive in modo che le primitive locali così modificate siano tutte restrizioni di una stessa funzione. Ciò è appunto quanto accade nell'Esempio 9.11.

9.13. Osservazione. A livello operativo, *se si è già verificato che ω è una forma chiusa*, si può calcolare una sua primitiva locale F in un certo intorno I di un punto davvero fissato. Se questa è una funzione elementare, si può vedere se la formula stessa continua ad assumere significato anche per gli altri valori $x \in \Omega \setminus I$ della variabile e non solo per $x \in I$. In caso affermativo, tale formula fornisce un prolungamento di F definito in tutto Ω e si può vedere con un calcolo diretto se tale prolungamento è una primitiva di ω o meno. Naturalmente, come mostra l'Esempio 9.11, non sempre questo tentativo porta alla costruzione di una primitiva globale. □

Diamo ora un'ipotesi su Ω di carattere topologico che assicura che tutte le forme chiuse sono esatte. La prima delle definizioni precisa la possibilità di ridurre a un punto un circuito C mediante una deformazione continua che avvenga completamente dentro Ω.

9.14. Definizione. *Siano Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e C un circuito di Ω. Diciamo che C è Ω-contraibile quando esiste una Ω-omotopia $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ tale che i) la funzione $H(\,\cdot\,, 0)$ parametrizza C; ii) la funzione $H(\,\cdot\,, 1)$ è costante.* □

Notiamo che $H(\,\cdot\,, 1)$ non parametrizza un circuito. Per semplificare altrove la trattazione, infatti, non abbiamo accettato le funzioni costanti fra le parametrizzazioni ammissibili di cammini.

9.15. Definizione. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che Ω è semplicemente connesso quando ogni circuito di Ω è Ω-contraibile.* □

9.16. Proposizione. *Ogni aperto stellato di $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.* □

Dimostrazione. Sia Ω stellato rispetto al suo punto x_0. Vediamo che Ω è semplicemente connesso sostanzialmente ripetendo l'ultima parte della dimostrazione del Teorema 9.10. Siano infatti C un circuito di Ω e $u : [a,b] \to \Omega$ una sua parametrizzazione. Introduciamo la funzione continua $H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ mediante la formula $H(t,\lambda) = u(t) + \lambda(x_0 - u(t))$ osservando che, effettivamente, H assume i suoi valori in Ω dato che Ω è stellato rispetto a x_0. Abbiamo inoltre $H(a,\lambda) = H(b,\lambda)$ per ogni λ dato che $u(a) = u(b)$. Quindi H è una Ω-omotopia. Infine, $H(t,1) = x_0$ per ogni $t \in [a,b]$ per cui $H(\,\cdot\,, 1)$ è costante. Dunque C è Ω-contraibile. □

Al contrario, non è semplicemente connesso l'aperto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: si intuisce infatti che una circonferenza di centro l'origine percorsa una o più volte in senso orario o antiorario non può essere Ω-contraibile. Allo stesso modo non è semplicemente connesso il complementare di una retta di $\mathbb{R}^3$, mentre è semplicemente connesso $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ per ogni $n > 2$.

9.17. Esercizio. "Convincersi" che $\Omega_n = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso se $n > 2$. Ad esempio, per ogni $n > 2$, si costruisca esplicitamente una Ω_n-omotopia nelle condizioni della Definizione 9.14 relativa al circuito C individuato dalla parametrizzazione $u : [0, 2\pi] \to \Omega_n$ definita dalla formula $u(t) = (\cos t, \sin t, 0, \ldots, 0)$.

9.18. Esercizio. Decidere, a livello intuitivo, se sono semplicemente connessi o meno gli aperti seguenti: *i)* il complementare in $\mathbb{R}^2$ di un disco; *ii)* il complementare in $\mathbb{R}^2$ di una semiretta; *iii)* il complementare in $\mathbb{R}^2$ del grafico di una funzione continua su un intevallo compatto; *iv)* il complementare in $\mathbb{R}^3$ di una palla; *v)* il complementare in $\mathbb{R}^3$ di una circonferenza; *vi)* il complementare in $\mathbb{R}^3$ di una parabola; *vii)* il complementare in $\mathbb{R}^3$ dell'unione di due rette incidenti; *viii)* il complementare in $\mathbb{R}^3$ di un cubo; *ix)* una corona circolare di $\mathbb{R}^2$; *x)* una corona sferica di $\mathbb{R}^3$, quale $B_R(0) \setminus \overline{B}_r(0)$ con $0 < r < R$; *xi)* il complementare in $\mathbb{R}^3$ di un insieme finito; *xii)* il complementare in $\mathbb{R}^3$ di un semipiano chiuso; *xiii)* il complementare in $\mathbb{R}^3$ di una palla chiusa; *xiv)* una palla di $\mathbb{R}^3$ privata di un suo sottoinsieme finito; una palla di $\mathbb{R}^3$ privata di una circonferenza inclusa nella palla stessa; *xv)* l'aperto $\mathbb{R}^4 \setminus \overline{B}_1(0)$.

9.19. Proposizione. *Un aperto connesso Ω di $\mathbb{R}^n$ è semplicmente connesso se e solo se tutti i circuiti di Ω sono Ω-omotopi fra loro.* □

Dimostrazione. Supponiamo Ω semplicemente connesso e siano C_1 e C_2 due circuiti di Ω. Siccome questi sono Ω-contraibili, esistono due omotopie $H_1, H_2 : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ tali che, per $i = 1, 2$, $H_i(\cdot\,, 0)$ parametrizza C_i e $H_i(\cdot\,, 1)$ assume un valore costante $x^i \in \Omega$. Siccome Ω è connesso per archi (Teorema 7.9), esiste una funzione continua $u : [0,1] \to \Omega$ tale che $u(0) = x^1$ e $u(1) = x^2$. Se definiamo $H : [0,1] \times [0,3] \to \Omega$ mediante le formule

$$\begin{gathered} H(t,\lambda) = H_1(t,\lambda), \quad H(t,\lambda) = u(\lambda - 1) \quad \text{e} \quad H(t,\lambda) = H_2(t, 3-\lambda) \\ \text{per } t \in [0,1] \quad \text{e rispettivamente per} \quad \lambda \in [0,1], \quad \lambda \in (1,2) \quad \text{e} \quad \lambda \in [2,3] \end{gathered}$$

otteniamo una Ω-omotopia da C_1 a C_2 come subito si controlla.

Supponiamo ora che tutti i circuiti di Ω siano Ω-omotopi fra loro. Sia C un circuito di Ω: dimostriamo che esso è Ω-contraibile. Si fissino $x_0 \in \Omega$, una palla $B = B_r(x_0) \subseteq \Omega$ e un punto $x' \in B \setminus \{x_0\}$ e si consideri il circuito $C' = [x_0, x', x_0]$. Allora C' è un circuito di Ω, dunque Ω-omotopo a C. Detta $H_0 : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ un'omotopia da C a C', costruiamo $H : [0,1] \times [0,2] \to \Omega$ mediante le formule, entrambe per $t \in [0,1]$

$$H(t,\lambda) = H_0(t,\lambda) \quad \text{se } \lambda \in [0,1] \quad \text{e} \quad H(t,\lambda) = H_0(t,1) + (\lambda - 1)(x_0 - H_0(t,1)) \quad \text{se } \lambda \in (1,2]$$

e osserviamo che H assume effettivamente valori in Ω in quanto la palla B è stellata rispetto a x_0. Inoltre, come si controlla senza difficoltà, H è un'omotopia, $H(\cdot\,, 0)$ parametrizza C e $H(\cdot\,, 2)$ è costante. Dunque C è Ω-contraibile. □

9.20. Teorema. *Sia Ω un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^n$. Allora una forma differenziale ω di classe C^1 in Ω è esatta se e solo se è chiusa.* □

Dimostrazione. Se ω è esatta, allora essa è chiusa per il Teorema 9.2. Supponiamo ora ω chiusa e sia C un circuito di Ω: dimostriamo che l'integrale di ω su C è dell'ordine di ε per ogni $\varepsilon > 0$, dunque nullo. Fissiamo $x_0 \in \Omega$ e una palla chiusa $B = \overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Allora esiste una costante M tale che $|\omega(x)| \le M$ per ogni $x \in B$. Per ogni $\varepsilon > 0$ scegliamo un circuito C_ε di B avente lunghezza $\le \varepsilon$. Siccome C è Ω-omotopo a C_ε per la Proposizione 9.19 e ω è chiusa, grazie al Teorema 9.10 otteniamo

$$\int_C \omega = \int_{C_\varepsilon} \omega \quad \text{da cui} \quad \left| \int_C \omega \right| \le M \operatorname{lungh} C_\varepsilon \le M\varepsilon.$$

Siccome ε è arbitrario, abbiamo $\int_C \omega = 0$ e l'esattezza di ω è garantita dal Teorema 8.3. □

9.21. Osservazione. Consideriamo il caso di un aperto Ω non semplicemente connesso. *Se si sa già che la forma in esame è chiusa*, si deduce che il suo integrale è invariante per omotopia (nel senso preciso della condizione *iii*) del Teorema 9.10). Tuttavia, siccome non tutti i circuiti siano contraibili, non possiamo dedurre che la forma è esatta. Ma in certi casi si intuisce che, fra i circuiti possibili, *se ne possono selezionare alcuni* tali che ogni altro circuito risulti o Ω-contraibile oppure Ω-omotopo a uno di quelli scelti o a loro somme o a loro opposti. Detta $\mathcal{S}$ la famiglia dei circuiti che abbiamo così privilegiato, per controllare che l'integrale della forma chiusa ω su ogni circuito è nullo è sufficiente verificare che è nullo l'integrale di ω su ciascuno dei circuiti di $\mathcal{S}$. Un caso di questo tipo si verifica se $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si intuisce che, fissato comunque un circuito C di Ω, questo è o contraibile oppure omotopo a una delle circonferenze ripercorse dell'Esempio 3.9 o a uno dei rispettivi cammini opposti (vedi anche l'Esempio 3.14). Precisamente la situazione è regolata dal valore dell'indice di avvolgimento di C intorno all'origine (Esempio 6.6), come mostra il risultato che presentiamo tra breve. Allora, tenendo conto della proprietà additiva, per decidere se ω è esatta o meno, è sufficiente calcolare l'integrale di ω su un circuito di indice 1.

9.22. Esempio. Per chiarire quanto abbiamo detto studiamo la complicata forma differenziale

$$\frac{2x(x^2+y^2-1)\,dx+2y(x^2+y^2-1)\,dy+z\,dz}{(x^2+y^2-1)^2+z^2}\,, \quad (x,y,z)\in\Omega=\mathbb{R}^3\setminus\Gamma$$

ove $\Gamma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2-1=z=0\}$ è la circonferenza del piano $z=0$ avente centro nell'origine e raggio 1. Un calcolo laborioso ma privo di difficoltà mostra che ω è chiusa e si pone il problema della sua esattezza. A tale proposito osserviamo che, come si intuisce e potrebbe essere dimostrato, ogni circuito di Ω è Ω-contraibile oppure Ω-omotopo a uno dei circuiti seguenti: *i)* la circonferenza C_0 parametrizzata da $t\mapsto(1+\cos t,0,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$, o una somma finita $C_0+\ldots+C_0$, cioè la circonferenza C_0 ripercorsa più volte; *ii)* il circuito $-C_0$ o una somma finita $-C_0-\ldots-C_0$, cioè uno dei cammini opposti dei precedenti. Per decidere se ω è esatta o meno basta dunque calcolare $I=\int_{C_0}\omega$: la forma ω è esatta se e solo se $I=0$. Naturalmente, siccome ω è chiusa, nel calcolo di I possiamo sostituire C_0 con un qualunque altro circuito Ω-omotopo a C_0, e uno particolarmente comodo è la poligonale

$$[(0,0,1),(0,0,-1),(\sqrt{2},0,-1),(\sqrt{2},0,1),(0,0,1)]\,.$$

Infatti gli integrali di ω sui suoi lati si elidono a due a due, come si vede calcolandoli secondo quanto è stato detto nell'Osservazione 6.3. Abbiamo ad esempio

$$\int_{[(0,0,1),(0,0,-1)]}\omega=\int_1^{-1}\frac{z}{1+z^2}\,dz \quad \text{e} \quad \int_{[(\sqrt{2},0,-1),(\sqrt{2},0,1)]}\omega=\int_{-1}^{1}\frac{z}{1+z^2}\,dz$$

e i due integrali sono l'uno l'opposto dell'altro.

La via prospettata nell'Osservazione 9.13 consiste invece nella ricerca e nella successiva estensione, se possibile, di una primitiva locale. Prendiamo la palla unitaria B di $\mathbb{R}^3$ (cioè con centro nell'origine e raggio 1), che non interseca Γ, e definiamo $F:B\to\mathbb{R}$ mediante

$$F(x,y,z)=\int_{P(x,y,z)}\omega \quad \text{ove} \quad P(x,y,z)=[(0,0,0),(x,0,0),(x,y,0),(x,y,z)] \quad \text{per } (x,y,z)\in B.$$

Notiamo che, se $(x,y,z)\in B$ (inizialmente se $x,y,z\neq 0$, poi...), la poligonale $P(x,y,z)$ è un cammino di B e calcoliamo l'integrale usando l'idea dell'Osservazione 6.3. Abbiamo

$$\begin{aligned} F(x,y,z)&=\int_0^x\frac{2t}{t^2-1}\,dt+\int_0^y\frac{2t}{x^2+t^2-1}\,dt+\int_0^z\frac{t}{(x^2+y^2-1)^2+t^2}\,dt \\ &=\bigl[\ln(1-t^2)\bigr]_{t=0}^{t=x}+\bigl[\ln(1-x^2-t^2)\bigr]_{t=0}^{t=y}+\frac{1}{2}\bigl[\ln(x^2+y^2-1)^2+t^2\bigr]_{t=0}^{t=z} \\ &=\frac{1}{2}\ln\bigl((x^2+y^2-1)^2+z^2\bigr). \end{aligned}$$

Ma l'espressione così trovata ha senso per ogni $(x,y,z)\in\Omega$. Quindi essa definisce una funzione $G:\Omega\to\mathbb{R}$ che prolunga F. Un calcolo immediato mostra poi che $dG=\omega$ in tutto Ω. Concludiamo che ω è esatta e che G è una sua primitiva, precisamente la primitiva nulla nell'origine. □

Descriviamo ora in dettaglio la situazione dell'aperto $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ più volte preso in considerazione. Usiamo la terminologia introdotta negli Esempi 3.9 e 6.6.

9.23. Proposizione. *Sia $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Per n intero positivo denotiamo con C_n la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 percorsa n volte in senso antiorario e poniamo $C_{-n}=-C_n$. Siano ora C un circuito di Ω e $n\in\mathbb{Z}$ il suo indice di avvolgimento intorno all'origine. Allora C è Ω-contraibile se $n=0$ mentre è Ω-omotopo a C_n se $n\neq 0$. In particolare due circuiti di Ω sono Ω-omotopi se e solo se essi hanno lo stesso indice di avvolgimento intorno all'origine.* □

Dimostrazione. L'ultima affermazione segue banalmente dalla parte precedente dell'enunciato, per cui basta dimostrare quella. Sia $u : [a,b] \to \Omega$ una parametrizzazione di C. Presentiamo u nella forma (come nella (6.4), ora con $x^* = (0,0)$)

$$u(t) = \rho(t)\bigl(\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t)\bigr) \quad \text{per } t \in [a,b]$$

ove $\rho : [a,b] \to (0,+\infty)$ e $\vartheta : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni di classe C^1 a tratti. Abbiamo allora $\rho(a) = \rho(b)$ e $\vartheta(b) - \vartheta(a) = 2n\pi$. Per $t \in [a,b]$ e $\lambda \in [0,1]$ poniamo

$$\vartheta^*(t) = 2n\pi\,\frac{t-a}{b-a}\,, \quad \vartheta_\lambda(t) = \vartheta(t) + \lambda\bigl(\vartheta^*(t) - \vartheta(t)\bigr)$$
$$H(t,\lambda) = \bigl(\rho(t) + \lambda(1-\rho(t))\bigr)\bigl(\cos\vartheta_\lambda(t), \sin\vartheta_\lambda(t)\bigr)$$

e dimostriamo che H è una Ω-omotopia. Sia ha $\rho(t) + \lambda(1-\rho(t)) > 0$ per ogni $t \in [a,b]$ e $\lambda \in [0,1]$ in quanto $\rho(t) > 0$ per ogni t. Dunque H assume effettivamente valori in Ω. Inoltre H è continua, chiaramente. Infine risulta

$$\vartheta_\lambda(a) = (1-\lambda)\vartheta(a) \quad \text{e} \quad \vartheta_\lambda(b) = (1-\lambda)\vartheta(b) + 2n\pi\lambda = (1-\lambda)\vartheta(a) + 2n\pi$$

per cui $H(a,\lambda) = H(b,\lambda)$ per ogni $\lambda \in [0,1]$ e anche la (9.4) è verificata. Inoltre chiaramente $H(t,0) = u(t)$ per ogni $t \in [a,b]$, per cui $H(\,\cdot\,,0)$ è una parametrizzazione di C. Siccome risulta $H(t,1) = (\cos\vartheta^*(t), \sin\vartheta^*(t))$ per ogni $t \in [a,b]$, possiamo concludere semplicemente esaminando i tre casi: *i)* se $n = 0$ si ha $\vartheta^*(t) = 0$ per ogni t per cui $H(\,\cdot\,,1)$ è costante e C è Ω-contraibile; *ii)* se $n > 0$, allora $\vartheta^* : [a,b] \to [0,2n\pi]$ è biiettiva, crescente e di classe C^∞ con l'inversa, per cui $H(\,\cdot\,,1)$ parametrizza C_n e C è Ω-omotopo a C_n; *iii)* se $n < 0$, allora $\vartheta^* : [a,b] \to [2n\pi, 0]$ è biiettiva, decrescente e di classe C^∞ con l'inversa, per cui $H(\,\cdot\,,1)$ parametrizza $-C_{|n|} = C_n$ e ancora C è Ω-omotopo a C_n. □

9.24. Esercizio. Calcolare l'integrale $\int_C e^x \sin y\,dx + e^x \cos y\,dy + z\,dz$ ove C è il cammino di $\mathbb{R}^3$ parametrizzato dalla funzione $t \mapsto (t, t^2, t^3)$, $t \in [0,1]$.

9.25. Esercizio. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\frac{(x^2 + y^2 - y)\,dx + (x^2 + y^2 + x)\,dy}{x^2 + y^2}\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

su ciascuno dei seguenti circuiti poligonali:

$$[(-1,0), (-2,-1), (-2,1), (1,0)]\,, \qquad [(0,1), (-1,0), (0,-1), (2,1), (2,-1), (1,0)]$$
$$[(-1,1), (2,0), (-1,-1), (-1,0), (1,1), (0,-1), (-1,1)]\,.$$

9.26. Esercizio. Siano ω una forma di classe C^1 e chiusa in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e C un circuito di Ω. Dare una formula che leghi l'integrale di ω su C al valore dell'integrale di ω sulla circonferenza unitaria percorsa una volta in senso antiorario.

9.27. Esercizio. Studiare le forme differenziali da Ω in $(\mathbb{R}^2)^*$ date dalle formule

$$\frac{-2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy}{(x^2 + y^2)^2} \tag{9.15}$$

ove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x,y) \neq (0,0)\}$.

9.28. Esercizio. Studiare le forme differenziali da Ω in $(\mathbb{R}^3)^*$ date dalle stesse formule (9.15) ove ora $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \neq (0,0)\}$.

9.29. Esercizio. Tenendo conto dell'esercizio precedente studiare la forma differenziale

$$\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-z^2}{(x^2+z^2)^2} \right) dx + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy + \frac{2xz}{(x^2+z^2)^2}\, dz$$

nell'aperto Ω complementare dell'unione degli assi y e z di $\mathbb{R}^3$.

9.30. Esercizio. Siano $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^2)^*$ definita dalla formula

$$\omega(x,y) = \frac{-ye^x \cos y + xe^x \sin y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{xe^x \cos y + ye^x \sin y}{x^2+y^2}\, dy \quad \text{per } (x,y) \in \Omega .$$

Studiare l'esattezza di ω in Ω. Studiare poi l'esattezza della restrizione di ω a ciascuno degli aperti: *i*) $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$; *ii*) il complementare di $[0,+\infty) \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^2$; *iii*) $\mathbb{R}^2 \setminus [-1,1]^2$.

9.31. Esercizio. Siano $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus ([-1,1] \times \{0\})$ e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^2)^*$ definita dalla formula

$$\omega(x,y) = \left(\frac{y+1}{x^2+(y+1)^2} + \frac{1-y}{x^2+(y-1)^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2+(y+1)^2} + \frac{x}{x^2+(y-1)^2} \right) dy \tag{9.16}$$

per $(x,y) \in \Omega$. Dimostrare che ω è esatta. Studiare poi l'esattezza della della forma differenziale definita ancora dalla formula (9.16) in ciascuno degli aperti seguenti: *i*) il complementare in $\mathbb{R}^2$ del grafico della funzione $x \mapsto 1-x^2$, $x \in [-1,1]$; *ii*) il complementare in $\mathbb{R}^2$ dell'unione delle semirette $(-\infty,0] \times \{0\}$ e $[0,+\infty) \times \{0\}$; *iii*) il complementare in $\mathbb{R}^2$ dell'unione delle semirette $\{\pm 1\} \times [0,+\infty)$; *iv*) il complementare in $\mathbb{R}^2$ dell'insieme costituito dai due punti $(\pm 1, 0)$.

9.32. Esercizio. Sia ω una forma differenziale di classe C^1 e chiusa in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$. Dimostrare che il suo integrale sul circuito

$$\begin{aligned} C = {} & [(0,0),(1,1),(2,1),(2,-2),(-3,-2),(-3,3),(-1,3),(0,0)] \\ & + [(0,0),(1,-3),(3,-3),(3,2),(-2,2),(-2,-1),(-1,-1),(0,0)] \end{aligned}$$

è nullo. Il circuito C è Ω-contraibile?

10. Campi vettoriali conservativi

Nelle applicazioni alla fisica e all'ingegneria si è spesso interessati a campi vettoriali e a loro potenziali piuttosto che a forme differenziali. Formalizziamo queste nozioni. Supponiamo fin d'ora $n = 3$ dato che, anche se inizialmente volessimo considerare il caso generale, dovremmo rapidamente ripiegare sul caso particolare per mantenere la trattazione ad un livello elementare.

10.1. Definizione. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$. Un campo vettoriale in Ω è una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ e un potenziale di f è una funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla F(x) = f(x)$ per ogni $x \in \Omega$. Un campo vettoriale f è conservativo se esiste un suo potenziale.* □

Notiamo che, presso i fisici, la definizione di potenziale è diversa: anziché $\nabla F = f$ si richiede che $-\nabla F = f$. Tuttavia noi ci atterremo alla definizione data in quanto questa meglio si presta al discorso che intendiamo fare.

Le nozioni introdotte nella definizione precedente costituiscono semplicemente un linguaggio alternativo a quello delle forme differenziali e il motivo è il seguente: gli spazi $\mathbb{R}^3$ e $(\mathbb{R}^3)^*$ sono canonicamente isomorfi (più in generale lo sono $\mathbb{R}^n$ e $(\mathbb{R}^n)^*$): l'isomorfismo canonico è l'unico isomorfismo che trasforma gli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$ ordinatamente negli elementi della base canonica di $(\mathbb{R}^3)^*$. Ciò si ripercuote sui campi vettoriali e sulle forme differenziali. Diamo direttamente la definizione seguente:

10.2. Definizione. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale. La forma differenziale $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^3)^*$ definita dalla formula*

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{3} f_i(x)\, dx_i \quad \textit{per ogni } x \in \Omega \tag{10.1}$$

è detta forma differenziale associata a f. □

Naturalmente, data comunque una forma differenziale in Ω, esiste uno e un solo campo vettoriale f tale che ω sia la forma associata a f. Diremo anche che f è associato a ω oppure che f e ω sono associati fra loro. Si noti che, con le notazioni della definizione, abbiamo subito

$$\langle \omega(x), h \rangle = \sum_{i=1}^{3} f_i(x)\, h_i = f(x) \cdot h \quad \text{per ogni } x \in \Omega \text{ e } h \in \mathbb{R}^3 . \tag{10.2}$$

Veniamo ora alle questioni di esattezza e di chiusura della forma ω associata al campo vettoriale f: intendiamo ridire tutto in termini di f anziché di ω. Ricordiamo che, se f è di classe C^1, il suo rotore è dato dalla formula

$$\operatorname{rot} f = (D_2 f_3 - D_3 f_2, D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1).$$

Ricordate anche tutte le definizioni relative, abbiamo immediatamente che

i) *una funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ è un potenziale di f se e solo se è una primitiva di ω;*
ii) *la forma ω è esatta se e solo se il campo f è conservativo;*
iii) *se f è di classe C^1, allora la forma ω è chiusa se e solo se* $\operatorname{rot} f = 0$ *in* Ω.

Dai Teoremi 9.2 e 9.20 deduciamo pertanto:

10.3. Teorema. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Allora valgono le affermazioni seguenti: i) se f è conservativo allora* $\operatorname{rot} f = 0$ *in Ω; ii) se Ω è semplicemente connesso, allora f è conservativo se e solo se* $\operatorname{rot} f = 0$ *in Ω.* □

Segnaliamo che un campo f verificante $\operatorname{rot} f = 0$ è detto *irrotazionale*. Per introdurre le versioni relative ai campi delle caratterizzazioni dell'esattezza e della chiusura che abbiamo dato nei paragrafi precedenti occorre introdurre l'integrale di un campo lungo un cammino.

10.4. Definizione. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo e C un cammino di Ω. L'integrale di f lungo C è l'integrale*

$$\int_a^b f(u(t)) \cdot u'(t)\, dt \tag{10.3}$$

ove $u : [a, b] \to \Omega$ è una parametrizzazione di C. □

Si porrebbero vari problemi: l'indipendenza dalla parametrizzazione, le proprietà dell'integrale, eccetera. In realtà non dobbiamo dimostrare proprio nulla in quanto, grazie alla (10.2), riconosciamo nella (10.3) l'integrale $\int_C \omega$ della forma differenziale ω associata a f

$$\int_a^b f(u(t)) \cdot u'(t)\, dt = \int_a^b \langle \omega(u(t)), u'(t) \rangle\, dt = \int_C \omega$$

e di questo sappiamo tutto. In particolare, ricordando le formule (6.2) e (6.8), vediamo che l'integrale di f lungo C può essere scritto nelle forme

$$\int_C f(x) \cdot \tau(x)\, ds \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{m} \int_{C_k} f(x) \cdot \tau_k(x)\, ds \tag{10.4}$$

rispettivamente nel caso dell'arco semplice e in quello generale. Naturalmente si sono usate le notazioni delle Osservazioni 6.4 e 6.9. Tenendo conto delle ultime parole della seconda delle osservazioni citate, *possiamo comunque usare per l'integrale di f lungo C la prima delle notazioni* (10.4), *con la convenzione che essa debba essere interpretata con il significato della seconda quando il cammino non è un arco semplice*. Notiamo che si usa spesso scrivere

$$\oint_C f(x) \cdot \tau(x)\, ds \quad \text{anziché} \quad \int_C f(x) \cdot \tau(x)\, ds \quad \text{se } C \text{ è un circuito}$$

e parlare della *circuitazione di f lungo C* in tal caso. Notiamo infine che anche la Proposizione 6.10 può essere riespressa in termini di campi. Ci limitiamo a riscrivere le somme (6.10) tenendo conto anche dell'Osservazione 6.11. Abbiamo

$$S' = \sum_{k=1}^{m} f(u(t_k^*)) \cdot u'(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} f(x_k^*) \cdot u'(t_k^*)(t_k - t_{k-1})$$
$$S'' = \sum_{k=1}^{m} f(u(t_k^*)) \cdot \bigl(u(t_k) - u(t_{k-1})\bigr) = \sum_{k=1}^{m} f(x_k^*) \cdot \bigl(x_k - x_{k-1}\bigr)$$

naturalmente con le notazioni dell'osservazione citata. □

Semplicemente cambiando le notazioni, cioè usando il linguaggio dei campi appena introdotto anziché quello delle forme differenziali, vediamo che i Teoremi 8.3 e 9.10 diventano i due seguenti:

10.5. Teorema. *Siano Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^3$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti:*

i) f *è conservativo;*

ii) $\displaystyle\int_{C_1} f(x) \cdot \tau(x)\, ds = \int_{C_2} f(x) \cdot \tau(x)\, ds$

per ogni coppia di cammini di Ω con lo stesso primo estremo e lo stesso secondo estremo;

iii) $\displaystyle\oint_C f(x) \cdot \tau(x)\, ds = 0$ *per ogni circuito di Ω.*

Più precisamente valgono i fatti seguenti: iv) se vale la i) e F è un potenziale di f, per ogni cammino C di Ω risulta

$$\int_C f(z) \cdot \tau(z)\, ds = F(y) - F(x) \quad \text{ove } x \text{ è il primo estremo e } y \text{ è il secondo estremo di } C \tag{10.5}$$

v) se vale la ii) e $x_0 \in \Omega$ è fissato ad arbitrio, la formula

$$F(x) = \int_{C_x} f(y) \cdot \tau(y)\, ds \qquad \text{per } x \in \Omega, \text{ ove } C_x \text{ è un cammino di } \Omega \text{ avente primo estremo in } x_0 \text{ e secondo estremo in } x \tag{10.6}$$

definisce un potenziale di f nullo in x_0. Infine: vi) due potenziali qualunque di f differiscono per una funzione costante. □

10.6. Teorema. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: i) f è localmente conservativo, cioè ogni punto di Ω ha un intorno in cui è definito un potenziale di f; ii) risulta* $\operatorname{rot} f = 0$ *in Ω; iii) risulta*

$$\oint_{C_0} f(x) \cdot \tau(x)\, ds = \oint_{C_1} f(x) \cdot \tau(x)\, ds$$

per ogni coppia di circuiti C_0 e C_1 di Ω fra loro Ω-omotopi. □

10.7. Esempio. Riprendiamo gli Esempi 6.6 e 9.11 e costruiamone una versione tridimensionale adatta alle situazioni che stiamo discutendo. Poniamo

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ (x_1, x_2) \neq (0,0)\} \quad \text{e} \quad f(x) = \frac{(-x_2, x_1, 0)}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} \quad \text{per } x \in \Omega. \tag{10.7}$$

Abbiamo dunque definito le cose in modo che la scrittura della forma differenziale associata

$$\omega(x) = -\frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}\, dx_1 + \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}\, dx_2$$

appaia formalmente identica a quella considerata negli esempi citati ma sia ora interpretata nel caso tridimensionale. Questa costruzione è caso particolare della seguente: se Ω_2 è un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ e σ è una forma differenziale in Ω_2, poniamo

$$\Omega = \Omega_2 \times \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \omega(x) = \sigma_1(x_1, x_2)\, dx_1 + \sigma_2(x_1, x_2)\, dx_2 \quad \text{per } x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$$

e poi consideriamo il campo f associato a ω. Per evitare i calcoli conviene considerare il caso generale ora prospettato. Abbiamo i fatti seguenti: *i*) se F_2 è una primitiva di σ in Ω_2, allora la formula $F(x_1, x_2, x_3) = F_2(x_1, x_2)$ definisce una primitiva di ω in Ω, come subito si vede calcolando le derivate parziali; *ii*) se F è una primitiva di ω in Ω, allora deve essere $D_3 F = \omega_3 = 0$, per cui F ha la forma $F(x_1, x_2, x_3) = F_2(x_1, x_2)$ per una certa $F_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ differenziabile, necessariamente primitiva di σ in Ω_2, come si vede calcolando le derivate $D_i F_2$ attraverso quelle di F per $i = 1, 2$. Concludiamo che il campo f associato a ω è conservativo in Ω se e solo se σ è esatta in Ω_2 e considerazioni analoghe valgono per le proprietà locali corrispondenti. Nel caso specifico (10.7), ricordato quanto abbiamo detto negli esempi citati, concludiamo che

f è localmente conservativo ma non conservativo in Ω.

Infatti σ è localmente esatta ma non esatta, per cui delle stesse proprietà gode la forma ω. Deduciamo che $\operatorname{rot} f = 0$ in Ω, ma che di f esistono solo potenziali locali. Tali potenziali locali, rivisti nel quadro bidimensionale, devono essere, a meno di costanti additive, le coordinate angolari locali. Interpretati nel caso tridimensionale che ci interessa, essi devono essere, sempre a meno di costanti additive, *le coordinate angolari locali nel sistema di coordinate cilindiche con asse x_3*.

10.8. Esempio (campi radiali). Siano $R_1, R_2 > 0$ tali che $R_1 < R_2$ e $g : (R_1, R_2) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Poniamo

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ R_1 < |x| < R_2\} \quad \text{e} \quad f(x) = g(|x|)\, \frac{x}{|x|} \quad \text{per } x \in \Omega. \tag{10.8}$$

Un campo f ottenuto con una costruzione di questo tipo è detto *radiale* e abbiamo che

ogni capo radiale è conservativo.

Infatti la formula $F(x) = G(|x|)$ per $x \in \Omega$, ove $G : (R_1, R_2) \to \mathbb{R}$ è una primitiva di g, è un potenziale di f, come si verifica immediatamente. Precisamente, se $x_0 \in \Omega$ e G è la primitiva di g che si annulla in $|x_0|$, il corrispondente potenziale F è quello (l'unico) che si annulla in x_0. Ritroviamolo mediante la (10.6). Supponiamo $|x| > |x_0|$ lasciando al lettore il compito di completare la costruzione. Scegliamo il cammino C_x della (10.6) in modo opportuno. Consideriamo il punto ausiliario $z = (|x_0|/|x|)x$, il quale verifica $|z| = |x_0|$ e $z/|z| = x/|x|$, e due cammini, il primo da x_0 a z, il secondo da z a x, ignorando il primo se per caso avviene che $z = x_0$. Supponiamo dunque $z \neq x_0$ e consideriamo un arco di cerchio A di estremi x_0 e z che giace sulla sfera Σ di centro 0 e raggio $|x_0|$, orientandolo da x_0 a z, e poniamo $C_x = A + [z, x]$. Abbiamo allora

$$F(x) = \int_{C_x} f(y) \cdot \tau(y)\, ds = \int_A f(y) \cdot \tau(y)\, ds + \int_{[z,x]} f(y) \cdot \tau(y)\, ds$$

Ma, se y appartiene al sostegno di A, si ha $f(y) \cdot \tau(y) = 0$ in quanto $f(y)$ è ortogonale a Σ e $\tau(y)$ è invece tangente. Dunque il corrispondente integrale è nullo. D'altra parte, il versore τ è costante lungo il cammino $[z, x]$ e vale $x/|x|$ dato che stiamo supponendo $|x| > |x_0|$. Abbiamo pertanto

$$F(x) = \int_{[z,x]} f(y) \cdot \tau(y)\, ds = \int_0^1 f(z + t(x - z)) \cdot \frac{x}{|x|}\, |x - z|\, dt.$$

Ma $x - z = x - (|x_0|/|x|)x = (|x| - |x_0|)x/|x|$, da cui $|x - z| = |x| - |x_0|$ e anche, per $t \in [0, 1]$, $z + t(x - z) = \bigl(|x_0| + t(|x| - |x_0|)\bigr)x/|x|$ e $|z + t(x - z)| = |x_0| + t(|x| - |x_0|)$. Quindi

$$f(z+t(x-z)) \cdot \frac{x}{|x|}\, |x-z| = g(|z+t(x-z)|)\, \frac{z + t(x - z)}{|z + t(x - z)|} \cdot \frac{x}{|x|}\, |x-z| = g\bigl(|x_0|+t(|x|-|x_0|)\bigr)\, (|x|-|x_0|).$$

Concludiamo che

$$F(x) = \int_0^1 g\bigl(|x_0| + t(|x| - |x_0|)\bigr)\, (|x| - |x_0|)\, dt = \int_{|x_0|}^{|x|} g(s)\, ds = G(|x|)$$

ove appunto G è la primitiva di g nulla in $|x_0|$.

10.9. Esercizio. Completare la costruzione del potenziale F dell'esempio precedente considerando i due casi restanti $|x| = |x_0|$ e $|x| < |x_0|$.

10.10. Esercizio. Con le notazioni dell'Esempio 10.8 verificare con il calcolo esplicito che $\operatorname{rot} f = 0$ in Ω se g è di classe C^1 in (R_1, R_2).

10.11. Esercizio. Verificare che tutto quanto abbiamo detto nell'Esempio 10.8 si estende ai casi $R_1 = 0$ e $R_2 = +\infty$ con tutte le combinazioni possibili. Verificare inoltre che un discorso analogo vale per la palla $B_R(0)$ e per l'intero spazio nell'ipotesi che g e f siano definite nell'origine (di $\mathbb{R}$ e di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente) mediante $g(0) = 0$ e $f(0) = 0$ e che g sia continua anche in 0. Che accade invece se il limite $\lim_{r \to 0^+} g(r)$ esiste finito ma non è nullo?

10.12. Esercizio. Considerare il caso a simmetria di tipo cilindrico seguente:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ R_1 < |x'| < R_2\} \quad \text{e} \quad f(x) = g(|x'|)\, \frac{x'}{|x'|} \tag{10.9}$$

$$\text{ove abbiamo posto} \quad x' = (x_1, x_2) \quad \text{se } x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega.$$

Nelle formule precedenti R_1 e R_2 sono numeri positivi tali che $R_1 < R_2$ e $g : (R_1, R_2) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua. Dimostrare che f è conservativo trovando una formula per i suoi potenziali. Si noti che ora Ω non è semplicemente connesso. Si ricostruisca il potenziale nullo in un punto fissato mediante la (10.6) adattando quanto abbiamo fatto nell'Esempio 10.8.

10.13. Esercizio. Costruire un campo irrotazionale ma non conservativo nel dominio cilindrico Ω dato dalla prima delle (10.9).

11. Potenziale vettore

Come complemento consideriamo un altro problema, quello dell'esistenza del cosiddetto *potenziale vettore*. Tuttavia, siccome la sua discussione approfondita ci porterebbe troppo lontano, diamo solo un cenno. Il problema è il seguente:

$$\text{dato un campo vettoriale } f\,,\ \text{trovare un altro campo vettoriale } F \text{ tale che } \operatorname{rot} F = f\,. \tag{11.1}$$

Diamo la definizione seguente:

11.1. Definizione. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e $f:\Omega\to\mathbb{R}^3$ un campo vettoriale. Un campo $F:\Omega\to\mathbb{R}^3$ differenziabile tale che $\operatorname{rot} F = f$ in Ω si chiama potenziale vettore di f.* □

Se è facile trovare condizioni necessarie per l'esistenza del potenziale vettore, come mostra il risultato dato di seguito, la discussione completa è delicata perché il problema è complesso.

11.2. Teorema. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e $f:\Omega\to\mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Se esiste un potenziale vettore di classe C^2 di f, allora $\operatorname{div} f(x) = 0$ per ogni $x\in\Omega$.* □

Dimostrazione. Sia F un potenziale vettore di classe C^2 di f. Allora

$$\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^{3} D_i f_i = D_1(D_2F_3 - D_3F_2) + D_2(D_3F_1 - D_1F_3) + D_3(D_1F_2 - D_2F_1) = 0$$

in ogni punto di Ω, grazie al Teorema di Schwarz. □

Come nel caso del potenziale scalare la condizione di annullamento del rotore è solo necessaria per l'esistenza, così la condizione di divergenza nulla trovata ora, che si esprime dicendo che f *un campo solenoidale*, è solo necessaria per l'esistenza del potenziale vettore. La sua sufficienza o meno dipende da proprietà topologiche dell'aperto Ω e queste sono diverse dalla semplice connessione. Ci limitiamo al risultato dato di seguito, il quale, per quanto riguarda la regolarità, presenta una discrepanza rispetto alla situazione del Teorema 11.2.

11.3. Teorema (Lemma di Poincaré). *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e $f:\Omega\to\mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 tale che $\operatorname{div} f(x) = 0$ per ogni $x\in\Omega$. Allora valgono le conclusioni seguenti: $i)$ ogni punto di Ω ha un intorno in cui è definito un potenziale vettore di classe C^1 di f; $ii)$ se Ω è stellato, esiste un potenziale vettore di classe C^1 di f definito in tutto Ω.* □

Dimostrazione. Basta dimostrare il punto $ii)$. Infatti, noto questo, per dimostrare $i)$, basta scegliere, per ogni punto x_0, un intorno stellato di x_0 incluso in Ω, ad esempio la palla $B_r(x_0)$, ove $r>0$ è preso in modo che $B_r(x_0)\subseteq\Omega$. Sia dunque Ω stellato rispetto a un suo punto x_0. Definiamo

$$F(x) = \int_0^1 f(x_0 + t(x-x_0)) \times \bigl(t(x-x_0)\bigr)\,dt \quad \text{per } x\in\Omega$$

ove $\times$ è il simbolo di prodotto vettoriale. Osserviamo che la definizione ha senso proprio perché Ω è stellato rispetto a x_0 e che F è di classe C^1 in quando, essendo f è di classe C^1, possiamo derivare sotto il segno di integrale. Nella verifica dell'uguaglianza $\operatorname{rot} F = f$ prendiamo $x_0 = 0$ per semplificare le notazioni. Siccome f è di classe C^1, possiamo passare anche il rotore sotto il segno di integrale e otteniamo per ogni $x\in\Omega$

$$\operatorname{rot} F(x) = \int_0^1 \operatorname{rot}\Bigl(f(tx)\times(tx)\Bigr)\,dt = \int_0^1 t\,\operatorname{rot}\Bigl(f(tx)\times x\Bigr)\,dt.$$

Conviene sviluppare i calcoli sulla funzione integranda. A tale scopo scriviamo una formula generale. Se g e h sono due campi vettoriali di classe C^1 e se Jg e Jh sono le loro matrici jacobiane, risulta

$$\operatorname{rot}(g \times h) = g \operatorname{div} h - h \operatorname{div} g + (Jg)h - (Jh)g$$

ove negli ultimi due termini h e g sono intesi come vettori colonna. La verifica della formula consiste semplicemente nello sviluppo dei due membri con un po' di pazienza e quindi la omettiamo. Siccome $\operatorname{div} x = 3$, $\operatorname{div}\bigl(f(tx)\bigr) = t \operatorname{div} f(tx)$, $J\bigl(f(tx)\bigr) = tJf(tx)$ e Jx è la matrice identità, abbiamo

$$\operatorname{rot}\Bigl(f(tx) \times x\Bigr) = 3f(tx) - tx \operatorname{div} f(tx) + tJf(tx)x - f(tx) = 2f(tx) + tJf(tx)x - tx \operatorname{div} f(tx)$$

e l'ultimo addendo è nullo in quanto $\operatorname{div} f = 0$ in Ω. Abbiamo dunque

$$\operatorname{rot} F(x) = \int_0^1 t\Bigl(2f(tx) + tJf(tx)x\Bigr)\, dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}\Bigl(t^2 f(tx)\Bigr)\, dt = f(x)$$

e la dimostrazione è conclusa. □

11.4. Osservazione. Sorge spontaneo il problema della caratterizzazione di tutti i potenziali vettori. Siccome il rotore è un operatore lineare, se F_0 è una soluzione particolare di classe C^1 dell'equazione $\operatorname{rot} F = f$, l'insieme di tutte le soluzioni di classe C^1 è descritto dalla formula

$$F = F_0 + I \quad \text{ove } I \text{ è di classe } C^1 \text{ e irrotazionale, cioè tale che } \operatorname{rot} I = 0 \text{ in } \Omega.$$

Se poi Ω *è un aperto stellato*, abbiamo sia l'esistenza di un potenziale vettore F_0 sia la caratterizzazione dei campi irrotazionali: essi sono tutti e soli quelli conservativi. Dunque la formula

$$F = F_0 + \nabla\Psi \quad \text{al variare di } \Psi \text{ fra le funzioni reali di classe } C^2$$

descrive l'insieme di tutti i potenziali vettori di classe C^1 di f.

11.5. Osservazione. Sull'esistenza del potenziale scalare abbiamo il Teorema 10.5, versione nel linguaggio dei campi vettoriali del Teorema 8.3 sulle forme differenziali. Anche lo studio dell'esistenza del potenziale vettore è il corrispondente nel linguaggio dei campi vettoriali di una teoria su forme differenziali. Queste sono le cosiddette 2-forme, casi particolari delle k-forme (k intero non negativo, fra cui le 1-forme già note) in un numero arbitrario n di variabili, la cui trattazione costituisce un capitolo importante della Geometria differenziale. In particolare vengono definiti i concetti di k-forma esatta e di k-forma chiusa, nonché quello di integrale di una k-forma su oggetti che sono versioni k-dimensionali dei cammini. Noi ci limitiamo a dire quanto segue: nel caso $n = 3$ una 2-forma ω è caratterizzata da 3 coefficienti $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, così che si possono associare biunivicamente le 2-forme in Ω ai campi vettoriali $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ in un modo naturale: si considera il campo le cui componenti sono i coefficienti della forma considerata. In tal modo la teoria delle 2-forme in tre dimensioni e quella dei campi vettoriali diventano due linguaggi nei quali si dicono le stesse cose in modo diverso. La 2-forma ω corrispondente al campo f è esatta se e solo se f è il rotore di qualche campo F, mentre ω è chiusa quando il campo corrispondente f verifica la condizione $\operatorname{div} f = 0$. Quindi il Teorema 11.2, in termini di 2-forme, si enuncia semplicemente dicendo che ogni 2-forma esatta di classe C^1 è chiusa. Per quanto riguarda l'integrale di una 2-forma, il "dominio di integrazione" è, come si è accennato nel caso in cui k è generico, un oggetto che è un equivalente bidimensionale del cammino. Nel parallelismo fra cammini e "cammini bidimensionali", il corrispondente di un arco semplice (che sappiamo essere assimilabile a una curva orientata mediante una funzione *continua* τ che a ogni punto della curva associa un versore tangente) è una "superficie S orientata con bordo". Il corrispondente di un circuito semplice è una "superficie S orientata chiusa". L'integrale su S della 2-forma corrispondente al campo vettoriale f è il cosiddetto *flusso di f attraverso la superficie S*

$$\int_S f(x) \cdot n(x)\, dS \tag{11.2}$$

ove $n : S \to \mathbb{R}^3$, che è *l'orientamento di S* come la funzione τ è l'orientamento della curva, è una funzione *continua* verificante per ogni $x \in S$: $n(x)$ è normale a S in x e $|n(x)| = 1$. La superficie S è *orientabile* quando esiste una siffatta funzione n (e non tutte le superfici lo sono): se S è orientabile e connessa, essa ha esattamente due orientamenti e, se n è uno di essi, l'altro è $-n$. La condizione analoga all'annullamento dell'integrale di una 1-forma esatta su ogni circuito si enuncia in forma vaga come segue: se $f = \operatorname{rot} F$, *il flusso* (11.2) *di f è nullo tutte le volte che S è una "superficie orientabile chiusa"*. Ciò è un caso particolare del Teorema di Stokes.

Una trattazione compiuta, anche limitatamente al caso $k = 2$ e $n = 3$ e nel linguaggio dei campi vettoriali anziché in quello delle 2-forme, deve passare innanzi tutto per la precisazione di tutti i concetti che in queste righe sono comparsi in forma vaga.

11.6. Esempio. Nonostante la vaghezza di quanto abbiamo detto, usiamo la condizione di annullamento del flusso di un rotore appena enunciata per costruire un esempio di campo f regolare verificante $\operatorname{div} f = 0$ ma privo di potenziale vettore. Prendiamo

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \quad \text{e} \quad f(x) = \frac{x}{|x|^3} \quad \text{per } x \in \Omega. \tag{11.3}$$

Vediamo che $\operatorname{div} f = 0$. Per ogni $x \in \Omega$ abbiamo infatti

$$\operatorname{div} f(x) = \operatorname{div}(|x|^{-3}x) = \nabla|x|^{-3} \cdot x + |x|^{-3} \operatorname{div} x = -3|x|^{-4} \frac{x}{|x|} \cdot x + 3|x|^{-3} = 0.$$

D'altra parte, se come S prendiamo la sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$, descritta cioè dall'equazione $|x| = 1$, la funzione n definita semplicemente da $n(x) = x$ verifica quanto richiesto e l'integrale (11.2) è chiaramente positivo anziché nullo. Dunque f non può essere il rotore di un altro campo vettoriale e il potenziale vettore di f non esiste. Si noti che Ω è semplicemente connesso: come preannunciato, tale condizione non è importante nella ricerca del potenziale vettore.

12. Complementi

Concludiamo con due possibili applicazioni della teoria delle forme differenziali esatte e delle forme differenziali chiuse. Diamo anche un cenno sulla costruzione del cosiddetto *gruppo fondamentale* di un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e sulle relazioni fra quanto abbiamo detto in queste pagine e su quanto abitualmente si fa in Topologia algebrica.

12.1. Equazioni differenziali ordinarie. Supponiamo che $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sia una funzione definita e continua in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Scriviamo f, se ci riusciamo, nella forma

$$f(t,y) = -\frac{a(t,y)}{b(t,y)} \quad \text{per } (t,y) \in \Omega \quad \text{ove} \quad a, b : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad b(t,y) \neq 0 \text{ per ogni } (t,y) \in \Omega \tag{12.1}$$

scegliendo a e b continue e tali che la forma differenziale $a(t,y)\, dt + b(t,y)\, dy$ sia esatta. Diciamo subito che ciò di solito non si riesce a fare "a mano". Tuttavia, in certi casi, si ha successo e, per continuare, supponiamo di esserci riusciti. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'(t) = f(t, u(t)) = -\frac{a(t, u(t))}{b(t, u(t))} \tag{12.2}$$

della quale, perché il tutto abbia un senso, cerchiamo soluzioni $u : I \to \mathbb{R}$ definite e differenziabili in un certo intervallo I e tali che $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$. Supponiamo infine che F sia una primitiva in Ω della forma differenziale considerata. Allora vale quanto segue: una funzione $u : I \to \mathbb{R}$ nelle condizioni dette è soluzione della (12.2) se e solo se

$$\text{la restrizione di } F \text{ al grafico di } u \text{ è costante.} \tag{12.3}$$

Supponiamo infatti che u risolva la (12.2). Allora, per $t \in I$, abbiamo

$$\frac{d}{dt} F(t, u(t)) = \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial t} + \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial y} u'(t) = a(t, u(t)) + b(t, u(t))\, f(t, u(t)) = 0.$$

Dunque la funzione $t \mapsto F(t, u(t))$ è costante in I e quindi vale la (12.3). Viceversa, supponiamo che valga la (12.3). Allora, per $t \in I$, abbiamo

$$0 = \frac{d}{dt} F(t, u(t)) = \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial t} + \frac{\partial F(t, u(t))}{\partial y} u'(t) = a(t, u(t)) + b(t, u(t))\, u'(t).$$

Dividendo per $b(t, u(t))$ e riarrangiando vediamo che u risolve la (12.2). Notiamo che i passaggi privi di un senso preciso

$$\frac{du}{dt} = -\frac{a(t, u)}{b(t, u)}, \quad a(t, u)\, dt + b(t, u)\, du = 0, \quad dF(t, u) = 0, \quad F(t, u) = \text{costante} \tag{12.4}$$

in realtà portano al risultato corretto, se si intende l'ultima delle (12.4) come un'equazione dalla quale ricavare u in funzione di t. Ciò viene solo grazie al linguaggio che è stato scelto. Consideriamo ad esempio l'equazione differenziale $u' = u$ e scriviamola seguendo le (12.4). Abbiamo successivamente $du/dt = u$ e $u\, dt - du = 0$, ma la forma $u\, dt - du$ non è esatta in alcun aperto di $\mathbb{R}^2$, dato che non è chiusa. Tuttavia è esatta in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ la forma $dt - (1/u)\, du$ dato che una sua primitiva è data dalla formula $F(t, u) = t - \ln u$ e tale forma si ottiene dalla precedente semplicemente dividendo per u. Dunque le soluzioni positive dell'equazione considerata sono tutte e sole quelle che rendono vera la condizione $t - \ln u(t) = \text{costante}$ e sono pertanto date dalla formula $u(t) = \exp(t - c)$ con $c \in \mathbb{R}$. Siccome $\exp(-c)$ descrive $(0, +\infty)$ quando c descrive $\mathbb{R}$, le soluzioni cercate sono date da $u(t) = C \exp t$ con $C > 0$ ad arbitrio. Analogamente si poteva considerare la forma $dt - (1/u)\, du$ in $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$, pure esatta, una sua primitiva essendo $F(t, u) = t - \ln(-u)$. Procedendo avremmo trovato le soluzioni negative: $u(t) = C \exp t$ con $C < 0$ ad arbitrio. Si noti che tutto ciò corrisponde alle scelte $a(t, y) = 1$ e $b(t, y) = -1/y$, nei due casi solo per $y > 0$ e solo per $y < 0$ rispettivamente, cioè a riscrivere l'equazione $u' = u$ nella forma $u' = -1/(-1/u)$. Notiamo che vi sono infinite forme differenziali esatte in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ adatte allo scopo. Un'intera famiglia si ottiene prendendo $-e^{-\alpha t} u^\alpha\, dt + e^{-\alpha t} u^{\alpha - 1}\, du$, ove α è un parametro reale. Una forma differenziale più semplice, che è esatta in tutto $\mathbb{R}^2$, è data da $-e^{-t} u\, dt + e^{-t}\, du$.

12.2. Esercizio. Cercare le soluzioni positive dell'equazione $u'(t) = -t/u(t)$ considerando la forma differenziale $t\, dt + y\, dy$ in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Cercare poi anche le soluzioni negative e meditare.

12.3. Osservazione. Il motivo per cui è in generale difficile presentare f in una forma (12.1) connessa con una forma differenziale esatta è il seguente: in condizioni di regolarità C^1, già a livello di condizioni necessarie, la forma differenziale deve essere chiusa. Ciò comporta che debbano essere soddisfatte contemporaneamente le condizioni

$$f(t, y) = -\frac{a(t, y)}{b(t, y)}, \quad b(t, y) \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial a(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial b(t, y)}{\partial t} \quad \text{per ogni } (t, y) \in \Omega. \tag{12.5}$$

Ricavando a dalla prima delle (12.5) ed inserendola nell'ultima uguaglianza, deduciamo

$$b(t,y) \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial b(t,y)}{\partial t} + f(t,y)\,\frac{\partial b(t,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\,b(t,y) = 0 \quad \text{per ogni } (t,y) \in \Omega .$$

Quanto ottenuto equivale poi alle condizioni (12.5) dato che, nota b, basta prendere $a = -bf$. Ma la ricerca di una tale funzione b, detta *fattore integrante*, corrisponde a risolvere una equazione alle derivate parziali, di regola più complicata dell'equazione differenziale ordinaria da cui si parte.

12.4. Esempio. Siano $\alpha : I \to \mathbb{R}$ e $\beta : J \to \mathbb{R}$ due funzioni continue negli intervalli aperti I e J rispettivamente e supponiamo che β non abbia zeri. Consideriamo l'equazione

$$u'(t) = \alpha(t)\,\beta(u(t)) \tag{12.6}$$

della quale cerchiamo soluzioni definite in intervalli inclusi in I che assumono valori in J. Seguendo le indicazioni (12.4) senza sforzarci nella ricerca di fattori integranti, siamo indotti a considerare, nell'aperto $\Omega = I \times J$, semplicemente la forma differenziale $\alpha(t)\,dt - du/\beta(u)$. Fortunatamente questa è chiusa, dunque esatta dato che Ω è convesso. Fissati $t_0 \in I$ e $u_0 \in J$, una sua primitiva (quella nulla in (t_0, u_0)), è data dalla formula

$$F(t,u) = A(t) - B(u) \quad \text{ove} \quad A(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\,ds \quad \text{e} \quad B(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{dy}{\beta(y)} \quad \text{per } (t,u) \in \Omega$$

e le soluzioni della (12.6) si ottengono risolvendo rispetto a u l'equazione $A(t) - B(u) = \text{costante}$.

12.5. Esempio. Consideriamo l'equazione lineare $u'(t) = \alpha(t)\,u(t) + \beta(t)$ ove α e β sono due funzioni reali continue in un intervallo aperto I. La prima forma differenziale da considerare sarebbe $(\alpha(t)u + \beta(t))\,dt - du$, ma questa non è chiusa in generale. Fissato $t_0 \in I$ poniamo allora

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\,ds \quad \text{per } t \in I$$

e riscriviamo l'equazione nella forma (12.5) ove

$$\Omega = I \times \mathbb{R}, \quad a(t,y) = e^{-\gamma(t)}\big(\alpha(t)\,y + \beta(t)\big) \quad \text{e} \quad b(t,y) = -e^{-\gamma(t)} \quad \text{per } (t,y) \in \Omega .$$

Allora la forma $a(t,y)\,dt + b(t,y)\,dy$ è chiusa, dunque esatta dato che Ω è convesso. In altre parole, con la terminologia dell'Osservazione 12.3, $-e^{-\gamma(t)}$ è un fattore integrante. Una primitiva F della forma differenziale in gioco (quella nulla in $(t_0, 0)$) è data dalla formula

$$F(t,y) = \int_{t_0}^{t} a(s,0)\,ds + \int_0^y b(t,z)\,dz = \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(s)}\beta(s)\,ds - ye^{-\gamma(t)} \quad \text{per } (t,y) \in \Omega$$

e una funzione $u : I \to \mathbb{R}$ verifica la (12.3) se e solo se

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(s)}\beta(s)\,ds - u(t)\,e^{-\gamma(t)} = c \quad \text{per ogni } t \in I$$

ove $c \in \mathbb{R}$ è un parametro arbitrario. Ritroviamo allora la formula ben nota

$$u(t) = ce^{\gamma(t)} + e^{\gamma(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(s)}\beta(s)\,ds \quad \text{per } t \in I$$

ove abbiamo scritto c anziché $-c$, dato che c e $-c$ svolgono lo stesso ruolo.

12.6. Funzioni olomorfe. Identificato $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ nel modo canonico, imponendo cioè l'uguaglianza $x+iy=(x,y)$ per ogni $x,y\in\mathbb{R}$, l'insieme delle funzioni $f:\Omega\to\mathbb{C}$ definite in un aperto Ω di $\mathbb{C}$ resta identificato a quello delle coppie $(u,v):\Omega\to\mathbb{R}^2$ di funzioni reali definite in Ω. In termini espliciti, la funzione f e la coppia (u,v) sono identificate fra loro quando $u(x,y)=\operatorname{Re}f(x+iy)$ e $v(x,y)=\operatorname{Im}f(x+iy)$ per ogni $(x,y)\in\Omega$ o equivalentemente $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ per ogni $x+iy\in\Omega$. Per semplicità assumiamo che u e v siano differenziabili. Supponiamo ora che, per ogni $z\in\Omega$, esista finita la *derivata complessa* (qui h sarà una variabile complessa)

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\,. \tag{12.7}$$

In particolare converge a $f'(z)$ la successione ottenuta prendendo $h=h_n$ nel rapporto incrementale non appena $\{h_n\}$ sia una successione infinitesima tale che $h_n\neq 0$ per ogni n. Deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(z+1/n)-f(z)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(z+i/n)-f(z)}{i/n}\,.$$

Esprimendo ciò in termini di u e v e aggiustando la posizione di i al secondo membro abbiamo

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{u(x+1/n,y)+iv(x+1/n,y)-u(x,y)-iv(x,y)}{1/n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{-iu(x,y+1/n)+v(x,y+1/n)+iu(x,y)-v(x,y)}{1/n}\end{aligned}$$

cioè $\partial_x u+i\partial_x v=-i\partial_y u+\partial_y v$ nel punto (x,y), con notazioni brevi per le derivate. Concludiamo che $\partial_x u=\partial_y v$ e $\partial_y u=-\partial_x v$ in ogni punto di Ω, vale a dire che

le due forme differenziali $v\,dx+u\,dy$ *e* $u\,dx-v\,dy$ *sono chiuse in* Ω. (12.8)

Tuttavia tali forme differenziali possono non essere esatte. Le (12.8) sono dette *condizioni di Cauchy-Riemann*. Una funzione dotata di derivata complessa in tutti i punti dell'aperto Ω è detta *olomorfa in* Ω e nella teoria delle funzioni olomorfe si dimostra poi molto di più, ad esempio che: *i)* il limite (12.7) esiste (finito) in ogni punto di Ω (cioè f è olomorfa) se e solo se u e v sono differenziabili in Ω e verificano le (12.8); *ii)* se f è olomorfa, la funzione $f':\Omega\to\mathbb{C}$ è automaticamente olomorfa, per cui, per iterazione, esistono in tutto Ω le derivate di f di tutti gli ordini e ha senso il problema della serie di Taylor; *iii)* se f è olomorfa e il disco $D=B_r(z_0)$ è incluso in Ω, la serie di Taylor di f di centro z_0 converge a $f(z)$ in ogni punto $z\in D$; *iv)* se f è olomorfa, allora u e v sono di classe C^∞ e, in aggiunta, risolvono l'equazione di Laplace, cioè verificano $\Delta u=0$ e $\Delta v=0$ in Ω.

12.7. Esercizio. Confermare quanto detto nel caso $f(z)=e^z$, $z\in\mathbb{C}$.

12.8. Esercizio. Considerare anche il caso $f(z)=1/z$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, nel quale una sola delle forme differenziali (12.8) è esatta. Verificare il tutto con cura.

12.9. Esercizio. Inventare una quantità smisurata di forme differenziali chiuse in aperti di $\mathbb{R}^2$.

12.10. Il gruppo fondamentale. Fissato un aperto connesso Ω di $\mathbb{R}^n$, diamo un cenno sulla costruzione del suo *gruppo fondamentale* $\pi(\Omega)$ (scritto anche $\pi_1(\Omega)$, primo gruppo di omotopia). Procediamo per piccoli passi, ciascuno dei quali può essere sviluppato dal lettore come esercizio.

i) Sia $x_0\in\Omega$ e sia $\mathcal{C}(x_0)$ l'insieme dei circuiti di Ω con estremi in x_0. Se C e C' sono due elementi di $\mathcal{C}(x_0)$, diciamo che C è equivalente a C' e scriviamo $C \sim C'$ quando esiste una Ω-omotopia $H : [a, b] \times [c, d] \to \Omega$ da C a C' tale che $H(a, \lambda) = H(b, \lambda) = x_0$ per ogni $\lambda \in [c, d]$. Si dimostra che $\sim$ è effettivamente una relazione di equivalenza.

ii) Si dimostra che, se $C_1, C_2, C'_1, C'_2 \in \mathcal{C}(x_0)$, dalle due equivalenze $C_1 \sim C'_1$ e $C_2 \sim C'_2$ segue l'equivalenza $C_1 + C_2 \sim C'_1 + C'_2$.

iii) Introdotto il quoziente $\pi(\Omega, x_0) = \mathcal{C}(x_0)/\sim$, denotiamo con $C \mapsto [C]$ la proiezione canonica di $\mathcal{C}(x_0)$ su $\pi(\Omega, x_0)$. Dunque, se $C \in \mathcal{C}(x_0)$, il simbolo $[C]$ denota la classe di equivalenza di C. Si dimostra che la formula $[C_1] * [C_2] = [C_1 + C_2]$ definisce un'operazione in $\pi(\Omega, x_0)$, cioè che $[C_1 + C_2]$ non dipende dai rappresentanti scelti per $[C_1]$ e $[C_2]$.

iv) Si dimostra che tutti i circuiti Ω-contraibili sono equivalenti. Detta E la loro classe di equivalenza, $\pi(\Omega, x_0)$ diventa un gruppo rispetto all'operazione $*$ avente E come elemento neutro.

v) Fissato un cammino C_0 di Ω, siano x e y il primo e il secondo estremo di C_0. Considerata l'applicazione $F : \mathcal{C}(x) \to \mathcal{C}(y)$ data dalla formula $F(C) = -C_0 + C + C_0$, Si controlla che essa è ben definita e si dimostra che esiste una e una sola applicazione $\mathcal{F} : \pi(\Omega, x) \to \pi(\Omega, y)$ che verifica $\mathcal{F}([C]) = [F(C)]$ per ogni $C \in \mathcal{C}(x)$, ove è inteso che nei due membri della formula lo stesso simbolo $[\,\cdot\,]$ denoti le due rispettive proiezioni canoniche.

vi) Si dimostra che $\mathcal{F}$ è un isomorfismo da $(\pi(\Omega, x), *)$ su $(\pi(\Omega, y), *)$, ove lo stesso simbolo $*$ denota l'operazione del punto *iii*) in ciascuno dei due gruppi.

vii) Il *gruppo fondamentale* $\pi(\Omega)$ è il gruppo astratto al quale sono isomorfi tutti i gruppi $(\pi(\Omega, x_0), *)$ con $x_0 \in \Omega$.

Chiaramente $\pi(\Omega) = \{E\}$ quando Ω è semplicemente connesso, mentre risulta $\pi(\Omega) = (\mathbb{Z}, +)$ se $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ per la Proposizione 9.23 e l'additività dell'indice di avvolgimento.

12.11. Osservazione. Tuttavia va detto che non serve passare dalle parametrizzazioni ai cammini tramite quoziente: si può definire direttamente l'omotopia fra parametrizzazioni con l'avvertenza di scegliere un dominio comune a tutte le parametrizzazioni (viene che due parametrizzazioni equivalenti nel senso della Definizione 3.4, naturalmente ora con lo stesso dominio, risultano omotope con la nuova nozione di omotopia fra parametrizzazioni anziché fra cammini; corrispondentemente i termini cammino e arco vengono di solito usati con un significato diverso). Il risultato è che si fa un solo passaggio al quoziente anziché due, ma la sostanza non cambia. Va anche detto che la costruzione di $\pi(\Omega)$ non necessita di ipotesi sulle derivate (per noi motivate dalla successiva teoria dell'integrazione delle forme differenziali). Dunque la stessa costruzione può essere ripetuta a partire da parametrizzazioni solo continue. Ne viene che tutto ciò si può fare rimpiazzando l'aperto connesso Ω con qualcosa di molto più generale, sempre che si possa parlare di connessione per archi, e il caso tipico della Topologia algebrica è quello degli spazi topologici connessi per archi (già nel caso di un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ non connesso il gruppo $(\pi(\Omega, x), *)$ può dipendere da x in modo essenziale, cioè cambiando x si può ottenere un gruppo non isomorfo a quello di partenza). Qui notiamo solo che potremmo prendere come Ω, ad esempio, una circonferenza, oppure una superficie di $\mathbb{R}^3$ immagine tramite una funzione continua di un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$: la connessione per archi sarebbe garantita in entrambi i casi. Ad esempio il gruppo fondamentale di una circonferenza è il gruppo additivo degli interi, come si vede adattando la dimostrazione della Proposizione 9.23 alla situazione presente (si ha semplicemente $\rho(t) = 1$), mentre quello di una superficie sferica di $\mathbb{R}^3$ è il gruppo banale ridotto al solo elemento neutro. Osserviamo infine che, anche in casi semplici, il gruppo $\pi(\Omega)$ non è abeliano. Ad esempio, se Ω è il piano privato di due punti, $\pi(\Omega)$ è il gruppo libero su due generatori. Per questo motivo abbiamo usato qui la notazione $*$ di tipo moltiplicativo. Al contrario abbiamo usato la notazione additiva per la somma di cammini (Definizione 3.12) perché, più che a questioni di tipo algebrico, eravamo interessati all'integrale delle forme differenziali. In particolare la formulazione della proprietà additiva dell'integrale risulta più suggestiva con la notazione additiva che non con quella moltiplicativa.

Indice