Alcuni risultati sugli spazi di Hilbert

Introduzione

In queste pagine sono presentati alcuni risultati di analisi funzionale utili nella trattazione delle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico dal punto di vista dell'impostazione variazionale. Per semplicità supponiamo reali tutti gli spazi che intervengono e, sebbene qualcuno dei risultati possa essere esteso al caso degli spazi di Banach, per uniformità consideriamo solo il quadro hilbertiano.

1. Un'equazione variazionale astratta

Il primo risultato che presentiamo generalizza il Teorema di Riesz sui funzionali lineari e continui sugli spazi di Hilbert, si riferisce all'*equazione variazionale*

$$u \in V; \qquad a(u,v) = L(v) \qquad \forall\, v \in V, \tag{1.1}$$

e non richiede la simmetria della forma a. Occorre la seguente

1.1. Definizione. *Siano V uno spazio di Hilbert e a una forma bilineare e continua su $V \times V$. Si dice che la forma a è $V-$ellittica quando esiste $\alpha > 0$ tale che*

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \qquad \forall\, v \in V \tag{1.2}$$

e ogni $\alpha > 0$ verificante la (1.2) *si chiama costante di $V-$ellitticita della forma considerata.* □

Nel seguito $\|\cdot\|_*$ denota la norma duale della norma $\|\cdot\|$ dello spazio di Hilbert V di partenza.

1.2. Teorema di Lax–Milgram. *Siano V uno spazio di Hilbert, a una forma bilineare e continua su $V \times V$ e $L \in V'$. Se la forma a è $V-$ellittica, allora esiste una e una sola soluzione u dell'equazione variazionale* (1.1) *e tale soluzione u verifica la disuguaglianza*

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_* \tag{1.3}$$

ove α è una costante di ellitticità della forma a. □

Dimostrazione. Per quanto riguarda la (1.3), possiamo supporre $u \neq 0$, dato che in caso contrario essa è banalmente vera. Scegliendo $v = u$ nell'equazione (1.1) otteniamo

$$\alpha \|u\|^2 \leq a(u,u) = L(u) \leq \|L\|_* \|u\|$$

e, dividendo per $\alpha \|u\|$, la stima segue. Questo dimostra in particolare anche l'unicità della soluzione.

Per quanto riguarda l'esistenza, se la forma è anche simmetrica la tesi segue immediatamente dal Teorema di Riesz: infatti possiamo considerare la funzione reale

$$v \mapsto \big(a(v,v)\big)^{1/2}, \qquad v \in V, \tag{1.4}$$

che, per le ipotesi fatte su a, è una norma hilbertiana equivalente a quella preesistente e, dunque, induce la stessa topologia e non altera lo spazio duale. Nel caso generale la dimostrazione dell'esistenza è invece piuttosto complessa. Presentiamo due dimostrazioni, entrambe interessanti dal punto di vista tecnico: la prima valida in generale, l'altra valida nell'ipotesi ulteriore che V sia separabile.

Metodo del prolungamento rispetto al parametro. Introduciamo le parti simmetrica a_s e antisimmetrica b di a definite per $u, v \in V$ dalle uguaglianze

$$a_s(u,v) = \frac{1}{2}\Big(a(u,v) + a(v,u)\Big) \qquad \text{e} \qquad b(u,v) = \frac{1}{2}\Big(a(u,v) - a(v,u)\Big) \tag{1.5}$$

e la famiglia di forme bilineari

$$a^\lambda(u,v) = a_s(u,v) + \lambda b(u,v), \qquad u, v \in V,$$

dipendenti dal parametro reale λ. Si noti che $a^0 = a_s$ e $a^1 = a$. L'idea della dimostrazione è allora la seguente: a partire dal caso $\lambda = 0$, che è già stato risolto dato che la forma a^0 è anche simmetrica, cerchiamo di incrementare λ, eventualmente per piccoli passi, fino ad arrivare al caso $\lambda = 1$, cioè al caso che ci interessa. In questo procedimento sarà essenziale lasciar variare anche il funzionale L.

Osserviamo subito che, dette M e α le costanti di continuità e di $V-$ellitticità della forma a, per ogni $u, v \in V$ risulta

$$|b(u,v)| \le M\,\|u\|\,\|v\|, \quad |a^\lambda(u,v)| \le M_\lambda\,\|u\|\,\|v\| \quad \text{e} \quad a^\lambda(v,v) \ge \alpha\,\|v\|^2 \tag{1.6}$$

ove $M_\lambda = M(1 + |\lambda|)$. Dunque b è bilineare e continua e a^λ è bilineare, continua e $V-$ellittica e la costante di ellitticità di a^λ è ancora α.

Osservato ciò consideriamo, per ogni λ, il problema di trovare, per $L \in V'$, un elemento u tale che

$$u \in V; \qquad a^\lambda(u,v) = L(v) \qquad \forall\, v \in V \tag{1.7}$$

e costruiamo un numero $\delta > 0$, dipendente solo dalle costanti M e α, tale che, se per un certo λ_0 il problema (1.7) è risolubile con soluzione unica in corrispondenza al valore $\lambda = \lambda_0$ e a ogni $L \in V'$, allora la stessa cosa avviene per ogni λ tale che $|\lambda - \lambda_0| \le \delta$, cioè che, per ciascuno di tali valori di λ, il problema (1.7) è risolubile con soluzione unica in corrispondenza a ogni $L \in V'$.

Fissiamo dunque λ_0 nelle condizioni dette e, dato ad arbitrio $L \in V'$, cerchiamo di risolvere il problema (1.7) per altri valori di λ. A questo scopo riscriviamo (1.7) nel modo equivalente

$$u \in V; \qquad a^{\lambda_0}(u,v) = L(v) + (\lambda_0 - \lambda)\, b(u,v) \qquad \forall\, v \in V \tag{1.8}$$

e introduciamo il problema ausiliario

$$u \in V; \qquad a^{\lambda_0}(u,v) = L(v) + (\lambda_0 - \lambda)\, b(w,v) \qquad \forall\, v \in V \tag{1.9}$$

ove $w \in V$ è assegnato. Osservato che il funzionale

$$v \mapsto L(v) + (\lambda_0 - \lambda)\, b(w,v), \qquad v \in V,$$

è lineare e continuo, concludiamo che, grazie all'ipotesi fatta su λ_0, per ogni $w \in V$, il problema (1.9) ha una e una sola soluzione. Allora possiamo considerare l'applicazione $F : V \to V$ che a ogni $w \in V$ associa la corrispondente soluzione del problema (1.9) e osservare che le soluzioni del problema (1.8), equivalente al problema (1.7) a parità di L, sono tutti e soli i punti fissi di F. In vista dell'applicazione del Teorema delle contrazioni, cerchiamo di vedere sotto quali condizioni su λ la funzione F è una contrazione in V.

Siano $w_1, w_2 \in V$ ad arbitrio e siano u_1 e u_2 le immagini corrispondenti tramite F, cioè le soluzioni del problema (1.9) in corrispondenza ai dati $w = w_1$ e $w = w_2$ rispettivamente. In ciascuna delle due equazioni variazionali l'elemento v è a nostra disposizione e possiamo scegliere $v = u_1 - u_2$ in entrambe. Sottraendo membro a membro le due equazioni ottenute e semplificando, abbiamo

$$a^{\lambda_0}(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = (\lambda_0 - \lambda)\, b(w_1 - w_2, u_1 - u_2).$$

Usando le (1.6) deduciamo allora

$$\begin{aligned}&\alpha \, \|u_1 - u_2\|^2 \le a^{\lambda_0}(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \le \\ &|\lambda_0 - \lambda| \, |b(w_1 - w_2, u_1 - u_2)| \le M|\lambda - \lambda_0| \; \|w_1 - w_2\| \; \|u_1 - u_2\| \, .\end{aligned}$$

Otteniamo allora la stima

$$\|u_1 - u_2\| \le \frac{M}{\alpha} \, |\lambda - \lambda_0| \; \|w_1 - w_2\| \, , \tag{1.10}$$

valida qualunque siano w_1, w_2, λ e L.

Allora possiamo concludere rapidamente: potendo senz'altro supporre $M > 0$ scegliamo $\delta = \alpha/(2M)$, osservando che δ dipende solo da M e da α, in particolare non da λ_0 e dal funzionale L, e tiriamo le somme.

Se λ_0 è nelle condizioni dette e se $|\lambda - \lambda_0| \le \delta$, allora l'applicazione F è una contrazione in V con costante di contrazione $1/2$. Dunque il Teorema delle contrazioni assicura che F ha uno e un solo punto fisso, cioè che il problema (1.8), e quindi anche il problema (1.7), ha una e una sola soluzione in corrispondenza a ogni $L \in V'$.

Allora, partendo dal valore $\lambda = 0$, in corrispondenza al quale la forma è simmetrica, e procedendo con passo δ, in un numero finito di passi concludiamo che anche il valore $\lambda = 1$ ha la proprietà richiesta: per ogni $L \in V'$ il problema (1.7) con $\lambda = 1$ ha una e una sola soluzione. Ciò conclude la dimostrazione dell'esistenza e ritroviamo anche dell'unicità della soluzione.

Metodo di Faedo–Galerkin. Supponendo V separabile, scegliamo una successione $\{V_n\}$ non decrescente di sottospazi di V di dimensione finita la cui unione U sia densa in V e introduciamo il problema approssimato

$$u \in V_n; \qquad a(u, v) = L(v) \qquad \forall\, v \in V_n. \tag{1.11}$$

Osserviamo subito che esso ha soluzione unica. Infatti, detta $(w_1, \ldots, w_m)$ una base ordinata di V_n, ove $m = \dim V_n$, trovare u soluzione di (1.11) equivale a trovare una $m-$ upla $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ di $\mathbf{R}^m$ tale che, posto $u = \sum_{j=1}^m x_j w_j$, risulti

$$a(u, w_i) = L(w_i) \qquad \text{per } \; i = 1, \ldots, m. \tag{1.12}$$

Ora, chiaramente, le (1.12) si scrivono nella forma $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ove $y_i = L(w_i)$ e A è la matrice quadrata di elemento generico dato dalla formula $a_{ij} = a(w_j, w_i)$; dunque basta vedere che A è non singolare e, per questo, vediamo che A è definita positiva. Fissato infatti $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$ non nullo ad arbitrio e posto $v_{\mathbf{z}} = \sum_{j=1}^m z_j w_j$, risulta $v_{\mathbf{z}} \neq 0$ e

$$\mathbf{z}^t A\mathbf{z} = a(v_{\mathbf{z}}, v_{\mathbf{z}}) \geq \alpha \|v_{\mathbf{z}}\|^2 > 0.$$

Dunque il problema (1.11) ha una e una sola soluzione che denotiamo con u_n.

Supponendo senz'altro V di dimensione infinita, dimostriamo che la successione $\{u_n\}$ è limitata. Si ha infatti

$$\alpha \|u_n\|^2 \leq a(u_n, u_n) = L(u_n) \leq \|L\|_* \|u_n\|$$

da cui deduciamo $\|u_n\| \leq \|L\|_* / \alpha$ per ogni n.

Per il Teorema di compattezza debole dalla successione considerata si può estrarre una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ convergente debolmente a un elemento $u \in V$. Dimostriamo che u risolve il problema (1.1) proposto, procedendo in due tappe.

Sia dapprima $v \in U$: allora possiamo fissare m tale che $v \in V_m$. Per k abbastanza grande, diciamo $k \geq k^*$, si ha $n_k \geq m$ così che $v \in V_{n_k}$ grazie all'ipotesi di monotonia fatta sulla successione di sottospazi. Abbiamo allora

$$a(u_{n_k}, v) = L(v) \qquad \forall\, k \geq k^*$$

e ora vediamo che possiamo passare al limite e ottenere la stessa uguaglianza con u al posto di u_{n_k}. Infatti la forma

$$w \mapsto a(w, v), \qquad w \in V,$$

è lineare e continua, cioè un elemento di V', così che

$$a(u_{n_k}, v) \to a(u, v)$$

dato che $u_{n_k} \rightharpoonup u$. Dunque $a(u, v) = L(v)$ per ogni $v \in U$.

Sia infine $v \in V$. Siccome U è denso in V, possiamo scegliere una successione $\{v_i\}$ di elementi di U convergente a v addirittura fortemente. Siccome $a(u, v_i) = L(v_i)$ per ogni i grazie alla tappa precedente, sfruttando la continuità della forma a e del funzionale L, concludiamo che $a(u, v) = L(v)$. $\square$

1.3. Osservazione. Se a non è $V-$ ellittica ma solo V_0-ellittica, ove V_0 è un sottospazio chiuso di V, ha una e una sola soluzione il problema ottenuto sostituendo V con V_0 nella (1.1). Infatti anche V_0 è uno spazio di Hilbert e le ipotesi del Teorema di Lax–Milgram sono soddisfatte. In tali condizioni possiamo anche sostituire $\|L\|_*$ con la norma della restrizione di L a V_0.

1.4. Osservazione. Per quanto riguarda la costruzione data dal metodo di Galerkin possiamo notare due fatti: (i) non solo una sottosuccessione ma tutta la successione $\{u_n\}$ converge debolmente a u; (ii) la convergenza è in realtà forte.

Ricordando che la successione $\{u_n\}$ costruita è limitata, la prima affermazione segue facilmente applicando allo spazio V munito della topologia debole il seguente risultato di carattere generale, spesso utile e di dimostrazione immediata: se $\mathcal{V}$ è uno spazio topologico separato, perché una successione $\{u_n\}$ converga in $\mathcal{V}$ è (necessario e) sufficiente che siano verificate le condizioni seguenti: *a*) da ogni sottosuccessione di $\{u_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente; *b*) se due sottosuccessioni estratte da $\{u_n\}$ convergono, allora esse convergono allo stesso limite.

La seconda affermazione, che ridimostra anche la prima, si controlla come segue. Per ogni n e per ogni $v \in V_n$, essendo $v - u_n \in V_n$, valgono entrambe le uguaglianze

$$a(u, v - u_n) = L(v - u_n) \qquad \text{e} \qquad a(u_n, v - u_n) = L(v - u_n).$$

Sottraendo membro a membro deduciamo per ogni n e per ogni $v \in V_n$

$$a(u - u_n, u - u_n) - a(u - u_n, u - v) = a(u - u_n, v - u_n) = 0.$$

Detta M la costante di continuità della forma, segue allora

$$\alpha \, \|u - u_n\|^2 \le a(u - u_n, u - u_n) = a(u - u_n, u - v) \le M \, \|u - u_n\| \, \|u - v\|$$

e sfruttando l'arbitrarietà di v in V_n deduciamo

$$\|u - u_n\| \le \frac{M}{\alpha} \operatorname{dist}(u, V_n).$$

Siccome la successione di sottospazi cresce e l'unione U è densa in V, l'ultimo membro è infinitesimo per $n \to \infty$ e la convergenza forte segue.

Si noti che la velocità di convergenza di $\{u_n\}$ a u è la stessa della migliore approssimazione di u con elementi dei sottospazi. Dunque u_n è un'approssimazione accurata o meno di u a seconda che u si possa o meno approssimare bene con elementi del sottospazio V_n. Questa idea sta alla base di molti metodi numerici di approssimazione per equazioni a derivate parziali. □

Se la forma bilineare e continua a è anche *simmetrica* la soluzione u è il punto di minimo del funzionale quadratico

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v), \qquad v \in V, \tag{1.13}$$

e si usa dire che la (1.1) è *l'equazione di Eulero* del problema di minimizzazione del funzionale (1.13). Precisamente vale il risultato seguente:

1.5. Teorema. *Nelle ipotesi del Teorema di Lax–Milgram si supponga che la forma* a *sia anche simmetrica. Allora il funzionale* J *dato dalla* (1.13) *ha uno e un solo punto di minimo* u *e tale* u *coincide con la soluzione dell'equazione variazionale* (1.1). □

Dimostrazione. Basta verificare i punti seguenti: (*i*) il funzionale ha almeno un punto di minimo; (*ii*) ogni punto di minimo del funzionale risolve la (1.1); (*iii*) l'equazione variazionale (1.1) ha al massimo una soluzione.

Siccome la terza affermazione è già stata dimostrata, passiamo alle altre due, iniziando dalla prima. Sia dunque $\{u_n\}$ una successione minimizzante, cioè tale che la successione di termine generale $\lambda_n = J(u_n)$ converga verso l'estremo inferiore λ di J. Controlliamo che successione $\{u_n\}$ è limitata. Infatti, in caso contrario, la disuguaglianza

$$\lambda_n = J(u_n) \ge \frac{\alpha}{2} \, \|u_n\|^2 - \|L\|_* \, \|u_n\|$$

implicherebbe $\lambda = \lim \lambda_{n_k} = +\infty$ per un'opportuna sottosuccessione. Ciò prova la limitatezza della successione.

Dunque, usando il Teorema di compattezza debole, vediamo che $\{u_n\}$ ha una sottosuccessione convergente debolmente. Denotata ancora con $\{u_n\}$ tale sottosuccessione e detto u il suo limite, risulta

$$a(u,u) \le \liminf_{n\to\infty} a(u_n,u_n)$$

in quanto la (1.4) è una norma equivalente a $\|\cdot\|$. Segue

$$J(u) \le \liminf_{n\to\infty} J(u_n) = \lambda.$$

Quindi u è un punto di minimo.

Veniamo al punto (ii). Sia dunque u un punto di minimo per J e dimostriamo che $a(u,v) = L(v)$ per ogni $v \in V$. Fissato v, consideriamo la funzione φ definita dalla formula

$$\varphi(t) = J(u+tv), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Risulta $\varphi(0) \le \varphi(t)$ per ogni t e quindi $\varphi'(0) = 0$ ammesso che la derivata esista. Ma un calcolo immediato mostra che

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}a(u,u) + t\,a_s(u,v) + \frac{t^2}{2}\,a(v,v) - L(u) - t\,L(v)$$

così che $\varphi'(0) = a_s(u,v) - L(v)$. Essendo a simmetrica, concludiamo. $\square$

1.6. Osservazione. Si noti invece che, se a non è simmetrica, la soluzione u *non è in generale punto di minimo di un funzionale di tipo quadratico*: infatti la soluzione del problema di minimo coincide con la soluzione del problema ottenuto da (1.1) sostituendo a con la sua parte simmetrica a_s data dalla prima delle (1.5) e la sostituzione di una forma a con a_s porta a un problema con soluzione in generale diversa, come si vede chiaramente nel caso finito–dimensionale.

1.7. Osservazione. Dal teorema precedente si possono facilmente dedurre come corollari il Teorema di Riesz e il Teorema delle proiezioni, indipendentemente dunque dal Teorema di Lax–Milgram. Infatti il punto della dimostrazione data in cui si usano il Teorema di compattezza debole e la semicontinuità inferiore della norma rispetto alla convergenza debole può essere facilmente modificato: usando la regola del parallelogrammo si vede che la successione minimizzante è una successione di Cauchy, dunque fortemente convergente.

2. Due risultati di teoria spettrale

In questo paragrafo estendiamo alla dimensione infinita il risultato di diagonalizzazione delle matrici reali simmetriche, limitandoci tuttavia a una situazione molto particolare.

2.1. Definizione. *Siano V e H due spazi di Hilbert tali che V sia un sottospazio vettoriale di H. Diciamo che l'inclusione di V in H è compatta quando*

(2.1) *se* $u_n \rightharpoonup 0$ *in* V *allora* $u_n \to 0$ *in* H. $\square$

Si noti che la compattezza dell'inclusione implica la continuità della stessa: infatti la convergenza forte in V implica la convergenza debole in V allo stesso limite.

2.2. Ipotesi e notazioni. *Siano dati due spazi di Hilbert V e H e si supponga che V sia un sottospazio vettoriale di H. Siano inoltre a una forma bilineare e continua su $V \times V$ e $(\cdot,\cdot)$ il prodotto scalare di H. Siano infine $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$ le norme in V e in H rispettivamente.*

Supporremo che V sia un sottoinsieme denso di H, che l'inclusione di V in H sia compatta e che la forma a sia anche simmetrica e verifichi la condizione seguente:

$$\exists\, \mu \in \mathbf{R} \quad \exists\, \alpha > 0: \qquad a(v,v) + \mu \cdot |v|^2 \geq \alpha\, \|v\|^2 \qquad \forall\, v \in V. \ \square \tag{2.2}$$

Dato $L \in V'$ cerchiamo un elemento u nelle condizioni seguenti:

$$u \in V; \qquad a(u,v) = \lambda \cdot (u,v) + L(v) \qquad \forall\, v \in V. \ \square \tag{2.3}$$

Il caso del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ relativo alla matrice simmetrica A si inquadra nel problema precedente con le scelte seguenti:

$$V = H = \mathbf{R}^n, \qquad a(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{y}^t A\mathbf{x} \qquad \text{e} \qquad L(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^t\mathbf{b}$$

ove V e H sono muniti entrambi della norma euclidea $|\cdot|$.

L'ipotesi di compattezza dell'inclusione è soddisfatta in quanto gli spazi hanno dimensione finita; la simmetria della forma è garantita dalla simmetria della matrice; l'ipotesi (2.2) è pure verificata: infatti essa equivale all'esistenza di $\mu \in \mathbf{R}$ e di $\alpha > 0$ tali che

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + \mu \geq \alpha \qquad \text{per} \ \ |\mathbf{x}| = 1$$

e quindi, perché essa sia soddisfatta, basta scegliere

$$M = \inf_{|\mathbf{x}|=1} \mathbf{x}^t A\mathbf{x}, \qquad \mu = 1 - M \qquad \text{e} \qquad \alpha = 1.$$

Nel caso della dimensione infinita, invece, l'analogo del numero M è in generale infinito e l'ipotesi (2.2) diventa restrittiva.

Alla luce dell'osservazione precedente appare naturale definire autovalori e autospazi del problema (2.3) come segue:

2.3. Definizione. *Con le ipotesi e le notazioni 2.2, un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ è detto autovalore del problema variazionale* (2.3) *quando ha almeno una soluzione non nulla il problema omogeneo associato*

$$u \in V; \qquad a(u,v) = \lambda \cdot (u,v) \qquad \forall\, v \in V. \tag{2.4}$$

Se λ è un autovalore, l'insieme delle soluzioni del problema (2.4) *è detto autospazio associato a λ e viene denotato con V_λ e gli elementi non nulli dell'autospazio V_λ vengono detti autovettori associati a λ.* $\square$

Date le definizioni preliminari e posto il problema, enunciamo i risultati della teoria. Dato che il caso finito–dimensionale è noto al lettore, ci limitiamo al caso in cui i due spazi V e H abbiano dimensione infinita.

2.4. Teorema. *Nelle ipotesi e con le notazioni 2.2, supponiamo* V *e* H *di dimensione infinita. Allora ogni autovalore è* $> -\mu$ *e l'insieme degli autovalori è l'immagine di una successione divergente a* $+\infty$ *.*

Inoltre ogni autospazio ha dimensione finita e gli autospazi associati ad autovalori diversi sono fra loro ortogonali rispetto al prodotto di H *.*

Infine, scelta per ogni autospazio V_λ *una base* $\mathcal{B}_\lambda$ *costituita da autovettori e ortogonale rispetto al prodotto di* H *, l'unione delle basi* $\mathcal{B}_\lambda$ *ottenuta al variare di* λ *fra gli autovalori è un sistema ortogonale e completo in* H *e, contemporaneamente, un sistema completo in* V *.* $\square$

2.5. Osservazione. Questo teorema consente, in particolare, di ordinare in modo canonico gli autovalori. Siccome essi costituiscono una successione divergente a $+\infty$, l'insieme degli autovalori ha minimo e possiamo denotare con λ' l'autovalore minimo, detto comunemente *primo autovalore*. Stabilito ciò possiamo chiamare λ'' l'autovalore successivo, cioè il minimo degli autovalori diversi da λ' , che pure esiste perché la successione diverge a $+\infty$. Proseguendo allo stesso modo si ordinano gli autovalori successivi e si ottiene una successione crescente contenente tutti gli autovalori. Osserviamo che la dimensione dell'autospazio viene detta *molteplicità dell'autovalore corrispondente*.

Ma si può fare di meglio. Siccome ogni autospazio ha dimensione finita, possiamo ripetere nella successione un autovalore un numero di volte pari alla dimensione dell'autospazio corrispondente. In tal modo otteniamo una successione non decrescente e divergente

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \dots$$

più ricca di informazioni.

Nel seguito resta sempre inteso che gli autovalori sono numerati come abbiamo detto. Resta inteso inoltre, quando parliamo di un sistema $\{u_n\}$ ortogonale e completo di autovettori corrispondenti, che ci sia concordanza fra gli indici in modo che u_n sia un autovettore associato all'autovalore λ_n . In tal modo, fissato un autovalore λ , questo compare nella successione degli autovalori in corrispondenza a un numero finito di indici consecutivi e gli autovettori numerati con quegli stessi indici costituiscono una base per l'autospazio corrispondente, ortogonale rispetto al prodotto scalare di H .

Osserviamo infine che, in generale, il sistema degli autovettori *non è ortogonale rispetto al prodotto scalare di* V che, si noti, non interviene mai esplicitamente nel problema. Si ha invece

$$a(u_n, u_m) = 0 \qquad \text{per } n \ne m \tag{2.5}$$

grazie alla (2.4) con $\lambda = \lambda_n$, $u = u_n$ e $v = u_m$ e all'ortogonalità del sistema rispetto al prodotto scalare di H .

2.6. Teorema dell'alternativa di Fredholm. *Nelle ipotesi e con le notazioni 2.2 supponiamo* V *e* H *di dimensione infinita e siano* $\{\lambda_n\}$ *la successione degli autovalori e* $\{u_n\}$ *un sistema ortogonale e competo in* H *e completo in* V *costituito da autovettori. Allora vale l'alternativa data dai due casi seguenti:*

a) λ *non è un autovalore. In tal caso, per ogni* $L \in V'$ *, il problema* (2.3) *ha una e una sola soluzione. Essa è data da*

$$(2.6) \qquad u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(u_n)}{(\lambda_n - \lambda)\,|u_n|^2}\, u_n$$

nel senso della convergenza di V *e verifica la maggiorazione*

$$(2.7) \qquad \|u\| \le M_\lambda \, \|L\|_*$$

ove la costante M_λ *non dipende da* L *né da* u *.*

b) λ *è un autovalore. In tal caso il problema* (2.3) *ha almeno una soluzione se e solo se* L *verifica la condizione di compatibilità*

$$(2.8) \qquad L(w) = 0 \qquad \text{per ogni soluzione } w \text{ del problema omogeneo (2.4)}$$

e, se tale condizione è soddisfatta, il problema (2.3) *ha infinite soluzioni, una sola delle quali è anche ortogonale all'autospazio* V_λ *rispetto al prodotto di* H *. Questa è data dalla formula*

$$(2.9) \qquad u = \sum_{n \notin \mathbf{N}_\lambda} \frac{L(u_n)}{(\lambda_n - \lambda)\,|u_n|^2}\, u_n$$

nel senso della convergenza di V *, ove* $\mathbf{N}_\lambda = \{n \in \mathbf{N} : \quad \lambda_n = \lambda\}$ *, e vale la maggiorazione* (2.7) *ove, anche in questo caso, la costante* M_λ *non dipende da* L *né da* u *. Infine l'insieme delle soluzioni è dato dai vettori del tipo* $u+w$ *al variare di* w *nell'autospazio* V_λ *e* u *è l'unica soluzione che rende minima, nell'ambito di tutte le soluzioni, la norma di* H *.* $\square$

2.7. Osservazione. I coefficienti delle (2.6) e (2.9) si ottengono inserendo

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n \qquad \text{e} \qquad u = \sum_{n \notin \mathbf{N}_\lambda} c_n u_n$$

nel problema (2.3) e scambiando l'operazione di serie con la forma a e il prodotto scalare. Questo procedimento è giustificato dalla convergenza in V, come è mostrato nella dimostrazione data tra breve.

2.8. Osservazione. Il problema proposto può essere inquadrato nella teoria astratta di Fredholm degli operatori compatti come segue. Identifichiamo H con il suo duale H' mediante il Teorema di Riesz nel senso seguente: se $u \in H$, denotiamo ancora con u l'elemento di H' dato da $v \mapsto (u, v)$. Identifichiamo inoltre H' a un sottospazio vettoriale di V' nel modo seguente: se $u \in H'$, denotiamo ancora con u il funzionale su V dato da

$$v \mapsto {}_{H'}\langle u, v\rangle_H \,, \qquad v \in V,$$

cioè la restrizione di u a V, che risulta effettivamente un elemento di V'. Si noti che tale identificazione è lecita in quanto V è denso in H, così che funzionali diversi su H non vengono identificati allo stesso funzionale su V. Combinando le due identificazioni abbiamo allora la catena seguente

$$V \subseteq H = H' \subseteq V'$$

e le due inclusioni sono continue anche se l'inclusione di V in H non fosse compatta: ciò che occorre, infatti, è che V sia incluso in H con continuità e che V sia denso in H. In tali condizioni H risulta automaticamente denso in V'. Tutte le volte che tali condizioni sono soddisfatte e che le identificazioni precedenti vengono effettuate si dice che (V, H, V') è una *terna hilbertiana*. Si noti che risulta

$$_{V'}\langle u, v\rangle_V = (u, v) \qquad \forall\, u \in H \quad \forall\, v \in V$$

proprio grazie alle identificazioni precedenti.

Riprendiamo allora il problema (2.3), osservando che il caso $\lambda = -\mu$ non offre problemi: infatti, se $\lambda = -\mu$, la soluzione u esiste ed è unica grazie alla (2.2). Supponiamo dunque $\lambda + \mu \neq 0$. Introdotto l'operatore $B \in \mathcal{L}(V, V')$ definito dalla formula

$$_{V'}\langle Bu, v\rangle_V = a(u, v) + \mu \cdot (u, v), \qquad u, v \in V,$$

e osservato che esso è un isomorfismo, le (2.3) equivalgono alle seguenti

$$u \in V; \qquad B^{-1}u = \frac{1}{\lambda + \mu}u - w, \tag{2.10}$$

ove l'inverso B^{-1} è lineare e continuo e $w = (B^{-1}L)/(\lambda + \mu)$ è un elemento di V. Detta infine C la restrizione di B^{-1} a H, si vede immediatamente che le (2.10) equivalgono al problema seguente

$$u \in H; \qquad Cu = \frac{1}{\lambda + \mu}u - w, \tag{2.11}$$

le soluzioni del quale, infatti, appartengono automaticamente a V dato che $w, Cu \in V$.

Ora C è lineare e continuo da H in sé e risulta, anzi, compatto se l'inclusione di V in H è anche compatta. Infatti, se $u_n \rightharpoonup 0$ in H, allora $u_n \rightharpoonup 0$ in V' in quanto H è incluso in V' con continuità; segue $B^{-1}u_n \rightharpoonup 0$ in V dato che B^{-1} è continuo da V' in V; ciò significa $Cu_n \rightharpoonup 0$ in V; usando infine la compattezza dell'inclusione di V in H concludiamo che vale la convergenza forte $Cu_n \to 0$ in H.

Osservato ciò, la teoria degli operatori compatti permette di concludere rapidamente, con il legame seguente fra gli autovalori dei due problemi: abbiamo

$$\lambda_n = -\mu + \frac{1}{\nu_n}$$

ove ν_n è il generico autovalore non nullo dell'operatore C. $\square$

Tuttavia noi desideriamo presentare una dimostrazione diretta dei risultati enunciati, premettendo un'osservazione. Se $\{u_n\}$ è una successione di elementi indipendenti di uno spazio di Hilbert, posto $w_1 = u_1$ e definiti gli altri vettori w_n per ricorrenza mediante le formule

$$W_n = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\} \qquad \text{e} \qquad w_{n+1} = P_{W_n^\perp}\, u_{n+1} \qquad \text{per} \;\; n \geq 1,$$

si verifica senza particolari difficoltà che $\{w_n\}$ è un sistema ortogonale che non contiene 0 e che, per ogni n, i vettori $w_1, \dots, w_n$ generano ancora W_n. Questo *procedimento di ortogonalizzazione* estende quello noto per gli spazi euclidei.

2.9. Osservazione. Segnaliamo senza dimostrarlo che, se si rinuncia alla simmetria della forma a, per il Teorema dell'alternativa di Fredholm vale una versione più debole che non deve fare riferimento a sistemi ortogonali e completi, l'esistenza dei quali non è più garantita. Per quanto riguarda il caso $a)$ viene a cadere la (2.6) ma le altre affermazioni continuano a valere; nel caso $b)$ occorre rinunciare alla (2.9) e modificare la (2.8) come segue: $L(w) = 0$ per ogni soluzione w del *problema omogeneo aggiunto*

$$w \in V, \qquad a(v, w) = \lambda \cdot (w, v) \qquad \forall\, v \in V,$$

nel quale, rispetto al problema (2.4), sono scambiati gli argomenti di a.

2.10. Dimostrazione del Teorema 2.4. Costruiamo il primo autovalore. Osservato che, se λ e u sono un autovalore e un autovettore corrispondenti e se $|u| = 1$, allora $a(u, u) = \lambda |u|^2 = \lambda$, cerchiamo di risolvere un problema di minimo. Poniamo

$$S = \{v \in V : \ |v| = 1\} \qquad \text{e} \qquad \lambda_1 = \inf_{v \in S} a(v, v). \tag{2.12}$$

Sia μ dato dalla (2.2). Si ha innanzi tutto

$$a(v, v) \geq \alpha \, \|v\|^2 - \mu |v|^2 > -\mu |v|^2 = -\mu \qquad \forall\, v \in S,$$

così che λ_1 è finito, anzi $\lambda_1 \geq -\mu$, e ciò dimostrerà una delle affermazioni del teorema quando sapremo che λ_1 è un autovalore, dato che $-\mu$ non lo è. Poniamo ora

$$b(u, v) = a(u, v) + \mu \cdot (u, v), \qquad u, v \in V. \tag{2.13}$$

Allora b è una forma bilineare, continua, simmetrica e $V-$ ellittica, dunque il prodotto scalare associato a una norma in V equivalente a quella preesistente: la norma in questione è la radice di $b(v, v)$. Nel seguito, per quanto riguarda lo spazio V, useremo sempre il prodotto scalare (2.13), dato che il prodotto scalare preesistente non gioca alcun ruolo.

Consideriamo una successione $\{u_n\}$ minimizzante, cioè tale che

$$u_n \in S \quad \forall\, n \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} a(u_n, u_n) = \lambda_1.$$

Per n abbastanza grande abbiamo allora

$$b(u_n, u_n) = a(u_n, u_n) + \mu \leq \lambda_1 + 1 + \mu.$$

Dunque $\{u_n\}$ è una successione limitata in V e il Teorema di compattezza debole assicura che essa ha una sottosuccessione, che denotiamo per semplicità ancora con $\{u_n\}$, convergente debolmente in V a un certo limite $u \in V$. Allora tale sottosuccessione converge fortemente in H allo stesso limite u, grazie alla compattezza dell'inclusione di V in H.

Dalla convergenza forte in H abbiamo $|u| = 1$, cioè $u \in S$. Usando anche la convergenza debole in V deduciamo allora

$$b(u, u) \leq \liminf_{n\to\infty} b(u_n, u_n) = \lim_{n\to\infty} \bigl(a(u_n, u_n) + \mu\bigr) = \lambda_1 + \mu,$$

cioè $a(u, u) \leq \lambda_1$. D'altra parte $a(u, u) \geq \lambda_1$ per definizione di λ_1, per cui concludiamo che $a(u, u) = \lambda_1$.

Riassumendo, abbiamo verificato che λ_1 è finito e che esiste $u \in S$ tale che $a(u, u) = \lambda_1$ e ora dimostriamo che λ_1 e u sono un autovalore e un autovettore corrispondenti, verificando che la (2.4) è l'equazione di Eulero del problema di minimo risolto da u. Fissato $v \in V$, per t reale con $|t|$ sufficientemente piccolo risulta $u + tv \neq 0$, per cui ha senso definire

$$\varphi(t) = \frac{a(u+tv, u+tv)}{|u+tv|^2} = a(w(t), w(t)), \qquad \text{ove} \qquad w(t) = \frac{u+tv}{|u+tv|}.$$

Essendo $w(t) \in S$ e $\varphi(0) = a(u,u) = \lambda_1$, deduciamo $\varphi(0) \leq \varphi(t)$ in un intorno del punto $t = 0$; dunque $\varphi'(0) = 0$. Ma, sviluppando $\varphi(t)$ come quoziente di due polinomi in t, con un semplice calcolo si vede che $\varphi'(0) = 2a(u,v) - 2\lambda_1 \cdot (u,v)$. Dunque u e λ_1 verificano l'equazione (2.4).

Osserviamo esplicitamente che in questo punto della dimostrazione l'ipotesi che V sia denso in H non è stata usata. Essa verrà sfruttata solo alla fine della dimostrazione del teorema, per verificare la completezza del sistema di autovettori.

Dimostriamo ora che λ_1 è il minimo degli autovalori. Infatti, se λ è un autovalore e u è un autovettore corrispondente, il vettore $w = u/|u|$ appartiene a S e la definizione di λ_1 e la (2.4) applicata a w forniscono

$$\lambda_1 \leq a(w,w) = \lambda |w|^2 = \lambda.$$

Dimostriamo ora che gli autospazi associati a due autovalori diversi sono ortogonali rispetto al prodotto di H. Siano λ' e λ'' i due autovalori e u' e u'' due autovalori corrispondenti rispettivamente agli autovalori considerati. Allora, scegliendo $v = u''$ e $v = u'$ nell'uguaglianza (2.4) relativa ai due autovalori e sfruttando la simmetria del prodotto scalare di H e della forma a, otteniamo

$$(\lambda' - \lambda'')(u', u'') = \lambda' \cdot (u', u'') - \lambda'' \cdot (u'', u') = a(u', u'') - a(u'', u') = 0.$$

Dunque $(u', u'') = 0$.

Proviamo ora che, se $\{u_n\}$ è una successione di autovettori ortogonale rispetto al prodotto di H, la successione $\{\lambda_n\}$ dei corrispondenti autovalori diverge a $+\infty$. Per assurdo ciò sia falso: allora dalla successione degli autovalori possiamo estrarre una sottosuccessione convergente a un certo limite λ. Per non appesantire le notazioni denotiamo ancora con $\{\lambda_n\}$ la sottosuccessione convergente e, di conseguenza, ancora con $\{u_n\}$ la sottosuccessione degli autovettori corrispondenti. Posto $w_n = u_n/|u_n|$ abbiamo allora per n, m diversi fra loro

$$b(w_n, w_m) = a(w_n, w_m) + \mu \cdot (w_n, w_m) = (\lambda_n + \mu)(w_n, w_m) = 0,$$

cioè che $\{w_n\}$ è un sistema ortogonale in V rispetto al prodotto scalare b dato dalla (2.13). Inoltre, per ogni n, risulta

$$b(w_n, w_n) = a(w_n, w_n) + \mu \cdot |w_n|^2 = \lambda_n + \mu,$$

e la disuguaglianza di Bessel diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{b(w_n, v)\}^2}{\lambda_n + \mu} \leq b(v,v) \qquad \forall\, v \in V.$$

Ma $\lambda_n + \mu \geq \lambda_1 + \mu > 0$ per ogni n e $\{\lambda_n\}$ converge a λ; dunque la successione $\{\lambda_n + \mu\}$ ha limite finito e positivo. Deduciamo allora la convergenza della serie di termine generale

$(b(w_n,v))^2$, quindi che $\{b(w_n,v)\}$ è una successione infinitesima. Siccome ciò vale per ogni $v \in V$, concludiamo che $\{w_n\}$ converge debolmente a 0 in V, dunque fortemente a 0 in H per la compattezza dell'inclusione. Ma ciò è assurdo in quanto $|w_n| = 1$ per ogni n.

La proprietà appena dimostrata ha due conseguenze. La prima di esse è il fatto che tutti gli autospazi hanno dimensione finita. Infatti, se ciò non fosse vero, esisterebbe un autovalore λ e una successione di autovettori indipendenti associati a λ. Con un procedimento di ortogonalizzazione costruiremmo allora una successione di autovettori ortogonale rispetto al prodotto di H e contraddiremmo quanto abbiamo dimostrato, dato che la successione degli autovalori corrispondenti è la costante λ.

Veniamo alla seconda conseguenza: l'insieme degli autovalori è discreto, cioè non ha punti di accumulazione. Infatti, in caso contrario, esisterebbe una successione di autovalori convergente e, scegliendo per ciascuno degli autospazi corrispondenti una base ortogonale rispetto al prodotto di H e ricordando l'ortogonalità fra autospazi diversi, ancora avremmo una successione ortogonale di autovettori in contraddizione con quanto abbiamo dimostrato.

Ciò significa che l'insieme degli autovalori è finito oppure immagine di una successione divergente: sfruttando finalmente il fatto che gli spazi hanno dimensione infinita dimostreremo che si verifica solo la seconda possibilità.

Soprassedendo su questo punto, consideriamo l'insieme $\{\lambda_n\}$ di tutti gli autovalori, finito o infinito che sia, ordiniamolo e scegliamo un corrispondente sistema $\{u_n\}$ di autovettori in accordo con quanto detto nell'Osservazione 2.5. Dunque gli autovettori di uno stesso autospazio V_λ costituiscono una base per V_λ e possiamo senz'altro supporre che tale base sia ortogonale rispetto al prodotto scalare di H. Siccome autospazi diversi sono ortogonali rispetto allo stesso prodotto scalare, tutta la famiglia di autovettori è un sistema ortogonale rispetto al prodotto di H, costituito da vettori di V. Dimostriamo che esso è completo in V, cioè che è denso in V il sottospazio W costituito dalle combinazioni lineari finite di autovettori, ragionando per assurdo.

Consideriamo i due sottospazi di V e di H rispettivamente

$$V_* = \{u \in V : \quad (u,w) = 0 \quad \forall\, w \in W\}$$
$$H_* = \{u \in H : \quad (u,w) = 0 \quad \forall\, w \in W\}$$

e osserviamo che H_* coincide con l'ortogonale in H di W. L'analoga affermazione per V_* e V non è invece automatica in quanto il prodotto scalare che compare nella definizione di V_* è quello di H. Osserviamo però che per ogni n e per ogni $v \in V$ risulta

$$b(u_n,v) = a(u_n,v) + \mu \cdot (u_n,v) = (\lambda_n + \mu)(u_n,v).$$

Allora, fissato comunque $v \in V$, l'uguaglianza $(u_n,v) = 0$ vale per ogni n se e solo se per ogni n vale l'uguaglianza $b(u_n,v) = 0$, dato che $\lambda_n > -\mu$ per ogni n. Passando alle combinazioni lineari finite deduciamo che, fissato ad arbitrio $v \in V$, l'uguaglianza $(w,v) = 0$ vale per ogni $w \in W$ se e solo se per ogni $w \in W$ vale l'uguaglianza $b(w,v) = 0$. Dunque lo spazio V_* può essere ridefinito in modo equivalente

$$V_* = \{u \in V : \quad b(u,w) = 0 \quad \forall\, w \in W\}$$

e dunque coincide con l'ortogonale in V del sottospazio W, l'ortogonalità essendo intesa rispetto al nuovo prodotto scalare b dello spazio V. Siccome stiamo supponendo che W non sia denso in V, l'ortogonale V_* è non vuoto e da questo fatto deduciamo una contraddizione: dimostriamo precisamente che V_* e H_* sono nelle stesse condizioni degli spazi V e H da cui siamo partiti e, successivamente, deduciamo l'esistenza di un autovalore nuovo, contraddicendo così il fatto che stavamo supponendo di considerare l'insieme di tutti gli autovalori.

Si noti innanzi tutto che V_* e H_* sono sottospazi chiusi di V e di H rispettivamente, dunque essi stessi spazi di Hilbert rispetto alle restrizioni delle operazioni algebriche, delle norme e dei prodotti scalari di V e di H rispettivamente. Inoltre, dalla prima definizione di V_*, è chiaro che V è incluso in H e che, anzi, esso coincide con l'intersezione di V con H_*.

Dimostriamo preliminarmente che, se $u \in V$, allora la sua proiezione su V_* nel senso del prodotto scalare b coincide con la proiezione di u su H_* nel senso del prodotto di H. Denotiamo con $\overline{W}^V$ e con $\overline{W}^H$ le chiusure di W rispettivamente in V e in H e, notando che l'ortogonale di un sottospazio coincide con l'ortogonale della sua chiusura, osserviamo che V_* e H_* sono anche gli ortogonali, in V e in H rispettivamente, dei sottospazi $\overline{W}^V$ e $\overline{W}^H$. Notiamo infine che $\overline{W}^V$ è incluso in $\overline{W}^H$: infatti, se w è un elemento di $\overline{W}^V$, allora esiste una successione $\{w_k\}$ di elementi di W convergente a w fortemente in V e la stessa successione converge a w fortemente anche in H dato che l'inclusione di V in H è continua; dunque w è limite anche nel senso di H di una successione di elementi di W. Da questa inclusione deduciamo ciò che ci eravamo proposti di dimostrare.

Sia $u \in V$ e siano u' e u'' le proiezioni di u rispettivamente su V_* e su $\overline{W}^V$ nel senso di V rispetto al prodotto scalare b. Abbiamo allora $u' \in H_*$, $u'' \in \overline{W}^H$ e $u = u' + u''$. Dunque u' e u'' coincidono rispettivamente con le proiezioni di u su H_* e su $\overline{W}^H$ nel senso di H.

Dimostriamo ora che l'inclusione di V_* in H_* è compatta. Supponiamo dunque che $\{w_n\}$ sia una successione di elementi di V_* che converge debolmente in V_* a un elemento $w \in V_*$. Allora, per ogni $v \in V$, detta v' la sua proiezione su V_* nel senso del prodotto scalare b, si ha

$$\lim_{n\to\infty} b(w_n, v) = \lim_{n\to\infty} b(w_n, v') = b(w, v') = b(w, v),$$

così che $\{w_n\}$ converge debolmente a w in V. Per l'ipotesi di compattezza la successione converge allora fortemente a w in H, ma, siccome la norma di H_* è la restrizione ad H_* della norma di H, la successione $\{w_n\}$ converge a w fortemente in H_*.

Tutto ciò dimostra che i due spazi V_* e H_* sono nelle stesse condizioni degli spazi V e H se prescindiamo dalla proprietà di densità. Siccome anche la forma a verifica le ipotesi richieste anche relativamente alla nuova coppia di spazi, possiamo applicare il primo passo della dimostrazione, nel quale l'ipotesi di densità non è stata sfruttata: esiste un autovalore del problema (2.4), nel quale occorre leggere V_* in sostituzione di V, cioè

$$u \in V_* \setminus \{0\}; \qquad a(u,v) = \lambda_* \cdot (u,v) \qquad \forall\, v \in V_*. \tag{2.14}$$

Verifichiamo che λ_* è un autovalore anche per il problema (2.4), cioè per il problema relativo agli spazi V e H di partenza, e che u è un corrispondente autovettore. Innanzi tutto $u \in V$ e $v \neq 0$. Sia ora $v \in V$ ad arbitrio e sia v_* la sua proiezione su V_* rispetto al prodotto scalare b: allora v_* è anche la proiezione su H_* nel senso di H, per cui $(u, v_*) = (u, v)$. Segue allora

$$a(u,v) = b(u,v) - \mu \cdot (u,v) = b(u,v_*) - \mu \cdot (u,v_*) =$$

$$a(u,v_*) = \lambda_* \cdot (u,v_*) = \lambda_* \cdot (u,v).$$

Siccome $u \in V_*$, u non appartiene al sottospazio W degli autovettori già presi in considerazione e, di conseguenza, λ_* è un autovalore nuovo, e ciò è assurdo. Tutto questo dimostra che l'insieme degli autovettori è completo in V.

Dimostriamo che esso è completo anche in H, cioè che W è denso in H, sfruttando l'ipotesi di densità di V in H. Sia $u \in H$ ad arbitrio: siccome V è denso in H, esiste una successione $\{u'_n\}$ di elementi di V convergente a u in H. Siccome W è denso in V, per ogni n possiamo trovare $w_n \in W$ tale che $\|w_n - u'_n\| \le 1/n$. Introdotta allora una costante M tale che $|v| \le M\,\|v\|$ per ogni $v \in V$, e tale costante esiste perché l'inclusione di V in H è continua, vediamo che

$$|w_n - u| \le |w_n - u'_n| + |u'_n - u| \le M\,\|w_n - u'_n\| + |u'_n - u|$$

e l'ultimo membro è infinitesimo.

Infine dobbiamo dimostrare che l'insieme degli autovalori è infinito e solo in questo punto gioca l'ipotesi che gli spazi V e H abbiano dimensione infinita. Se l'insieme degli autovalori fosse finito, siccome ogni autospazio ha dimensione finita ed esiste un sistema completo di autovettori, esisterebbe un sistema finito e completo di autovettori, cioè il sottospazio W generato da tutti gli autovettori avrebbe dimensione finita. Ma ogni sottospazio di dimensione finita è chiuso ad esempio in V e W è denso in V: dunque W sarebbe chiuso e denso e, di conseguenza, coinciderebbe con V che invece ha dimensione infinita per ipotesi. Ciò conclude la dimostrazione. □

2.11. Dimostrazione del Teorema 2.6. Supponiamo che λ non sia un autovalore e dimostriamo innanzi tutto che la serie (2.6) converge in V. Introduciamo ancora la forma (2.13), che è il prodotto scalare associato a una norma in V equivalente a quella preesistente grazie alla (2.2), e fissiamo il funzionale L lineare e continuo su V. Il Teorema di Lax–Milgram assicura che esiste uno e un solo $w \in V$ tale che

$$b(w,v) = L(v) \quad \forall\, v \in V \qquad \text{e} \qquad \|w\| \le \frac{1}{\alpha}\,\|L\|_*\,. \tag{2.15}$$

Allora i coefficienti c_n della (2.6) possono essere espressi come segue:

$$c_n = \frac{L(u_n)}{(\lambda_n - \lambda)|u_n|^2} = \frac{b(w,u_n)}{(\lambda_n - \lambda)|u_n|^2} = \frac{b(w,u_n)}{b(u_n,u_n)}\,\frac{b(u_n,u_n)}{(\lambda_n - \lambda)|u_n|^2} =$$

$$\frac{b(w,u_n)}{b(u_n,u_n)}\,\frac{a(u_n,u_n) + \mu|u_n|^2}{(\lambda_n - \lambda)|u_n|^2} = \frac{b(w,u_n)}{b(u_n,u_n)}\,\frac{\lambda_n|u_n|^2 + \mu|u_n|^2}{(\lambda_n - \lambda)|u_n|^2}.$$

Concludiamo allora

$$c_n = \frac{b(w,u_n)}{b(u_n,u_n)}\,\frac{\lambda_n + \mu}{\lambda_n - \lambda}. \tag{2.16}$$

Siccome $\{\lambda_n\}$ diverge deduciamo che per n abbastanza grande si ha

$$|c_n| \le 2|a_n(w)| \qquad \text{ove} \qquad a_n(w) = \frac{b(w,u_n)}{b(u_n,u_n)}.$$

Siccome $a_n(w)$ è l'$n-$esimo coefficiente di Fourier del vettore $w \in V$ rispetto al prodotto scalare b e al sistema $\{u_n\}$, che è ortogonale proprio rispetto a b, segue

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(w)|^2\, b(u_n,u_n) < \infty, \qquad \text{da cui anche} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2\, b(u_n,u_n) < \infty.$$

Allora la serie (2.6) converge in V e definisce $u \in V$. Si noti che la serie converge anche nel senso di H per la continuità dell'inclusione di V in H.

Verifichiamo ora che u risolve il problema variazionale (2.3). Se $v \in V$ e $m \ge 1$, usando prima la bilinearità e la continuità sia della forma a sia del prodotto scalare di H e poi l'ortogonalità del sistema e la (2.5), abbiamo per ogni $m \ge 1$

$$a(u,u_m) - \lambda\cdot(u,u_m) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, a(u_n,u_m) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot(u_n,u_m) =$$

$$c_m\, a(u_m,u_m) - \lambda c_m |u_m|^2 = c_m(\lambda_m - \lambda)|u_m|^2 = L(u_m)$$

e, per linearità, l'equazione (2.3) è soddisfatta se v è una qualunque combinazione lineare finita degli u_m. Sia infine $v \in V$ ad arbitrio. Siccome il sistema di autovettori è completo in V, esiste una successione $\{v_k\}$ convergente a v in V, di conseguenza anche in H, ciascuno degli elementi della quale è una combinazione finita degli u_m. Utilizzando anche il fatto che L è lineare e continuo su V, abbiamo perciò

$$a(u,v) - \lambda\cdot(u,v) = \lim_{k\to\infty}\big(a(u,v_k) - \lambda\cdot(u,v_k)\big) = \lim_{k\to\infty} L(v_k) = L(v).$$

Dimostriamo ora l'unicità della soluzione. Sia $u \in V$ una soluzione: allora u si scrive come somma della sua serie di Fourier rispetto al sistema $\{u_n\}$ e al prodotto scalare b. In particolare esiste una successione numerica $\{c_n'\}$ tale che

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n' u_n \qquad \text{in } V.$$

Usando la (2.3) con $v = u_m$, ove $m \ge 1$ è arbitrario, otteniamo

$$L(u_m) = a(u,u_m) - \lambda\cdot(u,u_m) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'\big(a(u_n,u_m) - \lambda\cdot(u_n,u_m)\big) =$$

$$c_m'\big(a(u_m,u_m) - \lambda\cdot(u_m,u_m)\big) = c_m'(\lambda_m - \lambda)|u_m|^2$$

così che i coefficienti c_m' coincidono ordinatamente con quelli della (2.6).

Dimostriamo infine la (2.7) riprendendo la (2.16), che esprime l'$n-$esimo coefficiente della (2.6). Posto

$$K_\lambda = \sup_{n\ge1}\left|\frac{\lambda_n + \mu}{\lambda_n - \lambda}\right|$$

e applicando l'uguaglianza di Parseval prima a u e poi a w e in entrambi i casi con il prodotto scalare b, otteniamo

$$b(u,u) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \, b(u_n,u_n) \le K_\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b(w,u_n)|^2}{b(u_n,u_n)} = K_\lambda^2 \, b(w,w).$$

La (2.2) e la (2.15) forniscono allora

$$\alpha \, \|u\|^2 \le b(u,u) \le K_\lambda^2 \, b(w,w) = K_\lambda^2 L(w) \le K_\lambda^2 \, \|L\|_* \, \|w\| \le \frac{K_\lambda^2}{\alpha} \, \|L\|_*^2$$

per cui possiamo prendere $M_\lambda = K_\lambda / \alpha$.

Conclusa la dimostrazione nel primo caso, supponiamo λ autovalore. Se u è una soluzione del problema (2.3) e w è una soluzione del problema omogeneo associato (2.4), allora valgono le uguaglianze

$$a(u,w) = \lambda \cdot (u,w) + L(w) \qquad \text{e} \qquad a(w,u) = \lambda \cdot (w,u).$$

Sottraendo membro a membro e sfruttando la simmetria della forma a e del prodotto scalare di H, deduciamo subito la condizione di compatibilità (2.8).

Supponiamo ora soddisfatta la (2.8). Allora gran parte della dimostrazione procede esattamente come nel caso precedente, con l'avvertenza di estendere tutte le somme ai soli $n \notin \mathbf{N}_\lambda$ e osservando che tale restrizione non altera le somme contenenti $L(u_n)$ (e quindi $b(w,u_n)$) in quanto la (2.8) significa che $L(u_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}_\lambda$. La nuova definizione di K_λ si ottiene ancora prendendo lo stesso estremo superiore, ma sotto la condizione $n \notin \mathbf{N}_\lambda$.

Inoltre, chiaramente, la soluzione (2.9) è ortogonale a V_λ in quanto $(u_n, w) = 0$ per ogni $w \in V_\lambda$ e l'unicità della soluzione ortogonale a V_λ si dimostra come abbiamo dimostrato l'unicità della soluzione nel caso precedente.

Verifichiamo allora solo che la (2.9) minizza la norma di H fra tutte le soluzioni. Ma ciò è immediato: infatti per ogni $w \in V_\lambda$ abbiamo $(u,w) = 0$ e quindi

$$|u+w|^2 = |u|^2 + |w|^2 \ge |u|^2. \;\square$$

3. Norme equivalenti in uno spazio di Hilbert

Il prossimo risultato riguarda la possibilità di trovare norme equivalenti in uno spazio di Hilbert immerso con inclusione compatta in un altro spazio di Hilbert e risulta utile nelle applicazioni. Esso costituisce infatti una versione astratta della disuguaglianza di Friedrichs–Poincaré sugli spazi di Sobolev.

3.1. Teorema. *Siano V, H, G e W quattro spazi di Hilbert e $A \in \mathcal{L}(V,G)$ e $B \in \mathcal{L}(V,W)$ due operatori lineari e continui. Si supponga che siano soddisfatte le condizioni seguenti:*

(3.1) $\quad V \subseteq H$ *con inclusione compatta*

(3.2) $\quad \|\cdot\|_H + \|A(\cdot)\|_G$ *è una norma su V equivalente a $\|\cdot\|_V$*

(3.3) *se* $v \in V, \quad Av = 0, \quad Bv = 0$ *allora* $v = 0.$

Allora esiste una costante c *tale che*

(3.4) $\|v\|_H \le c\,(\|Av\|_G + \|Bv\|_W) \qquad \forall\, v \in V.$ □

Dimostrazione. Possiamo supporre che la norma (3.2) sia già la norma di V. Ragionando per assurdo la tesi non valga e siano $\{v_n\}$ una successione di elementi di V verificante le condizioni seguenti

$$\|v_n\|_H = 1 \quad \forall\, n; \qquad \|Av_n\|_G \to 0; \qquad \|Bv_n\|_W \to 0.$$

In particolare $\|v_n\|_V \le 2$ per n grande, per cui, grazie al Teorema di compattezza debole, possiamo supporre $v_n \rightharpoonup v$ in V dato che ciò avviene per una sottosuccessione. Segue

$$Av_n \rightharpoonup Av \quad \text{in } G \qquad \text{e} \qquad Bv_n \rightharpoonup Bv \quad \text{in } W$$

e dunque anche

$$\|Av\|_G \le \liminf_{n\to\infty} \|Av_n\|_G = 0 \qquad \text{e} \qquad \|Bv\|_W \le \liminf_{n\to\infty} \|Bv_n\|_W = 0.$$

Deduciamo $Av = 0$ e $Bv = 0$ e quindi $v = 0$ per la (3.3). Ma la (3.1) implica $v_n \to v$ e quindi deduciamo $\|v\|_H = 1$, e ciò contraddice la conclusione precedente. □

3.2. Corollario. *Nelle condizioni del teorema precedente,* $\|A(\cdot)\|_G + \|B(\cdot)\|_W$ *è una norma su* V *equivalente a* $\|\cdot\|_V$. *In particolare* $\|A(\cdot)\|_G$ *è una norma su* $\operatorname{Ker} B$ *equivalente a quella indotta da* V. □