Sommario di teoria della misura e dell'integrazione

1. Algebre di sottoinsiemi e misure

Definizione 1.1. Un insieme $\mathcal{M}$ è un'algebra di sottoinsiemi di un dato insieme Ω quando valgono le condizioni (sovrabbondanti) seguenti:

$$\begin{aligned}&\text{ogni elemento di } \mathcal{M} \text{ è un sottoinsieme di } \Omega\\ &\Omega \in \mathcal{M}\\ &\text{da } A, B \in \mathcal{M} \text{ segue che } A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \in \mathcal{M}.\end{aligned}$$

L'algebra $\mathcal{M}$ è detta $\sigma-$algebra se, in aggiunta, valgono la condizione

$$\text{da} \quad A_n \in \mathcal{M} \ \text{ per } \ n = 1, 2, \ldots \quad \text{segue} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

e (di conseguenza) l'analoga per l'intersezione.

Definizione 1.2. Sia $\mathcal{M}$ un'algebra di sottoinsiemi di Ω. Una funzione μ definita su $\mathcal{M}$ a valori in $[0, +\infty]$ è detta $\sigma-$additiva quando

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

per ogni successione $\{A_n\}$ di elementi di $\mathcal{M}$ a due a due disgiunti tali che $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$. Osservato che questa condizione implica che $\mu(\emptyset)$ vale 0 oppure $+\infty$, chiamiamo misura (assoluta) su $\mathcal{M}$ una funzione $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ $\sigma-$additiva e tale che $\mu(\emptyset) = 0$.

Proposizione 1.3. Siano $\mathcal{M}$ un'algebra di sottoinsiemi di Ω e μ una misura su $\mathcal{M}$. Allora valgono le proprietà elementari seguenti:

$$\begin{aligned}&\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \qquad \forall\, A, B \in \mathcal{M}\\ &\mu(A) \le \mu(B) \qquad \text{se } A, B \in \mathcal{M} \text{ e } A \subseteq B.\end{aligned}$$

Valgono inoltre le proprietà seguenti, dette di continuità della misura μ: se $A_n \in \mathcal{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ e $A \in \mathcal{M}$, allora

$$\begin{aligned}&\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \qquad \text{se } \{A_n\} \text{ cresce e } \ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\\ &\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \qquad \text{se } \{A_n\} \text{ decresce, } \ A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \ \text{ e } \ \mu(A_1) < +\infty.\end{aligned}$$

Definizione 1.4. Sia $\mathcal{M}$ un'algebra di sottoinsiemi di Ω. Una misura μ su $\mathcal{M}$ è detta finita quando $\mu(\Omega) < +\infty$, mentre μ è detta $\sigma-$finita quando esiste una successione $\{A_n\}$ di elementi di $\mathcal{M}$ tali che $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\mu(A_n) < +\infty$ per ogni n.

Definizione 1.5. Uno spazio di misura è una terna $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ dove $\mathcal{M}$ è una $\sigma-$algebra di sottoinsiemi di Ω e μ è una misura su $\mathcal{M}$.

Definizione 1.6. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Un sottoinsieme $A \subseteq \Omega$ è detto $\mu-$trascurabile quando esiste $A' \in \mathcal{M}$ verificante

$$A' \supseteq A \text{ e } \mu(A') = 0 .$$

Lo spazio di misura è detto completo quando $\mathcal{M}$ contiene anche tutti i sottoinsiemi $\mu-$trascurabili di Ω.

2. Estensioni di algebre di sottoinsiemi e di misure

Teorema 2.1. Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di Ω, allora esiste ed è unica la minima $\sigma-$algebra di sottoinsiemi di Ω che include $\mathcal{F}$. Essa è detta $\sigma-$algebra generata da $\mathcal{F}$ ed è denotata con $\sigma(\mathcal{F})$.

Esempio 2.2. Se Ω è uno spazio topologico, l'algebra di Borel di Ω è la $\sigma-$algebra $\mathcal{B}(\Omega)$ generata dalla famiglia degli aperti (o, equivalentemente, dei chiusi) di Ω. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si intende che la nozione di algebra di Borel venga data a partire dalla topologia euclidea di Ω.

Teorema 2.3 (di Carathéodory). Se $\mathcal{M}$ è un'algebra di sottoinsiemi di Ω e μ è una misura $\sigma-$finita su $\mathcal{M}$, allora esiste una e una sola misura $\tilde{\mu}$ definita su $\sigma(\mathcal{M})$ che estende μ, cioè tale che $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ per ogni $A \in \mathcal{M}$, e anche $\tilde{\mu}$ è $\sigma-$finita.

Teorema 2.4. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $\tilde{\mathcal{M}}$ la $\sigma-$algebra generata dalla famiglia costituita da tutti gli elementi di $\mathcal{M}$ e da tutti i sottoinsiemi $\mu-$trascurabili di Ω. Allora esiste una e una sola misura $\tilde{\mu}$ definita su $\tilde{\mathcal{M}}$ che estende μ. Inoltre lo spazio di misura $(\Omega, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mu})$ è completo e $\tilde{\mathcal{M}}$ e $\tilde{\mu}$ godono delle proprietà seguenti:

un sottoinsieme A di Ω appartiene a $\tilde{\mathcal{M}}$ se e solo se
esiste $B \in \mathcal{M}$ tale che $B \subseteq A$ e $A \setminus B$ sia $\mu-$trascurabile;
per A e B in tali condizioni risulta $\tilde{\mu}(A) = \mu(B)$.

Esempio 2.5. Sia $\Omega = \mathbb{R}^n$. Chiamiamo rettangoli $n-$dimensionali i prodotti cartesiani di n intervalli (limitati o meno) e pluritettangoli $n-$dimensionali le unioni finite di rettangoli $n-$dimensionali. I plurirerettangoli $n-$dimensionali formano un'algebra $\mathcal{P}_n$ e risulta $\sigma(\mathcal{P}_n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Denotata con $V_n : \mathcal{P}_n \to [0, +\infty]$ la misura $n-$dimensionale elementare, che è $\sigma-$finita, possiamo applicare i due teoremi precedenti e estendere V_n dapprima a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e successivamente alla $\sigma-$algebra generata dall'aggiunta degli insiemi trascurabili. Otteniamo uno spazio di misura completo che denotiamo con $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \mathcal{L}^n)$. Gli elementi di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ si chiamano insiemi misurabili secondo Lebesgue e $\mathcal{L}^n$ è detta misura di Lebesgue $n-$dimensionale.

Esempio 2.6. Sia Ω un insieme qualunque. Su tutta la famiglia 2^Ω dei sottoinsiemi di Ω definiamo la funzione $\#$ come segue:

$$\#A = n \text{ se } A \text{ ha } n \text{ elementi } (n = 0, 1, 2, \ldots)\, ; \quad \#A = +\infty \text{ se } A \text{ è infinito.}$$

Allora $(\Omega, 2^\Omega, \#)$ è uno spazio di misura completo e la misura $\#$ è detta "misura che conta i punti di Ω". Tale spazio è $\sigma-$finito se e solo se Ω è al più numerabile.

3. Funzioni misurabili

Definizione 3.1. Sia $\mathcal{M}$ una $\sigma-$algebra di sottoinsiemi di Ω e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora f è detta $\mathcal{M}-$misurabile quando $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Proposizione 3.2. Siano $\mathcal{M}$ una $\sigma-$algebra di sottoinsiemi di Ω e $\mathcal{B}'$ una sottofamiglia di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tale che $\sigma(\mathcal{B}') = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Allora una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{M}-$misurabile se e solo se $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ per ogni $B \in \mathcal{B}'$.

In particolare f è $\mathcal{M}-$misurabile se e solo se $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ per ogni B della forma $B = (c, +\infty)$ con $c \in \mathbb{R}$.

Definizione 3.3. Se E è uno spazio topologico, una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ è detta di Borel quando è $\mathcal{B}(E)-$misurabile.

Teorema 3.4. Sia $\mathcal{M}$ una $\sigma-$algebra di sottoinsiemi di Ω. Allora l'insieme delle funzioni $\mathcal{M}-$misurabili è uno spazio vettoriale e il prodotto di due funzioni $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ entrambe $\mathcal{M}-$misurabili è $\mathcal{M}-$misurabile. Inoltre, se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{M}-$misurabile, $E \subseteq \mathbb{R}$ contiene l'immagine di f e $g : E \to \mathbb{R}$ è di Borel, allora è $\mathcal{M}-$misurabile anche $g \circ f$. Infine, se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni $\mathcal{M}-$misurabili convergente puntualmente alla funzione f, anche f è $\mathcal{M}-$misurabile.

4. Integrali

Definizione 4.1. Sia Ω un insieme non vuoto e $A \subseteq \Omega$. La funzione caratteristica di A è la funzione $\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}$ che vale 1 in A e 0 in $\Omega \setminus A$.

Definizione 4.2. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è detta $\mu-$semplice quando è $\mathcal{M}-$misurabile, assume solo un numero finito di valori e la controimmagine A di ogni valore non nullo assunto da f verifica $\mu(A) < +\infty$.

L'insieme delle funzioni $\mu-$semplici è dunque lo spazio vettoriale generato dalle funzioni caratteristiche χ_A di tutti gli insiemi $A \in \mathcal{M}$ tali che $\mu(A) < +\infty$.

Definizione 4.3. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. L'integrale delle funzioni $\mu-$semplici rispetto alla misura μ è l'unico funzionale lineare L sullo spazio vettoriale di tali funzioni che verifica la condizione

$$L(\chi_A) = \mu(A)$$

per ogni $A \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(A) < +\infty$. Naturalmente si usa la notazione

$$\int_\Omega f \, d\mu$$

anziché $L(f)$.

Definizione 4.4. Se $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio di misura e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione $\mathcal{M}-$misurabile non negativa, si definisce l'integrale di f ponendo

$$\int_\Omega f\, d\mu = \sup\bigl\{ \textstyle\int_\Omega g\, d\mu : \ g \ \ \mu\text{−semplice}, \ g \le f \bigr\}$$

e si dice che f è $\mu-$integrabile se ha integrale finito.

Una funzione $\mathcal{M}-$misurabile $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è poi detta $\mu-$integrabile quando sono $\mu-$integrabili le due funzioni f^+ e f^-. In tali condizioni si pone

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega f^+\, d\mu - \int_\Omega f^-\, d\mu.$$

Teorema 4.5. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Allora l'insieme delle funzioni $\mu-$integrabili è uno spazio vettoriale e l'integrale è un funzionale lineare su tale spazio.

Definizione 4.6. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Si dice che una proprietà $P(x)$ del generico punto $x \in \Omega$ vale $\mu-$q.o., oppure per $\mu-$quasi ogni $x \in \Omega$, quando l'insieme Ω_P dei punti $x \in \Omega$ per cui $P(x)$ è falsa appartiene a $\mathcal{M}$ e verifica $\mu(\Omega_P) = 0$.

Osservazione 4.7. La definizione precedente consente di parlare di integrale di una funzione f anche quando f è definita solo $\mu-$q.o., cioè f è definita solo su un sottoinsieme $A \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(\Omega \setminus A) = 0$. In tali condizioni si rimpiazza f con la funzione (automaticamente misurabile se f lo era) ottenuta prolungando f con il valore 0 nei punti di $\Omega \setminus A$. Se lo spazio di misura è anche completo, si può prendere addirittura un prolungamento qualunque grazie al risultato enunciato di seguito. In caso contrario, invece, non tutti i prolungamenti di f risultano misurabili.

Proposizione 4.8. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Se una funzione $\mathcal{M}-$misurabile f verifica $f(x) = 0$ $\mu-$q.o., allora f è $\mu-$integrabile e il suo integrale è nullo.

In particolare, se due funzioni sono uguali $\mu-$q.o., la $\mu-$integrabilità dell'una implica quella dell'altra e l'uguaglianza dei corrispondenti integrali.

Proposizione 4.9. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Perché una funzione integrabile f sia nulla $\mu-$q.o. è necessario e sufficiente che l'integrale di $|f|$ sia nullo.

Teorema 4.10. Se $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio di misura e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione $\mathcal{M}-$misurabile, allora f è $\mu-$integrabile se e solo se esiste una funzione g $\mu-$integrabile tale che $|f(x)| \le g(x)$ per $\mu-$quasi ogni $x \in \Omega$. In particolare f è $\mu-$integrabile se e solo se $|f|$ è $\mu-$integrabile.

Corollario 4.11. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Se f è $\mu-$integrabile e se $A \in \mathcal{M}$, allora anche $f\chi_A$ è $\mu-$integrabile. Si definisce allora l'integrale di f su A ponendo

$$\int_A f\, d\mu = \int_\Omega f\chi_A\, d\mu.$$

Teorema 4.12. Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e f una funzione $\mu-$integrabile non negativa. Allora la formula

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \qquad A \in \mathcal{M},$$

definisce una misura finita su $\mathcal{M}$. Valgono, in particolare, le proprietà di $\sigma-$additività e di continuità delle misure.

Osservazione 4.13. Se f ha segno qualunque, il risultato si applica comunque alle funzioni $f^{\pm}$. Vediamo allora che la formula precedente definisce una funzione su $\mathcal{M}$ per la quale ancora valgono le proprietà di $\sigma-$additività e di continuità.

Esempi 4.14. Se lo spazio di misura è $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \mathcal{L}^n)$, l'integrale corrispondente è detto integrale di Lebesgue. Si usa di solito la notazione

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$$

Se invece lo spazio di misura è $(\Omega, 2^\Omega, \#)$, cioè lo spazio ottenuto prendendo la misura che conta i punti, l'integrale di una funzione f integrabile si chiama anche somma di f e viene denotato di solito con il simbolo

$$\sum_{x \in \Omega} f(x).$$

Usando i risultati generali sull'integrale, si dimostra facilmente che condizione necessaria perché una funzione f sia integrabile è che l'insieme $S(f)$ dei punti x tali che $f(x) \neq 0$ sia al più numerabile. Inoltre, data una funzione f tale che $S(f)$ sia infinito e presentato $S(f)$ come l'insieme dei punti distinti x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n).$$

Allora f è integrabile se e solo se tale serie è assolutamente convergente e, in caso di integrabilità, la somma della serie considerata e l'integrale di f hanno lo stesso valore.

5. Teoremi di passaggio al limite

Teorema 5.1 (di Lebesgue). Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ funzioni $\mu-$integrabili e si supponga che il limite

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

esista per $\mu-$quasi ogni $x \in \Omega$. Se esiste una funzione $\mu-$integrabile g tale che

$$|f_n(x)| \le g(x) \qquad \forall n \quad \mu\text{-q.o.}$$

allora $|f(x)| < +\infty$ $\mu-$q.o., f è $\mu-$integrabile e valgono le relazioni

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

Teorema 5.2 (di Beppo Levi). Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ funzioni $\mu-$integrabili. Si supponga che la successione $\{f_n(x)\}$ sia non decrescente per $\mu-$quasi ogni $x \in \Omega$ e si definisca

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \mu\text{−q.o.}$$

Allora condizione necessaria e sufficiente perché $f(x) < +\infty$ per $\mu-$quasi ogni $x \in \Omega$ e f sia $\mu-$integrabile è che la successione degli integrali delle f_n sia limitata. In tali condizioni valgono anche le conclusioni del Teorema di Lebesgue.

Corollario 5.3. Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ funzioni $\mu-$integrabili. Si supponga $g_n(x) \geq 0$ per ogni n e per $\mu-$quasi ogni $x \in \Omega$ e si definisca

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \qquad \mu\text{−q.o.}$$

Allora condizione necessaria e sufficiente perché $f(x) < +\infty$ per $\mu-$quasi ogni $x \in \Omega$ e f sia $\mu-$integrabile è che la serie degli integrali delle g_n converga. In tali condizioni si ha inoltre

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu.$$

Teorema 5.4 (Lemma di Fatou). Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura, $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ funzioni $\mu-$integrabili e c un numero reale. Si supponga che per ogni n risulti

$$f_n(x) \geq g(x) \quad \mu\text{−q.o.} \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega f_n \, d\mu \leq c$$

e si ponga

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \mu\text{−q.o.}$$

Allora il valore $f(x)$ è finito per $\mu-$quasi ogni $x \in \Omega$, la funzione f è $\mu-$integrabile e vale la disuguaglianza

$$\int_\Omega f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Osservazione 5.5. Applicando a $-f_n$ il risultato precedente, se ne deduce uno analogo, l'ipotesi e la tesi del quale si ottengono sostituendo i minimi limiti e le disuguaglianze con i massimi limiti e con le disuguaglianze opposte rispettivamente.

6. Prodotti di misure

Teorema 6.1. Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ e $(\Gamma, \mathcal{N}, \nu)$ due spazi di misure $\sigma-$finiti. Denotiamo con $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ la $\sigma-$algebra di sottoinsiemi di $\Omega \times \Gamma$ generata dalla famiglia di tutti i prodotti $A \times B$ con $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$. Allora esiste una e una sola misura $\sigma-$finita λ su $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ tale che

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B) \qquad \forall\, A \in \mathcal{M} \quad \forall\, B \in \mathcal{N}.$$

Definizione 6.2. Nelle condizioni del risultato precedente, la misura λ si chiama prodotto delle misure μ e ν e si denota con $\mu \otimes \nu$. Il corrispondente spazio di misura si chiama prodotto degli spazi di misura dati.

Teorema 6.3 (di Fubini–Tonelli). Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ e $(\Gamma, \mathcal{N}, \nu)$ due spazi di misura $\sigma-$finiti e f una funzione $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})-$misurabile e non negativa. Allora f è $(\mu \otimes \nu)-$integrabile se e solo se valgono le condizioni

$$\text{per } \nu-\text{quasi ogni } y \in \Gamma \text{ è } \mu-\text{integrabile in } \Omega \text{ la funzione } x \mapsto f(x,y)$$

$$\text{la funzione} \quad y \mapsto \int_\Omega f(x,y)\, d\mu(x) \quad \text{è } \nu-\text{integrabile in } \Gamma$$

o, equivalentemente, se e solo se valgono le condizioni ottenute scambiando i ruoli di μ e di ν. In caso di integrabilità valgono poi le formule

$$\int_{\Omega\times\Gamma} f\, d(\mu \otimes \nu) = \int_\Gamma \Bigl(\int_\Omega f(x,y)\, d\mu(x) \Bigr)\, d\nu(y) = \int_\Omega \Bigl(\int_\Gamma f(x,y)\, d\nu(y) \Bigr)\, d\mu(x).$$

Osservazione 6.4. La formula finale vale anche se f ha segno qualunque, purché il teorema possa essere applicato alle due funzioni $f^\pm$. Ciò è sicuramente vero se la funzione f è $(\mu \otimes \nu)-$integrabile.

7. La misura di Hausdorff

Definizione 7.1. Sia $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Se $\delta \in (0, +\infty]$, una successione $\{A_k\}$ di elementi di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ è un $\delta-$ricoprimento di B quando

$$B \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k \quad \text{e} \quad \operatorname{diam} A_k < \delta \quad \forall\, k.$$

Se $r \geq 0$ (reale) poniamo

$$\mathcal{H}^r_\delta(B) = \inf\Bigl\{ \sum_{k=1}^\infty (\operatorname{diam} A_k)^r \Bigr\},$$

l'estremo inferiore essendo preso al variare di $\{A_k\}$ fra tutti i possibili $\delta-$ricoprimenti di B , e definiamo la misura di Hausdorff $r-$dimensionale di B come

$$\mathcal{H}^r(B) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^r_\delta(B) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^r_\delta(B).$$

Teorema 7.2. Per ogni $r \geq 0$ la funzione $\mathcal{H}^r$ è una misura su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre $\mathcal{H}^0$ è la misura che conta i punti, $\mathcal{H}^r$ è identicamente nulla se $r > n$ e $\mathcal{H}^n$ è legata alla misura $\mathcal{L}^n$ di Lebesgue $n-$dimensionale dalla formula

$$\mathcal{H}^n(B) = \frac{2^n}{\omega_n}\,\mathcal{L}^n(B) \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

ove ω_n è la misura di Lebesgue della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$. In particolare $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$ e $\omega_3 = 4\pi/3$. Vale infine l'implicazione

$$\text{da } \mathcal{H}^r(B) > 0 \text{ e } 0 \leq s < r \text{ segue } \mathcal{H}^s(B) = +\infty.$$

Osservazione 7.3. La definizione di $\mathcal{H}^r(B)$ prende senso anche quando B è un sottoinsieme qualunque di $\mathbb{R}^n$ e, di fatto, si usa generalizzare in questo senso, conservando comunque il nome "misura di Hausdorff". Tale definizione estesa, tuttavia, non porta a una funzione $\sigma-$additiva, per cui il nome "misura" è un po' improprio. Ciò che si ottiene è comunque una "misura esterna".

Osservazione 7.4. Le misure $\mathcal{H}^1$ e $\mathcal{H}^2$ generalizzano le nozioni di lunghezza e di area e le corrispondenti teorie dell'integrazione estendono le nozioni di integrali di linea e di superficie. L'ultima affermazione del teorema implica, in particolare, che un boreliano B di $\mathbb{R}^2$ che ha area positiva e finita ha necessariamente lunghezza infinita e volume nullo.