Una funzione differenziabile con inversa discontinua

Costruiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con le proprietà seguenti:

f è biiettiva
f è differenziabile in 0 con derivata non nulla
l'inversa f^{-1} è discontinua in $f(0)$.

Consideriamo gli insiemi

$$A = \{1/n : n \geq 2 \text{ intero}\} \quad \text{e} \quad B = \{n : n \geq 2 \text{ intero}\}$$

e definiamo il valore $f(x)$ dapprima per $x \in A$ come segue. Se $x = 1/n \in A$ poniamo

$$f(1/n) = \frac{1}{n+m+1} \quad \text{ove } m \text{ è l'unico intero } > 0 \text{ tale che} \quad 2^m < n \leq 2^{m+1}.$$

Questa formula è illustrata nella tabella seguente

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{17}$	$\cdots$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{33}$	$\cdots$
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{13}$	$\cdots$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{22}$	$\cdots$	$\frac{1}{37}$	$\frac{1}{39}$	$\cdots$

e risulta chiaro che la definizione parziale data conduce a una funzione di A in sé la cui immagine è il complementare rispetto ad A dell'insieme immagine della successione $\{y_n\}$ seguente (si perdoni la mancanza di rigore in questo punto):

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{4}, \quad y_3 = \frac{1}{7}, \quad y_4 = \frac{1}{12}, \quad y_5 = \frac{1}{21}, \quad y_6 = \frac{1}{38}, \quad \ldots$$

Tali valori vengono recuperati, insieme ai punti di B, nel passo successivo della definizione del valore di $f(x)$. Per $x = n \in B$ poniamo

$$f(n) = y_m \quad \text{se } n = 2m \text{ è pari} \quad \text{e} \quad f(n) = m+1 \quad \text{se } n = 2m+1 \text{ è dispari.}$$

Ancora illustriamo con una tabella:

x	2	3	4	5	5	7	8	9	10	11	12	13	$\ldots$
$f(x)$	y_1	2	y_2	3	y_3	4	y_4	5	y_5	6	y_6	7	$\ldots$

Le definizioni parziali congiunte conducono quindi a una funzione di $A \cup B$ in sé biiettiva. Allora è chiaro che ponendo

$$f(x) = x \quad \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (A \cup B)$$

si completa la definizione di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biiettiva. Chiaramente l'inversa f^{-1} è discontinua in $f(0) = 0$ dato che $\{y_m\}$ tende a 0, mentre $f^{-1}(y_m) = 2m$ per

$m = 1, 2, \ldots$. Controlliamo infine che f è differenziabile in 0 con derivata $f'(0) = 1$. Ciò equivale allo sviluppo $f(x) = x + o(x)$ per $x \to 0$. Per $x = 1/n \in A$, determinato l'intero $m > 0$ tale che $2^m < n \leq 2^{m+1}$, abbiamo

$$x - f(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1+m}{n+(m+1)} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1+\lg_2 n}{n+\lg_2 n}\,.$$

Valgono pertanto le disuguaglianze

$$0 \leq \frac{x - f(x)}{x} \leq \frac{1+\lg_2(1/x)}{(1/x)+\lg_2(1/x)} \quad \text{per ogni } x \in A$$

e l'ultimo membro è infinitesimo per $x \to 0^+$. Siccome $f(x) = x$ se $x \notin A$ e $|x| < 1$, il rapporto $(f(x) - x)/x$ è infinitesimo per $x \to 0$.