Trasformate integrali

Gianni Gilardi

Pavia, 12 dicembre 1997

Siano I e J due intervalli di $\mathbb{R}$, limitati o meno, e $K : I \times J \to \mathbb{C}$ una funzione fissata. Data ora una generica funzione $u : I \to \mathbb{R}$, consideriamo, per ogni $y \in J$, la funzione, che dipende dalla scelta di y,

$$x \mapsto K(x,y)\,u(x), \qquad x \in I. \tag{0.1}$$

Questa può essere integrabile in I (in un senso da precisare) o meno, in dipendenza da y. Supponiamo che essa risulti integrabile in corrispondenza a un insieme significativo di valori di y, diciamo per tutti i valori y di un certo intervallo $J' \subseteq J$. Allora possiamo associare a ogni $y \in J'$ l'integrale della (0.1) e dunque costruire la funzione $v : J' \to \mathbb{C}$ mediante la formula

$$v(y) = \int_I K(x,y)\,u(x)\,dx, \qquad y \in J'. \tag{0.2}$$

La funzione v si chiama *trasformata di* u e la funzione K si chiama *nucleo della trasformazione*. Scelte diverse del nucleo K portano allora a diversi tipi di trasformate e in queste pagine diamo un cenno sulle *trasformate di Fourier* e sulle *trasformate di Laplace* nell'ambito di una nozione elementare di integrabilità.

Nel primo caso abbiamo

$$I = J = \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad K(x,y) = e^{-ixy}$$

e, per le funzioni u che chiameremo trasformabili, avremo $J' = \mathbb{R}$.

Nel secondo, anche se per vari motivi sarebbe più opportuno lasciar variare y nei complessi anziché nei reali, ci limitiamo alle scelte più semplici seguenti:

$$I = [0,+\infty), \qquad J = \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad K(x,y) = e^{-xy}.$$

In tali condizioni e per le funzioni u che considereremo, l'intervallo J' sarà una semiretta (eccezionalmente l'intera retta) che dipende dalla funzione u da trasformare.

1. Prerequisiti

Già a livello della presentazione stessa delle trasformate cui siamo interessati, chiaramente, non si può fare a meno di usare integrali su intervalli illimitati. Inoltre è opportuno saper trattare funzioni a valori complessi. Osserviamo infine che imporre sistematicamente alla funzione integranda l'ipotesi di continuità è davvero troppo restrittivo, dato che funzioni importanti connesse in modo naturale con l'uso delle trasformate sono discontinue.

Volendo lasciare la trattazione al livello più elementare possibile, consideriamo come punto di riferimento il grado di regolarità espresso dalla definizione che diamo di seguito.

A questo proposito diciamo che un punto di discontinuità x_0 per una funzione u è di tipo salto quando esistono e sono finiti i limiti destro e sinistro $u(x^{\pm})$ di $u(x)$ per x tendente a x_0 (il solo limite destro o il solo limite sinistro nel caso di un punto estremo dell'intervallo).

Definizione 1.1. *Una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è continua a tratti quando, per ogni $a > 0$, essa è continua in $[-a, a]$ tranne al più in un numero finito di punti, tutti di tipo salto.*

Una funzione $[0, +\infty) \to \mathbb{C}$ è continua a tratti quando, per ogni $a > 0$, essa è continua in $[0, a]$ tranne al più in un numero finito di punti, tutti di tipo salto. ∎

Sono continue a tratti, in particolare, tutte le funzioni continue e tutte le funzioni discontinue solo in un numero finito di punti, tutti di tipo salto. Inoltre è chiaro che, se u è continua a tratti, della stessa proprietà gode $|u|$.

Se è stata svolta la teoria dell'integrazione sono per le funzioni reali continue in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, la definizione di integrale di una funzione che presenta un numero finito di salti può essere data in modo naturale per additività. Il caso poi delle funzioni a valori complessi si tratta separando le parti reali e immaginarie, e la stessa procedura può essere usata per definire la derivata:

$$\int_a^b u(x)\,dx = \int_a^b \operatorname{Re} u(x)\,dx + i \int_a^b \operatorname{Im} u(x)\,dx$$
$$u'(x_0) = (\operatorname{Re} u)'(x_0) + i(\operatorname{Im} u)'(x_0).$$

Con queste definizioni continuano a valere per funzioni a valori complessi le usuali relazioni fra derivazione e integrazione.

Definizione 1.2. *Sia u una funzione a valori complessi continua a tratti sulla semiretta $[0, +\infty)$ o sull'intera retta. L'integrale improprio o generalizzato di u è definito rispettivamente come segue:*

$$\int_0^\infty u(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a u(x)\,dx \tag{1.1}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^0 u(x)\,dx + \lim_{a\to+\infty} \int_0^a u(x)\,dx \tag{1.2}$$

non appena esistano e siano finiti i limiti ai secondi membri. In tal caso la funzione u è detta integrabile, mentre, in caso contrario, u è detta non integrabile. ∎

Osservazione 1.3. Vale la pena di osservare che, se u è integrabile in $\mathbb{R}$, allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^a u(x)\,dx. \tag{1.3}$$

Notiamo però che il limite (1.3) può esistere finito anche se u non è integrabile: la definizione di integrabilità richiede infatti che esistano finiti i due limiti (1.2), indipendenti fra loro. Si dimostra invece che, se u è reale non negativa in $\mathbb{R}$, allora essa è integrabile se e solo il limite (1.3) esiste finito.

Notiamo inoltre che una funzione che ha limite non nullo all'infinito non può essere integrabile. Tuttavia esistono funzioni integrabili che non hanno limite all'infinito, per cui è errato affermare che "integrabile implica infinitesima all'infinito". ∎

La trattazione delle trasformate di Fourier e di Laplace si semplifica notevolmente se si richiede sistematicamente che le funzioni integrande siano non solo integrabili ma assolutamente integrabili. Ecco la definizione e due risultati.

Definizione 1.4. *Diciamo che una funzione continua a tratti in $\mathbb{R}$ o in $[0, +\infty)$ è assolutamente integrabile quando è integrabile la funzione $|u|$.* ∎

Teorema 1.5. *Ogni funzione continua a tratti assolutamente integrabile è integrabile.* ∎

Teorema 1.6. *Se u e v sono continue a tratti e tali che $|u| \le v$, allora l'integrabilità di v implica l'assoluta integrabilità di u.* ∎

Indispensabile è poi l'introduzione dell'*esponenziale con esponente complesso*. Una via particolarmente veloce consiste nel dare la definizione seguente:

$$e^{x+iy} = e^x \big(\cos y + i \sin y\big), \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Si noti che $|e^{iy}| = 1$ e $|e^{x+iy}| = e^x$ per $x, y \in \mathbb{R}$.

Inoltre la legge fondamentale dell'esponenziale, cioè la formula $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, si dimostra senza eccessive difficoltà anche per esponenti complessi, mentre conseguenze del tutto immediate della definizione sono le *relazioni di Eulero*, valide per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$,

$$e^{\pm i\vartheta} = \cos\vartheta \pm i \sin\vartheta, \qquad \cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}. \tag{1.5}$$

Infine viene ad assumere significato la composizione $t \mapsto e^{f(t)}$ con una funzione f a valori complessi e, *se f è definita in un intervallo della retta reale*, diventa un semplice esercizio verificare, separando le parti reale e immaginarie, che vale la formula

$$\frac{d}{dt} e^{f(t)} = e^{f(t)} f'(t)$$

in ogni punto in cui f è derivabile. In particolare, anche per $\alpha \in \mathbb{C}$, risulta

$$\frac{d}{dt} e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t} \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

2. Trasformate di Fourier

Seguendo una consuetudine radicata, usiamo la variabile ξ anziché la variabile y e denotiamo con $\widehat{u}$ (il simbolo è letto u *cappuccio* oppure u *cappello*) la trasformata di Fourier di u che ci accingiamo a definire.

Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua a tratti assolutamente integrabile. Allora per ogni ξ, x reali vale la catena di uguaglianze

$$|e^{-i\xi x} u(x)| = |e^{-i\xi x}|\,|u(x)| = |u(x)|.$$

Dunque, se ξ è reale, anche la funzione $x \mapsto e^{-i\xi x} u(x)$ è assolutamente integrabile (quindi integrabile) in $\mathbb{R}$ e la definizione seguente ha senso.

Definizione 2.1. *Diciamo che una funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è* trasformabile *quando è continua a tratti e assolutamente integrabile. La trasformata di Fourier di una funzione trasformabile u è la funzione*

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\, u(x)\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \ \blacksquare \tag{2.1}$$

In alternativa a $\widehat{u}$ si usa anche la notazione $\mathcal{F}u$. Osserviamo inoltre che la (2.1) può essere scritta nel modo equivalente

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, \cos(\xi x)\, dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, \sin(\xi x)\, dx. \tag{2.2}$$

Questa rappresentazione è particolarmente utile nelle situazioni che descriviamo. Se u assume valori reali, allora nella (2.2) restano evidenziate le parti reale e immaginaria di $\widehat{u}(\xi)$. Se u è una funzione complessa pari allora il secondo integrale è nullo, mentre è nullo il primo se u è dispari. In questi due casi la (2.2) può essere riscritta a sua volta come

$$\widehat{u}(\xi) = 2\int_0^{\infty} u(x)\, \cos(\xi x)\, dx \qquad \text{e} \qquad \widehat{u}(\xi) = -2i\int_0^{\infty} u(x)\, \sin(\xi x)\, dx$$

rispettivamente e risulta chiaro che, nei due casi, $\widehat{u}$ è pari e dispari rispettivamente. Se poi u è anche reale, allora $\widehat{u}$ è reale se u è pari e puramente immaginaria se u è dispari. $\blacksquare$

Il primo risultato che enunciamo riguarda la regolarità della trasformata e il suo comportamento all'infinito. Esso, tuttavia, non implica che anche la trasformata si assolutamente integrabile.

Teorema 2.2. *Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione trasformabile. Allora la sua trasformata di Fourier $\widehat{u}$ è continua e verifica*

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \widehat{u}(\xi) = 0. \ \blacksquare \tag{2.3}$$

Esempio 2.3. Consideriamo la funzione

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} e^{-x/a} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

ove a è un numero positivo fissato. Essa è continua a tratti, non negativa e integrabile, dunque trasformabile. La sua trasformata è data da

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi) &= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-i\xi x} e^{-x/a}\, dx = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{(-i\xi - 1/a)x}\, dx \\ &= \frac{1}{a} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{-i\xi x - x/a}}{-i\xi - 1/a} - \frac{1}{-i\xi - 1/a} \right) = \frac{1}{ia\xi + 1} \end{aligned}$$

in quanto l'ultimo esponenziale scritto tende a 0 dato che il suo modulo vale $e^{-x/a}$.

Si noti che $\widehat{u}$ è una funzione continua e verifica le (2.3) in accordo con il Teorema 2.2. Si noti però che $\widehat{u}$ non è assolutamente integrabile dato che il suo modulo si comporta come $1/|a\xi|$ per ξ tendente a $\pm\infty$. ■

Elenchiamo ora le principali proprietà della trasformazione di Fourier che, naturalmente, sono vere in ipotesi opportune sulle funzioni che intervengono, ipotesi che devono almeno garantire che tutte le operazioni scritte hanno effettivamente senso e che tutte le trasformate sono ben definite. Ecco la tabella riassuntiva:

$v(x)$	$\widehat{v}(\xi)$	
$au(x) + bw(x)$	$a\widehat{u}(\xi) + b\widehat{w}(\xi)$	(2.5)
$u(x-\alpha)$	$e^{-i\alpha\xi}\, \widehat{u}(\xi)$	(2.6)
$e^{i\alpha x}\, u(x)$	$\widehat{u}(\xi - \alpha)$	(2.7)
$u(x/\lambda)$	$\lvert\lambda\rvert\, \widehat{u}(\lambda\xi)$	(2.8)
$\overline{u(x)}$	$\overline{\widehat{u}(-\xi)}$	(2.9)
$\dfrac{d\,u(x)}{dx}$	$i\xi\widehat{u}(\xi)$	(2.10)
$xu(x)$	$i\,\dfrac{d\,\widehat{u}(\xi)}{d\xi}$	(2.11)
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x-y)\, w(y)\, dy$	$\widehat{u}(\xi)\, \widehat{w}(\xi)$	(2.12)

Prima di discutere le ipotesi di validità della tabella ci soffermiamo sull'ultima riga e introduciamo una notazione che la semplifica.

Definizione 2.4. *Siano* $u, w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *due funzioni assegnate. Non appena abbia senso l'integrale che scriviamo, poniamo*

$$(u * w)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-y)w(y)\,dy. \tag{2.13}$$

Se la (2.13) *ha senso per ogni* $x \in \mathbb{R}$, *la funzione* $u * w$ *definita di conseguenza prende il nome di prodotto di convoluzione di* u *e* w *o anche, più semplicemente, di convoluzione delle funzioni considerate.* ∎

L'operazione $*$ di convoluzione ha in comune con l'usuale prodotto diverse proprietà, almeno se ci si limita a imporre alle funzioni in gioco di essere assolutamente integrabili, ipotesi che implica che tutte le convoluzioni siano ben definite. L'operazione $*$ è, infatti, commutativa, associativa e distributiva rispetto alla somma, cioè valgono le formule

$$u * v = v * u, \qquad (u * v) * w = u * (v * w) \qquad \text{e} \qquad u * (v + w) = u * v + u * w$$

nell'ultima essendo inteso che le convoluzioni al secondo membro debbano essere eseguite prima della somma. Con tale definizione la formula (2.12) si riscrive

$$\widehat{u * w} = \widehat{u}\widehat{w}. \;\blacksquare$$

E ora qualche commento sulla validità delle formule della tabella, ove è inteso che a e b sono numeri complessi arbitrari, α è reale e λ è reale diverso da 0.

Le formule (2.5)–(2.9) valgono nella sola ipotesi che u si trasformabile, mentre per le successive occorre qualche condizione aggiuntiva. Naturalmente la (2.5) si esprime anche dicendo che *la trasformazione di Fourier è un operatore lineare*.

La (2.10) vale nell'ipotesi che u possegga derivata continua e che anche questa sia trasformabile, mentre la (2.11) vale se anche la funzione $x \mapsto xu(x)$ è trasformabile e implica, grazie al Teorema 2.2, che la derivata $d\widehat{u}/d\xi$ è continua.

Per la (2.12), infine, occorre supporre che sia trasformabile anche w e in tali condizioni $u * w$ è ben definita e trasformabile di conseguenza. ∎

Le formule (2.5), (2.10) e (2.12) combinate fra loro si prestano alla risoluzione di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Ecco un problema che si ritrova in varie applicazioni della matematica, ad esempio nello studio dei circuiti elettrici (in questo caso x ha il significato di tempo).

Esempio 2.5. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si vuole trovare una funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che verifica in tutto $\mathbb{R}$ l'equazione differenziale

$$au'(x) + u(x) = f(x) \tag{2.14}$$

ove $a > 0$ è fissato. Prendendo le trasformate di entrambi i membri otteniamo

$$ia\xi\widehat{u}(\xi) + \widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi).$$

L'uguaglianza ottenuta è, si noti, *un'equazione algebrica*. La sua soluzione è

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{ia\xi + 1} = \frac{1}{ia\xi + 1} \cdot \widehat{f}(\xi)$$

e possiamo ricavare u se presentiamo il primo fattore dell'ultimo membro, che nell'applicazione al circuito elettrico prende il nome di *funzione di trasferimento del circuito*, come trasformata di una certa funzione E. In tali condizioni avremmo infatti per la (2.12)

$$\widehat{u} = \widehat{E}\widehat{f} = \widehat{E * f}$$

e, assumendo che la trasformazione di Fourier sia un operatore iniettivo, dedurremmo

$$u = E * f, \qquad \text{cioè} \qquad u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x-y) f(y)\, dy.$$

Ora, grazie all'Esempio 2.3, possiamo prendere come E la funzione (2.4) e ottenere la formula finale

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x-y) f(y)\, dy = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)/a}\, f(y)\, dy. \ \blacksquare$$

Naturalmente, perché questo procedimento abbia speranze di essere corretto, è necessario che f possegga trasformata di Fourier. Il metodo, dunque, non si presta a trattare un'equazione il cui secondo membro ad esempio converga a un limite non nullo per x tendente a $\pm\infty$ oppure, addirittura, diverga.

Notiamo inoltre che all'equazione differenziale non è stata affiancata alcuna condizione iniziale, questo in quanto una condizione aggiuntiva l'abbiamo imposta, anche se tacitamente: *l'integrabilità* (assoluta). Vediamo che effettivamente questa richiesta seleziona una sola soluzione dell'equazione (2.14). Infatti, continuando a chiamare u la soluzione trovata e ricordando la teoria generale, vediamo che le soluzioni dell'equazione (2.14) sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$u(x) + w(x) \qquad \text{con } w \text{ soluzione di} \qquad aw'(x) + w(x) = 0,$$

dunque tutte e sole le funzioni del tipo $u(x) + ce^{-x/a}$ con c costante arbitraria. Ora la funzione esponenziale $e^{-x/a}$ non è integrabile sulla retta per cui, se u è integrabile, nessuna soluzione diversa da u può essere integrabile.

Osserviamo infine che per altre equazioni apparentemente analoghe il metodo seguito potrebbe non produrre alcuna soluzione: questa situazione si presenta quando nessuna delle soluzioni è trasformabile.

3. La trasformazione inversa e l'identità di Plancherel

Nell'esempio appena trattato sono emersi due problemi, fra loro strettamente connessi: il primo riguarda l'iniettività della trasformazione di Fourier, il secondo consiste nel calcolo effettivo di una funzione la cui trasformata sia una funzione assegnata. Una risposta ai due problemi, abbastanza soddisfacente almeno per quanto riguarda l'aspetto teorico, è data dal teorema seguente:

Teorema 3.1. *Sia u una funzione continua e assolutamente integrabile. Allora u è l'unica funzione continua e assolutamente integrabile la cui trasformata sia $\widehat{u}$. Se poi anche la trasformata $\widehat{u}$ è assolutamente integrabile, allora vale la formula*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\, \widehat{u}(\xi)\, d\xi \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.1}$$

Inoltre, se w è una funzione continua e assolutamente integrabile e se la funzione

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\, w(\xi)\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

è assolutamente integrabile, allora $\widehat{u}(\xi) = w(\xi)$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}$. ■

Osservazione 3.2. Notiamo che nessuna delle ipotesi può essere soppressa: non le ipotesi di integrabilità, senza le quali ci sarebbero problemi di definizione sia della trasformata $\widehat{u}$ sia dei secondi membri delle (3.1) e (3.2), e nemmeno le ipotesi di continuità fatte su u e su w, come ora spieghiamo riferendoci, ad esempio, solo alla seconda parte dell'enunciato, dato che per la prima valgono considerazioni analoghe. Infatti, grazie al Teorema 2.2, la trasformata $\widehat{u}$ della funzione u definita dalla (3.2) è continua e, se w è discontinua in qualche punto, $\widehat{u}$ non può coincidere con w.

Segnaliamo che l'estensione corretta della formula (3.1) al caso di funzioni discontinue (verificanti ipotesi aggiuntive opportune) si ottiene sostituendo il primo membro $u(x)$ con il valore

$$\frac{1}{2}\big(u(x^+) + u(x^-)\big),$$

che è la media dei due limiti destro e sinistro di u in x, e che la funzione definita dal secondo membro della (3.2) è detta *antitrasformata* oppure *trasformata inversa* di w. ■

Un altro risultato importante è quello che ci accingiamo a enunciare e che consiste in una versione semplificata del cosiddetto *Teorema di Plancherel*. Esso non ha solo un interesse autonomo, ma è importante anche nelle applicazioni all'elettronica, dato che l'integrale di $|u|^2$ è connesso con l'energia del segnale descritto dalla funzione u.

Teorema 3.3. *Sia u una funzione trasformabile. Allora $|\widehat{u}|^2$ è integrabile se e solo se $|u|^2$ è integrabile e, in caso di integrabilità, vale la formula*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2\, dx. \;\blacksquare \tag{3.3}$$

Osservazione 3.4. Per esisenze di maggior semplicità abbiamo considerato sistematicamente solo funzioni continue a tratti. Tuttavia l'ambito più adatto in cui sviluppare la teoria delle trasformate di Fourier è legato all'integrazione di Lebesgue. In questo contesto il Teorema di Plancherel suona come segue: *l'applicazione* $\mathcal{F}$ *che a ogni funzione* u *trasformabile e appartenente a* $L^2(\mathbb{R})$ *associa la sua trasformata* $\widehat{u}$ *ammette uno e un solo prolungamento* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *lineare e continuo da* $L^2(\mathbb{R})$ *in* $L^2(\mathbb{R})$. *Inoltre* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *è un isomorfismo e la* (3.3) *vale per ogni* $u \in L^2(\mathbb{R})$ *se nel suo primo membro si intende di leggere* $\widetilde{\mathcal{F}}u$ *anziché* $\widehat{u}$.

Notiamo che, se $u \in L^2(\mathbb{R})$, la funzione $\widetilde{\mathcal{F}}u$ è chiamata ancora *trasformata di* u e denotata ancora con $\widehat{u}$, con abuso di notazioni, cioè indipendentemente dal fatto che u sia integrabile o meno. Chiaramente però, se u non è integrabile, la definizione di $\widehat{u}$ non è fornita dalla (2.1) punto per punto dato che il secondo membro della (2.1) è di solito insensato, certamente insensato se $\xi = 0$. La funzione $\widehat{u}$ è invece la funzione di $L^2(\mathbb{R})$ alla quale converge, nel senso di $L^2(\mathbb{R})$, la successione $\{\widehat{u}_n\}$, ove $\{u_n\}$ è una successione di funzioni trasformabili convergente a u in $L^2(\mathbb{R})$.

In particolare, per ogni funzione u continua a tratti e tale che $|u|^2$ sia integrabile, risulta definita la trasformata di Fourier $\widehat{u}$, la quale, tuttavia, non sarà più necessariamente una funzione continua, ma solo una funzione il cui quadrato è integrabile secondo Lebesgue. Vale anzi la pena di segnalare che è possibile costruire una funzione u di questo tipo ed estremamente regolare, ad esempio infinitamente derivabile o addirittura analitica, che verifica la condizione seguente: $\widehat{u}$ è illimitata in ogni intervallo delle retta non ridotto a un punto. Per una funzione u di questo tipo il primo membro della (3.3) non può che essere inteso nel senso di Lebesgue e in una versione del Teorema di Plancherel che usi solo la teoria elementare dell'integrazione non può mancare un'ipotesi sulla funzione u che assicuri che la trasformata $\widehat{u}$ non è troppo irregolare. Nel Teorema 3.3 questa ipotesi è l'assoluta integrabilità di u, che fornisce la continuità di $\widehat{u}$ grazie al Teorema 2.2.

Osservazione 3.5. La (3.1) e la sua generalizzazione mostrano fra la teoria delle trasformate e quella delle serie di Fourier un'analogia che vogliamo commentare brevemente.

Consideriamo una funzione u continua, regolare a tratti e periodica di periodo $T > 0$. Allora vale lo sviluppo in serie di Fourier

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} \qquad \text{ove} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3.4}$$

e i coefficienti c_n sono dati dalle formule

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-in\omega x}\, u(x)\, dx. \tag{3.5}$$

Notiamo incidentalmente che, data la periodicità della funzione integranda, l'intervallo di integrazione può essere sostituito da un qualunque altro intervallo di ampiezza T.

Vi è un evidente parallelismo fra le due formule (3.1) e (3.4): nel caso periodico la funzione u è scritta come somma di una serie, mentre nel caso non periodico u si rappresenta mediante un integrale. Nella (3.1) i coefficienti dati dalla (3.5) sono poi sostituiti dalla trasformata definita dalla (2.1).

Riprendiamo il caso periodico e rappresentiamo sulla retta i punti $n\omega$ con n intero qualunque: la loro posizione reciproca dipende da T. Se confrontiamo le situazioni corrispondenti a funzioni periodiche di periodi diversi vediamo che l'insieme di punti trovato si infittisce quando T diventa grande, in quanto ω è proporzionale alla frequenza $1/T$. Se ora immaginiamo una funzione non periodica u in qualche modo come limite di una successione $\{u_k\}$ di funzioni periodiche, per esempio definendo

$$T_k = 2k \qquad \text{e} \qquad u_k(x + nT_k) = u(x) \quad \text{per} \quad |x| < k \quad \text{e} \quad n \ \text{intero},$$

la formula (3.1) di inversione della trasformazione di Fourier appare più che plausibile: le frequenze si sono infittite indefinitamente e la serie è sostituita da un integrale.

L'analoga poi della (3.3) nella teoria delle serie di Fourier è *l'identità di Parseval*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |u(x)|^2 \, dx, \tag{3.6}$$

che lega ancora una volta una funzione u periodica di periodo T ai suoi coefficienti di Fourier (3.5).

4. Trasformate di Laplace

Siccome in tutte le applicazioni interessanti la variabile indipendente ha il significato di tempo, preferiamo la notazione t anziché la lettera x usata nell'introduzione. Inoltre seguendo una consuetudine radicata, utilizziamo la lettera s al posto di y segnalando che un'altra variabile di uso corrente è p.

Il simbolo usato comunemente per la trasformata di Laplace della funzione u è $\mathcal{L}u$, mentre non si trova scritto, di solito, un simbolo più conciso analogo a $\widehat{u}$. Noi conveniamo di denotare le funzioni originarie con lettere minuscole e le loro trasformate di Laplace con le maiuscole corrispondenti.

Definizione 4.1. *Diciamo che una funzione* $u : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ *è di ordine esponenziale quando è continua a tratti ed esiste un numero reale* μ *tale che*

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\mu t} u(t) = 0. \ \blacksquare \tag{4.1}$$

Esempi di funzioni di ordine esponenziale sono allora tutti gli esponenziali $e^{\alpha t}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$, tutti i polinomi e tutte le funzioni limitate. Inoltre somme e prodotti di funzioni di ordine esponenziale sono ancora funzioni di ordine esponenziale. Al contrario la funzione

$$u(t) = e^{t^2}, \qquad t \geq 0,$$

non è di ordine esponenziale in quanto, per ogni μ reale, il prodotto $e^{-\mu t} u(t)$ diverge per $t \to +\infty$. $\blacksquare$

Sia ora $u : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ una funzione di ordine esponenziale e sia $\mu \in \mathbb{R}$ tale che valga la (4.1). Allora, per ogni $s > \mu$ la funzione

$$t \mapsto e^{-st}u(t), \qquad t \geq 0,$$

è assolutamente integrabile, come ora dimostriamo. Infatti, da un lato, essa è continua a tratti. D'altra parte, se t_0 abbastanza grande, vale la disuguaglianza

$$e^{-\mu t}|u(t)| \leq 1 \qquad \text{per ogni } t \geq t_0 .$$

Per gli stessi valori di t abbiamo allora

$$e^{-st}|u(t)| = e^{-(s-\mu)t}e^{-\mu t}|u(t)| \leq e^{-(s-\mu)t}.$$

Siccome $e^{-st}|u(t)|$ è continua a tratti, essa è limitata in $[0, t_0]$. D'altra parte, siccome $s > \mu$, abbiamo $e^{-(s-\mu)t} \geq e^{-(s-\mu)t_0}$ in $[0, t_0]$. Dunque, se scegliamo M abbastanza grande, abbiamo

$$e^{-st}|u(t)| \leq M\, e^{-(s-\mu)t} \qquad \text{per ogni } t \geq 0$$

e possiamo concludere applicando il Teorema 1.6.

Allora la definizione che stiamo per dare effettivamente fornisce una funzione, dato che il suo dominio non sarà vuoto.

Definizione 4.2. *Sia $u : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ una funzione di ordine esponenziale. Allora la sua trasformata di Laplace U è definita dalla formula*

$$U(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, u(t)\, dt \tag{4.2}$$

per tutti i valori di $s \in \mathbb{R}$ tali che la funzione integranda che compare nella (4.2) *sia assolutamente integrabile.* ■

Osservazione 4.3. Si vede immediatamente che, se s appartiene al dominio di U e se $\sigma \geq s$, allora anche σ appartiene al dominio di U. In tali condizioni abbiamo infatti

$$e^{-\sigma t}|u(t)| \leq e^{-st}|u(t)| \qquad \text{per ogni } t \geq 0$$

e ancora concludiamo grazie al Teorema 1.6. Dunque il dominio della trasformata di Laplace di una funzione di ordine esponenziale u è una semiretta di uno dei tipi $s > \lambda$ oppure $s \geq \lambda$ oppure l'intera retta. In ogni caso il valore $U(s)$ della trasformata è definito almeno per s abbastanza grande. ■

Esempio 4.4. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$. Allora la funzione esponenziale $u(t) = e^{\alpha t}$ è di ordine esponenziale e possiamo calcolarne la trasformata di Laplace U. Espresso α nella forma $\alpha_1 + i\alpha_2$, vediamo che il modulo della funzione integranda (4.2) vale

$$e^{-st}|e^{\alpha t}| = |e^{-st}\, e^{(\alpha_1 + i\alpha_2)t}| = |e^{(\alpha_1 - s + i\alpha_2)t}| = e^{(\alpha_1 - s)t} = e^{(\operatorname{Re}\alpha - s)t}.$$

Dunque la funzione considerata è assolutamente integrabile se e solo se $s > \operatorname{Re}\alpha$ e per tali s risulta

$$U(s) = \int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}\,dt = \lim_{a\to+\infty} \frac{e^{(\alpha-s)a}-1}{\alpha-s} = \frac{1}{s-\alpha}$$

in quanto il modulo dell'ultimo esponenziale scritto tende a 0 per $a \to +\infty$. Concludiamo che la trasformata richiesta è data dalla formula

$$U(s) = \frac{1}{s-\alpha}, \qquad s > \operatorname{Re}\alpha.$$

Si noti però che, sebbene il valore trovato $1/(s-\alpha)$ assuma significato per ogni $s \neq \alpha$, solo per $s > \operatorname{Re}\alpha$ esso si interpreta come valore della trasformata $U(s)$.

Abbiamo in particolare che

$$\begin{aligned} &\text{se}\quad u(t) \equiv 1 \quad \text{allora}\quad U(s) = \frac{1}{s}, \quad s>0,\\ &\text{se}\quad u(t) = e^{\pm it} \quad \text{allora}\quad U(s) = \frac{1}{s\mp i}, \quad s>0, \end{aligned}$$

e dalle relazioni di Eulero (1.5) e dalla linearità della trasformazione di Laplace che enunciamo nella tabella successiva deduciamo facilmente che

$$\begin{aligned} &\text{se}\quad u(t) = \cos t \quad \text{allora}\quad U(s) = \frac{s}{s^2+1}, \quad s>0,\\ &\text{se}\quad u(t) = \sin t \quad \text{allora}\quad U(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad s>0. \end{aligned}$$

Le trasformate di Laplace e di Fourier presentano diverse analogie, come mostrerà la tabella delle proprietà più significative, ma anche notevoli differenze. Una di queste è il risultato che enunciamo di seguito, che si contrappone al Teorema 2.2 e assicura ben più della continuità della trasformata.

Teorema 4.5. *Sia $u : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ una funzione di ordine esponenziale e sia s_0 un punto del dominio della sua trasformata di Laplace U. Allora U è infinitamente derivabile nella semiretta $(s_0,+\infty)$ e verifica*

$$\lim_{s\to+\infty} U(s) = 0. \ \blacksquare \tag{4.3}$$

Anche in questo caso riuniamo in una tabella le principali proprietà della trasformazione di Laplace. Nell'elenco è inteso che $a, b, \beta \in \mathbb{C}$, che $\alpha, \lambda > 0$ e che s sia abbastanza grande, in dipendenza dai domini delle trasformate delle funzioni di partenza.

$v(t)$	$V(s)$	
$au(t) + bw(t)$	$aU(s) + bW(s)$	(4.4)
$\begin{cases} u(t-\alpha) & \text{se } t > \alpha \\ 0 & \text{se } 0 \le t \le \alpha \end{cases}$	$e^{-\alpha s}\, U(s)$	(4.5)
$e^{\beta t}\, u(t)$	$U(s-\beta)$	(4.6)
$u(t/\lambda)$	$\lambda\, U(\lambda s)$	(4.7)
$\dfrac{d\, u(t)}{dt}$	$sU(s) - u(0)$	(4.8)
$\dfrac{d^2\, u(t)}{dt^2}$	$s^2 U(s) - s\, u(0) - u'(0)$	(4.9)
$tu(t)$	$-\dfrac{d\, U(s)}{ds}$	(4.10)
$\displaystyle\int_0^t u(t-\tau)\, w(\tau)\, d\tau$	$U(s)\, W(s)$	(4.11)
$\displaystyle\int_0^t u(\tau)\, d\tau$	$\dfrac{U(s)}{s}$	(4.12)

Tutte le formule, tranne le (4.8) e (4.9), valgono nella sola ipotesi che la funzione u (le due funzioni u e w per la (4.11)) siano di ordine esponenziale, dato che risultano automaticamente di ordine esponenziale anche le funzioni di volta in volta costruite.

La (4.8) vale nell'ipotesi che u possegga derivata di ordine esponenziale. Questa ipotesi implica che è di ordine esponenziale anche la funzione u stessa. La (4.9) è semplicemente un'iterazione della (4.8).

Un commmento merita la (4.11). Introduciamo le due funzioni $\widetilde{u}$ e $\widetilde{w}$ mediante

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t \ge 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{w}(t) = \begin{cases} w(t) & \text{se } t \ge 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

e calcoliamone la convoluzione. Abbiamo

$$(\widetilde{u} * \widetilde{w})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{u}(t-\tau)\, \widetilde{w}(\tau)\, d\tau = \int_{(-\infty,t)\cap(0,+\infty)} u(t-\tau)\, w(\tau)\, d\tau.$$

Se ora $t \le 0$ le semirette $(-\infty, t)$ e $(0, +\infty)$ non si intersecano e abbiamo $(\widetilde{u} * \widetilde{w})(t) = 0$. Se invece $t > 0$ l'intersezione delle due semirette è l'intervallo $(0, t)$ e concludiamo che

$$(\widetilde{u} * \widetilde{w})(t) = \int_0^t u(t-\tau)\, w(\tau)\, d\tau.$$

Dunque la funzione che compare nella (4.11) non è altro che una forma di convoluzione fra le funzioni u e w e, nel contesto delle trasformate di Laplace, essa viene ancora denotata con $u * w$.

Notiamo infine che la (4.12) è il caso particolare della (4.11) in cui una delle due funzioni è la costante 1. ■

Come si vede chiaramente, gli elenchi delle proprietà delle trasformate di Laplace e di Fourier hanno strette analogie. Non abbiamo scritto però la corrispondente della (3.3) per la trasformata di Laplace dato che essa non è particolarmente interessante nelle applicazioni di carattere elementare.

Per quanto riguarda invece una formula di inversione analoga ad esempio alla (3.1), segnaliamo che il problema è risolto in modo soddisfacente, ma che già un enunciato preciso in questa direzione fa intervenire la teoria delle *funzioni olomorfe di variabile complessa*. La ricostruzione della funzione originaria u in termini della sua trasformata U, infatti, avviene, in ipotesi opportune, per mezzo della formula

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x+iy)t}\, U(x+iy)\, dy \tag{4.13}$$

il cui secondo membro contiene, oltre al parametro x dal quale poi risulta indipendente, il valore assunto da U in punti non reali. Si tratta infatti di un abuso di notazioni e, nella (4.13), è inteso che U non rappresenti più la trasformata di u ma il suo prolungamento olomorfo a un opportuno semipiano del piano complesso.

Per questo motivo ci limitiamo a enunciare una versione ridotta del teorema di inversione, che è analoga alla prima parte del Teorema 3.1, ma senza formule.

Teorema 4.6. *Sia $u : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ una funzione continua di ordine esponenziale e sia U la sua trasformata di Laplace. Allora u è l'unica funzione continua di ordine esponenziale la cui trasformata è U.* ■

Le formule (4.8) e (4.9) sono particolarmente indicate per la risoluzione di problemi di Cauchy per equazioni lineari, dato che fanno intervenire le condizioni iniziali su u. Ecco una applicazione, analoga all'Esempio 2.5 e ancora interpretabile in termini di un circuito elettrico, ma relativa appunto a un problema di Cauchy in $[0,+\infty)$ anziché a un'equazione differenziale sull'intera retta.

Esempio 4.7. Data la funzione $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ si vuole determinare una funzione $u : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ che verifica in $[0,+\infty)$ l'equazione differenziale

$$au'(t) + u(t) = f(t) \tag{4.14}$$

e la condizione iniziale

$$u(0) = u_0 \tag{4.15}$$

ove $a > 0$ e u_0 sono fissati. Prendendo le trasformate dei due membri della (4.14) e utilizzando la (4.8) e la (4.15) otteniamo

$$a\bigl(sU(s) - u_0\bigr) + U(s) = F(s).$$

Anche in questo caso l'uguaglianza ottenuta è *un'equazione algebrica* e la sua soluzione è

$$U(s) = \frac{au_0 + F(s)}{as+1} = \frac{1}{as+1} \cdot \big(au_0 + F(s)\big).$$

Abbiamo evidenziato la funzione $1/(as+1)$ che, nell'applicazione al circuito elettrico, è detta ancora *funzione di trasferimento del circuito*. Osservato che

$$\frac{1}{as+1} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{s+1/a}$$

per cui, grazie all'Esempio 4.4 con $\alpha = -1/a$, essa è la trasformata di Laplace della funzione

$$w(t) = \frac{1}{a}\, e^{-t/a},$$

possiamo rappresentare U nella forma

$$U(s) = \frac{u_0}{s+1/a} + W(s)F(s)$$

e ricavare u utilizzando le (4.4) e (4.11). Concludiamo

$$u(t) = u_0 w(t) + (w * f)(t) = u_0 e^{-t/a} + \frac{1}{a}\int_0^t e^{-(t-\tau)/a}\, f(\tau)\, d\tau.$$