Teoremi di regolarità per un'equazione ellittica

Siano Ω un aperto limitato e regolare di $\mathbb{R}^n$ con frontiera Γ e ν la normale esterna su Γ e si consideri la forma bilineare su $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$

$$(1) \qquad a(u,v) = \int_\Omega \big((A\nabla u)\cdot\nabla v + (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v + (\mathbf{c}u)\cdot\nabla v + duv \big)\,dx + \int_\Gamma \varphi uv\,ds,$$

ove $A = (a_{ij})$, $\mathbf{b} = (b_i)$, $\mathbf{c} = (c_i)$, d e φ verificano

$$a_{ij}, b_i, c_i, d \in L^\infty(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \varphi \in L^\infty(\Gamma)$$

e A verifica la condizione di uniforme ellitticità

$$\exists\, \alpha > 0: \qquad \big(A(x)\xi\big)\cdot\xi \ge \alpha|\xi|^2 \quad q.o. \text{ in } \Omega \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Siano poi V un sottospazio chiuso di $H^1(\Omega)$ che include $H^1_0(\Omega)$ e L un funzionale lineare e continuo su V e consideriamo l'equazione variazionale

$$(2) \qquad u \in V, \qquad a(u,v) = L(v) \qquad \forall\, v \in V.$$

Nel caso in cui L è dato dalla formula

$$(3) \qquad L(v) = \int_\Omega fv\,dx + \int_\Gamma gv\,ds, \qquad v \in H^1(\Omega),$$

ove $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(\Gamma)$, la (2) è la formulazione variazionale di un problema ai limiti per l'equazione

$$(4) \qquad u \in H^1(\Omega), \qquad -\operatorname{div}(A\nabla u + \mathbf{c}u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u + du = f, \quad \text{in } \Omega$$

in quanto $H^1_0(\Omega) \subset V$. Le condizioni ai limiti sono contenute in (2) e sono, in tutto o in parte, forzate dalla condizione $u \in V$ oppure naturali, cioè derivanti dall'integrazione per parti e date da

$$(5) \qquad \langle \varphi u + (A\nabla u + \mathbf{c}u)\cdot\nu, v\rangle = \int_\Omega gv\,ds \qquad \forall\, v \in V,$$

ove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è la dualità fra $H^{-1/2}(\Gamma)$ e $H^{1/2}(\Gamma)$.

Indipendentemente da questioni di esistenza e unicità della soluzione, vogliamo studiare la regolarità delle soluzioni dell'equazione (4) e delle soluzioni del problema (2). Per quanto riguarda l'equazione abbiamo risultati di regolarità locale in ipotesi di regolarità locale sui coefficienti della forma a e sulla funzione f; per il problema (2), oltre alla regolarità globale dei coefficienti, di L e dell'aperto Ω, occorrono *ipotesi restrittive sullo spazio* V: queste ammettono le due scelte $V = H^1_0$ e $V = H^1$, corrispondenti al problema di Dirichlet e, rispettivamente, al problema del tipo di Neumann

$$\varphi u + (A\nabla u + \mathbf{c}u)\cdot\nu = g \qquad \text{su } \Gamma$$

ma escludono una scelta generica di V: ad esempio il caso del problema misto non rientra.

Nel seguito la scrittura $\omega \subset\subset \Omega$ significa che ω è un aperto la cui chiusura è un compatto incluso in Ω.

1. Teorema. *Supponiamo che i coefficienti* a_{ij} *e* c_i *della (4) appartengano a* $W^{1,\infty}(\Omega)$ *e che* $f \in L^2(\Omega)$ *. Allora ogni soluzione* u *della (4) appartiene a* $H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ *e, per ogni* $\omega \subset\subset \Omega$ *, esiste una costante* c *, che dipende solo da* n *, dalle norme*

$$\|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\,, \quad \|c_i\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\,, \quad \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}\,, \quad \|d\|_{L^\infty(\Omega)}$$

dalla costante α *di ellitticità e dalla distanza di* ω *da* $\partial\Omega$ *, tale che*

$$\|u\|_{H^2(\omega)} \le c \Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \Big) \,. \; \square \tag{6}$$

Dimostrazione. Si noti che l'equazione (4) si ottiene dalla (2) lasciando variare v in $H^1_0(\Omega)$ e assumendo che L sia dato dal primo degli integrali (3), per cui possiamo evitare le derivate seconde della (4) e considerare la (2), che contiene solo derivate prime.

L'idea è la seguente: fissato k , se la derivata seconda $D^2_k u$ fosse una funzione test ammissibile e se non si originassero termini di bordo dall'integrazione per parti, la scelta $v = D^2_k u$ fornirebbe un'uguaglianza del tipo

$$-a(D_k u, D_k u) - \ldots = \int_\Omega f D_k(D_k u)$$

ove i puntini denotano termini, originati dalla derivazione dei prodotti, che contengono derivate prime dei coefficienti e la funzione u tramite al massimo le sue derivate prime. Dunque, in ipotesi di H^1-ellitticità, si otterrebbe una stima della norma H^1 di $D_k u$ in funzione della norma H^1 di u . Ma questo ragionamento, se fosse lecito, porterebbe a un risultato assurdo di regolarità globale e, d'altra parte, vogliamo fare solo ipotesi di ellitticità e di regolarità dei coefficienti *senza supporre la forma* H^1- *ellittica*.

L'idea, dunque, deve essere sistemata. Innanzi tutto il problema dei termini di bordo: questo si aggira inserendo nella funzione test una funzione a supporto compatto e la scelta più naturale è del tipo $\zeta^2 D^2_k u$ oppure $D_k(\zeta^2 D_k u)$ o simili, ove $\zeta = 1$ in ω , ciò da un lato per avere $\zeta u = u$ in ω e, dall'altro, per ottenere due fattori $\zeta D_k u$, uno per ciascuno dei due argomenti della forma bilineare.

D'altra parte la regolarità di u non è ancora nota, per cui non è lecita una scelta della funzione test che fa intervenire derivate di u addirittura del secondo ordine. Il trucco consiste allora nella sostituzione della derivata con il corrispondente rapporto incrementale e, di conseguenza, in una scelta del tipo $v = \zeta^2 (u_{\pm h})_{\pm h}$ o simili, ove, in generale, poniamo formalmente

$$v_h(x) = \frac{v(x+he) - v(x)}{h}, \tag{7}$$

e essendo un versore fissato, ad esempio il $k-$esimo della base canonica. Si noti che la definizione di v_h ha senso solo imponendo restrizioni alla coppia (x,h) : occorre che x e $x+he$ appartengano entrambi a Ω . Se però v ha supporto compatto, pur di sottintendere un prolungamento triviale, la definizione ha senso in tutto Ω se $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$ e la stessa osservazione si adatta nel caso in cui v non sia a supporto compatto ma la scelta della funzione test finale contenga fattori a supporto compatto.

Per rendere più chiaro lo sviluppo dell'idea, procediamo in due tappe, sostanzialmente prendendo un rapporto incrementale per volta e osserviamo una volta per tutte che, se i due fattori appartengono a $L^2(\Omega)$ e uno di essi ha supporto compatto, per $|h|$ è abbastanza piccolo valgono le formule, la seconda delle quali è una fomula di integrazione per parti discreta,

$$(FG)_h(x) = F(x+he)G_h(x) + F_h(x)G(x) \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega FG_h\,dx = -\int_\Omega F_{-h}G\,dx.$$

Sia dapprima v una funzione di $H^1(\Omega)$ a supporto compatto: allora, supponendo senz'altro $2|h| < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, \partial\Omega)$, la scelta della funzione v_{-h} al posto di v è lecita nella (2) con $V = H^1_0(\Omega)$; inoltre $\|v_h\|_{L^2} \le \|v\|_{H^1}$ per tali h. Ci proponiamo di ottenere un'uguaglianza del tipo

$$\int_\Omega \bigl(A(\ldots)\nabla u_h(x)\bigr)\cdot\nabla v(x)\,dx = L_1(v), \tag{8}$$

ove i puntini denotano un punto che potrebbe non essere proprio x e L_1 è un funzionale lineare e continuo su $H^1(\Omega)$ la cui norma si maggiora come segue

$$\|L_1\|_* \le c\Bigl(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\Bigr), \tag{9}$$

con una costante c che dipende solo da n e dai coefficienti come specificato nell'enunciato. Dunque, isolando il primo membro della (8), portiamo al secondo membro tutti gli integrali che non contribuiscono a tale primo membro e vediamo che essi possono essere stimati come in (9). Dunque consideriamo L_1 sostanzialmente come un termine noto, anche se esso contiene u.

Il primo termine del primo membro della (2) diventa

$$\int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v_{-h} = -\int_\Omega (A\nabla u)_h\cdot\nabla v =$$
$$-\int_\Omega \bigl(A(x+he)\nabla u_h(x)\bigr)\cdot\nabla v(x)\,dx - \int_\Omega A_h(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx.$$

L'ultimo integrale si maggiora con $c\,\|u\|_{H^1(\Omega)}\,\|v\|_{H^1(\Omega)}$, ove c dipende solo da n e dalla massima delle norme dei coefficienti a_{ij} in $W^{1,\infty}(\Omega)$, per cui può essere portato al secondo membro.

Per questo stesso motivo possono essere portati al secondo membro gli altri termini del primo membro della (2) dato che

$$\left|\int_\Omega \bigl((\mathbf{b}\cdot\nabla u)v_{-h} + (\mathbf{c}u)\cdot\nabla v_{-h} + (du)v_{-h}\bigr)\,dx\right| =$$
$$\left|\int_\Omega \bigl((\mathbf{b}\cdot\nabla u)v_{-h} - (\mathbf{c}u)_h\cdot\nabla v + (du)v_{-h}\bigr)\,dx\right| \le c\,\|u\|_{H^1(\Omega)}\,\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

con c dipendente solo da n e dalle norme dei coefficienti specificate nell'enunciato. Allora cambiando tutti i segni, si arriva all'uguaglianza

$$\int_\Omega \big(A(x+he)\nabla u_h(x)\big)\cdot\nabla v(x)\,dx = L_1(v), \tag{10}$$

ove L_1 ha le proprietà richieste.

Passiamo alla seconda tappa. Siccome la (10) vale per tutte le $v \in H^1$ a supporto compatto e per $2|h| < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, \partial\Omega)$, possiamo prendere $v = \zeta^2 u_h$, ove $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ è arbitraria. Ci proponiamo di stimare l'integrale

$$\int_\Omega \big(A(x+he)\zeta\nabla u_h\big)\cdot(\zeta\nabla u_h)\,dx \tag{11}$$

per mezzo di termini del tipo $\|f\|_{L^2}^2$, $\|u\|_{H^1}^2$ e $\|\zeta\nabla u_h\|_{L^2}^2$, prestando attenzione al fatto che l'ultimo termine abbia un coefficiente piccolo in modo che possa essere compensato dal primo membro grazie all'ellitticità. Ora le costanti possono dipendere anche da ζ e occorre controllare tale dipendenza.

Osserviamo innanzi tutto che

$$\nabla(\zeta^2 u_h) = 2\zeta u_h\nabla\zeta + \zeta^2\nabla u_h,$$

per cui il buon contributo è dato dal secondo addendo inserito nella (10): esso fornisce infatti proprio l'integrale (11). Occorre dunque portare al secondo membro il termine dovuto al primo addendo e ciò non disturba in quanto risulta per ogni $\varepsilon > 0$

$$\left|\int_\Omega \big(A(x+he)\nabla u_h\big)\cdot(2\zeta u_h\nabla\zeta)\,dx\right| \le 2c\,\|\zeta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\,\|u\|_{H^1(\Omega)}\,\|\zeta\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} \le$$
$$\varepsilon\,\|\zeta\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c^2}{\varepsilon}\,\|\zeta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}^2\,\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 .$$

Occorre ora stimare il secondo membro della (10) con $v = \zeta^2 u_h$. Stimiamo dunque la norma di v in $H^1(\Omega)$. Risulta

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \le \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)}^2\,\|u\|_{H^1(\Omega)};$$

inoltre

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \le 2\,\|\zeta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}^2\,\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|\zeta\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} .$$

Segue allora per ogni $\varepsilon > 0$

$$|L_1(v)| \le \|L_1\|_*\,\|v\|_{H^1(\Omega)} \le$$
$$2\,\|L_1\|_*\,\|\zeta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}^2\,\|u\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon\,\|\zeta\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\,\|L_1\|_*^2\,\|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)}^2 .$$

Queste disuguaglianze, inserite nella (10), implicano subito una stima di $\|\zeta\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}$. Basta infatti usare l'ipotesi di ellitticità e scegliere ad esempio $\varepsilon = \alpha/4$ per compensare i due termini $\varepsilon\|\zeta\nabla u_h\|^2_{L^2(\Omega)}$ delle disuguaglianze precedenti con il primo membro. Otteniamo la maggiorazione

$$\frac{\alpha}{4}\|\zeta\nabla u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \le c\left(\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|L_1\|_* \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|L_1\|^2_*\right),$$

ove ora c dipende anche da α e da $\|\zeta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$.

Tenendo conto della disuguaglianza $\|\zeta u_h\|_{L^2(\Omega)} \le c\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e della (9) concludiamo

$$\|\zeta u_h\|^2_{H^1(\Omega)} \le c\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\right), \tag{12}$$

ove c dipende solo da n e dalle norme dei coefficienti specificate nell'enunciato, dalla costante α di ellitticità e dalla norma $W^{1,\infty}$ della funzione ζ.

Dalla (12) deduciamo facilmente per la funzione u la regolarità H^2_{loc}. Infatti essa vale per ogni h sufficientemente piccolo e implica la limitatezza in $H^1(\Omega)$ della famiglia $\{\zeta u_h\}$. Quindi, se ricordiamo che il versore e era arbitrario, deduciamo che tutte le componenti di $\zeta\nabla u$ appartengono a $H^1(\Omega)$ e che le loro norme si maggiorano esattamente come nella (12), cioè

$$\|\zeta D_k u\|^2_{H^1(\Omega)} \le c\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\right). \tag{13}$$

Dunque la funzione ζu appartiene a $H^2(\Omega)$. Siccome ciò vale per ogni $\zeta \in C^\infty_0(\Omega)$, deduciamo $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Veniamo ora alla (6). Sia dunque $\omega \subset\subset \Omega$. Allora, posto $\delta = \mathrm{dist}(\omega, \partial\Omega)$, possiamo scegliere la funzione $\zeta \in C^\infty_0(\Omega)$ tale che

$$0 \le \zeta \le 1 \quad \text{e} \quad |\nabla\zeta| \le 2/\delta \quad \text{in } \Omega, \qquad \zeta = 1 \quad \text{in } \omega.$$

Minorando il primo membro della (13) e maggiorando il secondo, otteniamo

$$\|D_k u\|^2_{H^1(\omega)} \le c\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\right) \tag{14}$$

ove ora c dipende anche da δ e, sommando rispetto a k, abbiamo la tesi. □

2. Osservazione. Se u è una soluzione della (4) i coefficienti della quale sono regolari solo in un aperto $\Omega_0 \subset \Omega$, vale un risultato analogo. Infatti la (4) è soddisfatta anche nell'aperto Ω_0 e il discorso precedente si applica semplicemente sostituendo Ω con Ω_0 ovunque, in particolare anche nel secondo membro della (6). La stessa osservazione vale per il termine noto: possiamo cioè considerare la situazione generale (2) con $V = H^1_0(\Omega)$ e supporre che valga la rappresentazione

$$L(v) = \int_{\Omega_0} f v\,dx \qquad \text{se} \qquad v \in H^1_0(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{supp} v \subset \Omega_0,$$

mentre per la generica $v \in H_0^1(\Omega)$ il valore $L(v)$ può anche non essere rappresentato nel modo detto. Questa circostanza si verifica ad esempio se

$$L(v) = \int_\Omega \bigl(fv + \mathbf{F} \cdot \nabla v\bigr)\, dx$$

con $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{F} \in (L^2(\Omega))^n$ e $\mathbf{F}$ nulla in Ω_0 ma irregolare in $\Omega \setminus \Omega_0$.

Si noti inoltre che, dato il carattere locale del risultato ottenuto, le ipotesi di limitatezza e di regolarità di Ω non sono state sfruttate. Di fatto le conclusioni sono vere nel caso di un aperto qualunque. $\square$

Veniamo ora a risultati di regolarità globale, per i quali è invece necessario supporre Ω limitato e regolare. In tali condizioni, grazie alla partizione dell'unità e al Teorema 1, è sufficiente trovare una stima locale per ogni punto del bordo: precisamente, fissato ad arbitrio un punto $x_0 \in \partial\Omega$ cerchiamo un intorno di x_0 per il quale valga una stima, analoga alla (6), nella quale intervengano anche i termini di bordo se il problema non è un problema di Dirichlet omogeneo.

Lo schema del discorso si articola allora sui punti seguenti: 1) localizzazione; 2) cambiamento di coordinate per ridurre il problema locale al caso in cui l'aperto sia un semispazio; 3) stime per il semispazio; 4) conclusione tramite trasferimento delle stime e partizione dell'unità. I primi tre punti sono oggetti di altrettanti lemmi. $\square$

Per poter localizzare il problema occorre un'ipotesi sul sottospazio V:

$$\zeta v \in V \qquad \forall\, v \in V \quad \forall\, \zeta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{15}$$

Notiamo che la (15) significa che la condizione da imporre sulla generica $v \in H^1(\Omega)$ perché essa appartenga a V deve avere carattere locale: resta ad esempio escluso il caso del sottospazio V di $H^1(0,1)$ descritto dalla condizione di periodicità $v(0) = v(1)$.

3. Lemma. *Si supponga che $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e che valga l'ipotesi (15). Se u è una soluzione del problema (2) con L dato da (3) e se $\zeta \in C^\infty(\overline{\Omega})$, allora ζu è la soluzione di un problema dello stesso tipo, ove f e g sono sostituite da nuove funzioni $F \in L^2(\Omega)$ e $G \in L^2(\Gamma)$, dipendenti anche da u, nulle fuori di $\operatorname{supp}\zeta$ e verificanti le disuguaglianze*

$$\|F\|_{L^2(\Omega)} + \|G\|_{L^2(\Gamma)} \le c\Bigl(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\Bigr),$$

con una costante c che dipende solo da Ω e dalle norme

$$\|\zeta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}, \quad \|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}, \quad \|c_i\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Inoltre, se Ω è di classe C^2 e $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, risulta $G \in H^{1/2}(\Gamma)$ e

$$\|G\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le c\Bigl(\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\Bigr),$$

ove c dipende ora anche da $\|\zeta\|_{W^{2,\infty}}$ e dalla struttura C^2 di Γ. $\square$

Dimostrazione. Dobbiamo valutare la quantità $a(\zeta u, v)$, che è la somma di cinque contributi, e presentarla come la somma di $a(u,\zeta v)$ e di certi termini di tipo (3). Valutiamo il primo contributo:

$$\int_\Omega \big(A\nabla(\zeta u)\big)\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega \big(A(\zeta\nabla u + u\nabla\zeta)\big)\cdot\nabla v\,dx =$$
$$\int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla(\zeta v)\,dx - \int_\Omega \big((A\nabla u)\cdot\nabla\zeta\big)v\,dx - \int_\Omega \big(\operatorname{div}(uA\nabla\zeta)\big)v\,dx + \int_\Gamma u(A\nabla\zeta)\cdot\nu v\,ds =$$
$$\int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla(\zeta v)\,dx + \int_\Omega F_1 v\,dx + \int_\Gamma G_1 v\,ds,$$

ove $F_1 \in L^2(\Omega)$ e $G_1 \in L^2(\Gamma)$ sono date da

$$F_1 = -(A\nabla u)\cdot\nabla\zeta - \operatorname{div}(uA\nabla\zeta) \qquad \text{e} \qquad G_1 = u(A\nabla\zeta)\cdot\nu$$

e verificano disuguaglianze del tipo dell'enunciato, come si vede subito ricordando che $\|u\|_{L^2(\Gamma)} \le c\,\|u\|_{H^1(\Omega)}$ con c dipendente da Ω. Abbiamo analogamente

$$\int_\Omega \big(\mathbf{b}\cdot\nabla(\zeta u)\big)v\,dx = \int_\Omega (\mathbf{b}\cdot\nabla u)(\zeta v)\,dx + \int_\Omega F_2 v\,dx, \qquad \text{ove} \qquad F_2 = (\mathbf{b}u)\cdot\nabla\zeta,$$
$$\int_\Omega (\mathbf{c}\zeta u)\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega (\mathbf{c}u)\cdot\nabla(\zeta v)\,dx + \int_\Omega F_3 v\,dx, \qquad \text{ove} \qquad F_3 = -(\mathbf{c}u)\cdot\nabla\zeta,$$

mentre gli ultimi due contributi non necessitano di trasformazioni particolari. Abbiamo pertanto per ogni $v \in V$

$$a(\zeta u, v) = a(u,\zeta v) + \int_\Omega (F_1+F_2+F_3)v\,dx + \int_\Gamma G_1 v\,ds$$

e, dato che anche ζv appartiene a V, deduciamo

$$a(\zeta u, v) = \int_\Omega Fv\,dx + \int_\Gamma Gv\,ds$$

ove $F = f + F_1 + F_2 + F_3$ e $G = g + G_1$, e queste verificano le proprietà richieste.

Supponiamo ora Ω di classe C^2 e $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. Allora il termine $(A\nabla\zeta)\cdot\nu$ risulta lipschitziano su Γ e la sua costante di Lipschitz si stima in termini delle norme $\|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}}$ e $\|\zeta\|_{W^{2,\infty}}$ e della struttura C^2 di Γ. Quindi, essendo $u \in H^{1/2}(\Gamma)$, risulta anche $G_1 \in H^{1/2}(\Gamma)$, da cui $G \in H^{1/2}(\Gamma)$. Inoltre

$$\|G\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|G_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le$$
$$\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + c_0\,\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le c\Big(\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\Big). \ \square$$

4. Lemma. *Si supponga che Ω sia l'immagine di un altro aperto limitato $\widehat{\Omega}$ di $\mathbb{R}^n$ tramite un'applicazione ψ invertibile e di classe C^1 con l'inversa in un aperto che contiene la chiusura di $\widehat{\Omega}$. Se u è una soluzione del problema (2), allora la funzione $\widehat{u} = u\circ\psi$ è soluzione di un problema dello stesso tipo per il quale vale ancora una condizione di ellitticità uniforme.* $\square$

Dimostrazione. Lo spazio funzionale $\widehat{V}$ da considerare è il seguente

$$\widehat{V} = \{v \circ \psi : \quad v \in V\}$$

e, grazie alla formula di derivazione delle funzioni composte, risulta un sottospazio chiuso di $H^1(\widehat{\Omega})$ contenente $H^1_0(\widehat{\Omega})$. Inoltre l'applicazione $v \mapsto v \circ \psi$ è un isomorfismo algebrico di V su $\widehat{V}$ continuo con l'inverso.

Nel seguito Jf denota la matrice jacobiana della generica funzione f. Detta per semplicità M l'inversa di $(J\psi)^t$ e posto $\delta = |\det J\psi|$, se $v \in V$ e $\widehat{v} = v \circ \psi$, risulta

$$\nabla\widehat{v} = (J\widehat{v})^t = \bigl\{\bigl((Jv)\circ\psi\bigr)J\psi\bigr\}^t = \bigl\{\bigl((\nabla v)^t\circ\psi\bigr)J\psi\bigr\}^t = M^{-1}\bigl((\nabla v)\circ\psi\bigr).$$

Dunque $(\nabla v)\circ\psi = M\nabla\widehat{v}$. Posto $\widehat{A} = A \circ \psi$, deduciamo allora

$$\int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega (\nabla v)^t A\nabla u\,dx = \int_{\widehat{\Omega}} \bigl((\nabla v)^t\circ\psi\bigr)(A\circ\psi)\bigl((\nabla u)\circ\psi\bigr)\,\delta\,d\widehat{x} =$$
$$\int_{\widehat{\Omega}} (\nabla\widehat{v})^t M^t \widehat{A} M\nabla\widehat{u}\,\delta\,d\widehat{x} = \int_{\widehat{\Omega}} (\delta M^t\widehat{A}M\nabla\widehat{u})\cdot\nabla\widehat{v}\,d\widehat{x} = \int_{\widehat{\Omega}} (B\nabla\widehat{u})\cdot\nabla\widehat{v}\,d\widehat{x},$$

ove naturalmente $B = \delta M^t\widehat{A}M$, e gli altri contributi e i termini noti si trattano analogamente. Dunque $\widehat{u}$ effettivamente risolve un problema su $\widehat{\Omega}$ analogo a quello risolto da u e occorre vedere la condizione di ellitticità. Se $\xi \in \mathbb{R}^n$ si ha q.o. in $\widehat{\Omega}$

$$\xi^t B\xi = \delta\xi^t M^t\widehat{A}M\xi = \delta(M\xi)^t\widehat{A}(M\xi) \geq m_1\alpha|M\xi|^2 \geq \frac{m_1\alpha}{m_2^2}|\xi|^2,$$

ove $m_1 = \inf\limits_{\widehat{x}\in\widehat{\Omega}} \delta(\widehat{x})$ e $m_2 = \sup\limits_{x\in\Omega} \|M^{-1}(x)\|$. $\square$

5. Osservazione. Se $a_{ij}, c_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e ψ è di classe C^2, anche i coefficienti del problema trasformato godono della stessa regolarità e le loro norme si stimano in funzione di quelle dei coefficienti originari, delle norme L^∞ delle derivate prime e seconde di ψ e della costante m_1 introdotta nella dimostrazione precedente.

Un'osservazione analoga vale poi per i termini noti. Abbiamo ad esempio

$$\int_\Gamma gv\,ds = \int_{\widehat{\Gamma}} \widehat{g}\widehat{v}\,ds \qquad \text{e} \qquad \|\widehat{g}\|_{H^{1/2}(\widehat{\Gamma})} \leq c\,\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

ove naturalmente $\widehat{\Gamma} = \psi^{-1}(\Gamma) = \partial\widehat{\Omega}$. $\square$

Consideriamo ora il caso del semispazio $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ descritto dalla condizione $x_n > 0$, supponendo naturalmente $n \geq 2$. Se cerchiamo di imitare la dimostrazione del Teorema 1, ove ora la funzione test v non ha più necessariamente supporto compatto in Ω, si capisce che è necessario attribuire un significato al rapporto incrementale v_h della generica funzione $v \in V$. Per questo occorre supporre che $x + he \in \Omega$ non appena $x \in \Omega$, cioè che il versore e sia parallelo al bordo Γ del semispazio Ω, cioè appartenga allo stesso Γ. Il caso in cui e sia l'ultimo versore della base canonica verrà recuperato a parte, sfruttando l'equazione.

Ma occorre anche l'ipotesi essenziale seguente

$$v_h \in V \qquad \forall\, v \in V \quad \forall\, e \in \Gamma \quad \forall\, h \neq 0, \tag{16}$$

che si esprime dicendo che V *è invariante per traslazioni nelle direzioni tangenti al suo bordo*. Tale ipotesi è ovviamente soddisfatta dai sottospazi $H^1_0(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$, corrispondenti ai problemi di Dirichlet e di Neumann rispettivamente, mentre essa è violata nel caso di problemi di tipo misto, per i quali l'appartenenza a V significa l'annullamento su una parte propria di Γ.

Alla trattazione del caso del semispazio premettiamo due lemmi, il primo dei quali vale di fatto per un aperto Ω qualunque.

6. Lemma. *Si supponga che $a_{ij}, c_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e che u sia una soluzione dell'equazione (4) con $f \in L^2(\Omega)$ verificante la condizione seguente sulle derivate seconde*

$$D_{ij}u \in L^2(\Omega) \qquad e \qquad \|D_{ij}u\|_{L^2(\Omega)} \leq K \qquad per \quad 1 \leq i < n \quad e \quad 1 \leq j \leq n.$$

Allora anche la derivata seconda $D_{nn}u$ appartiene a $L^2(\Omega)$ e risulta

$$\|D_{nn}u\|_{L^2(\Omega)} \leq cK', \qquad ove \qquad K' = K + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

e c è una costante che dipende solo da n, dalle norme

$$\|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\,, \quad \|c_i\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\,, \quad \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}\,, \quad \|d\|_{L^\infty(\Omega)}$$

e dalla costante α di ellitticità. □

Dimostrazione. Osserviamo che, se $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in (L^2(\Omega))^n$ e $\operatorname{div}\mathbf{w}, \operatorname{div}\mathbf{w}' \in L^2(\Omega)$, allora

$$\operatorname{div}(\mathbf{w} - \mathbf{w}') \in L^2(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \|\operatorname{div}(\mathbf{w} - \mathbf{w}')\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\operatorname{div}\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}\mathbf{w}'\|_{L^2(\Omega)}$$

come si vede immediatamente ricordando la definizione e ora sfruttiamo bene questa semplice osservazione. Nel seguito c denota diverse costanti nelle condizioni dell'enunciato.

Prendendo $\mathbf{w} = A(\nabla u + \mathbf{c}u)$ e $\mathbf{w}' = A\mathbf{c}u$ e usando la (4), deduciamo allora che $\operatorname{div}(A\nabla u) \in L^2(\Omega)$ e che

$$\|\operatorname{div}(A\nabla u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f + \operatorname{div}(A\mathbf{c}u) - \mathbf{b}\cdot\nabla u - du\|_{L^2(\Omega)} \leq c\Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\Big).$$

Prendendo allora $\mathbf{w} = A\nabla u$ e $\mathbf{w}' = Ae_1D_1u + \ldots + Ae_{n-1}D_{n-1}u$, e ciò è lecito in quanto le derivate seconde del tipo $D_{ij}u$ con $i < n$ appartengono a $L^2(\Omega)$ per ipotesi e $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, deduciamo che $\operatorname{div}(Ae_nD_nu)$ appartiene a $L^2(\Omega)$ e che la sua norma si stima con cK'. Scrivendo ora

$$\int_\Omega a_{nn}D_nu\cdot D_nv\,dx = \int_\Omega (Ae_nD_nu)\cdot\nabla v\,dx - \sum_{i<n}\int_\Omega a_{in}D_nu\cdot D_iv\,dx$$

vediamo che $a_{nn}D_nu$ è derivabile in senso debole rispetto a x_n e che anche la norma L^2 della derivata debole si stima con cK'. Osservando infine che $a_{nn} = (Ae_n)\cdot e_n \geq \alpha$ e ricordando che $a_{nn} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, deduciamo che $1/a_{nn} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e che la sua norma si stima per mezzo di $\|a_{nn}\|_{W^{1,\infty}}$ e α; dunque anche D_nu ha derivata debole in L^2 e la norma della derivata si stima come prescritto. □

7. Lemma. *Se $v \in H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ e se e è un versore di $\mathbb{R}^n$, allora, con la notazione (7), vale la maggiorazione*

$$\|v_h\|_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^n)} \le \|v\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\, h \ne 0. \ \square$$

Dimostrazione. Tenendo conto che $|e^{it}-1|^2 \le t^2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha subito

$$\|v_h\|^2_{H^{-1/2}} = \int_{\mathbb{R}}^{n} (1+|\xi|^2)^{-1/2} |\widehat{v}_h(\xi)|^2 \, d\xi =$$

$$\int_{\mathbb{R}}^{n} (1+|\xi|^2)^{-1/2} \left| \frac{e^{ih\xi\cdot e}-1}{h} \right|^2 |\widehat{v}(\xi)|^2 \, d\xi \le \int_{\mathbb{R}}^{n} (1+|\xi|^2)^{-1/2} (\xi\cdot e)^2 |\widehat{v}(\xi)|^2 \, d\xi \le$$

$$\int_{\mathbb{R}}^{n} (1+|\xi|^2)^{1/2} |\widehat{v}(\xi)|^2 \, d\xi = \|v\|^2_{H^{1/2}}. \ \square$$

8. Lemma. *Si supponga che $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, che $a_{ij}, c_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, che $\varphi \in W^{1,\infty}(\Gamma)$ e che valgano la (3) con $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ e la (16). Allora ogni soluzione del problema variazionale (2) appartiene a $H^2(\Omega)$ e vale la maggiorazione*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c\Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \Big), \tag{17}$$

ove c è una costante che dipende solo da n, dalle norme

$$\|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}, \quad \|c_i\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}, \quad \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \|d\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \|\varphi\|_{W^{1,\infty}(\Gamma)}$$

e dalla costante α di ellitticità. $\square$

Dimostrazione. Procedendo come nella dimostrazione del Teorema 1 cerchiamo di ottenere l'analoga della (10), con una variante dovuta alla presenza dei termini di bordo. A questo scopo inseriamo nella (2) v_{-h} al posto di v supponendo $v \in V$, $e \in \Gamma$ e $h \ne 0$ e osservando che, in tali condizioni, la funzione v_{-h} è effettivamente una funzione test ammissibile per l'ipotesi (16).

Siccome si controlla facilmente che, grazie al fatto che stiamo supponendo e parallelo a Γ, la formula di integrazione per parti discreta continua a valere senza supporre che le funzioni in gioco abbiano supporto compatto, i termini della (1) che corrispondono a integrali su Ω si trattano esattamente come nella dimostrazione citata, per cui controlliamo soltanto come si comporta l'integrale di bordo. Risulta

$$\int_\Gamma \varphi u v_{-h} \, ds = -\int_\Gamma (\varphi u)_h v \, ds = -\int_\Gamma \varphi_h(x) u(x) v(x) \, ds - b_h(u_h, v), \tag{18}$$

ove abbiamo posto per semplicità

$$b_h(w,v) = \int_\Gamma \varphi(x+he) w(x) v(x) \, ds. \tag{19}$$

L'integrale dell'ultimo membro della (18) costituisce semplicemente un contributo in più al termine $L_1(v)$ in quanto

$$\left| \int_\Gamma \varphi_h(x) u(x) v(x)\, ds \right| \le c \, \|\varphi\|_{W^{1,\infty}(\Gamma)} \, \|u\|_{H^1(\Omega)} \, \|v\|_{H^1(\Omega)} \,,$$

ove c dipende solo da n, grazie al Teorema di traccia. Abbiamo inoltre

$$|b_h(u_h, v)| \le \|\varphi\|_{L^\infty(\Gamma)} \, \|u_h\|_{L^2(\Gamma)} \, \|v\|_{L^2(\Gamma)} \,. \tag{20}$$

L'altro contributo a L_1 è dovuto al termine di bordo di L, che verifica

$$\begin{gathered} \left| \int_\Gamma g v_{-h} \, ds \right| \le \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \, \|v_{-h}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \le \\ \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \, \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le c \, \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \, \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{gathered}$$

grazie al Lemma 7 applicato a $\mathbb{R}^{n-1}$ e al Teorema di traccia, ove c dipende al più da n.

Cambiando i segni otteniamo dunque l'analoga della (10), cioè l'uguaglianza

$$\int_\Omega \big(A(x+he) \nabla u_h(x) \big) \cdot \nabla v(x) \, dx = L_1(v) + b_h(u_h, v), \tag{21}$$

valida per ogni $v \in V$, nella quale L_1 è un lineare e continuo su $H^1(\Omega)$ e

$$\|L_1\|_* \le c \Big(\|f\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \Big) \,, \tag{22}$$

con una costante c che dipende solo da n e dai coefficienti come specificato nell'enunciato.

Prendendo ora $v = u_h$ nella (21) otteniamo immediatamente

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_h|^2 \, dx \le \|L_1\|_* \, \|u_h\|_{H^1(\Omega)} + b_h(u_h, u_h) \tag{23}$$

e occorre stimare in particolare l'ultimo termine. A questo scopo ricordiamo una maggiorazione legata al Teorema di traccia: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $C(\varepsilon)$, dipendente solo da ε e da Ω, nel caso in esame da ε e da n, tale che

$$\|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \le \varepsilon \, \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\varepsilon) \, \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \, v \in H^1(\Omega).$$

Quindi, combinando questa stima con la (20), abbiamo

$$|b_h(u_h, u_h)| \le \varepsilon \, \|\nabla u_h\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\varepsilon) \, \|u_h\|^2_{L^2(\Omega)}$$

ove ora $C(\varepsilon)$ dipende anche da $\|\varphi\|_{L^\infty(\Gamma)}$.

Scegliamo allora $\varepsilon = \alpha/2$, in modo da compensare il termine $\|\nabla u_h\|^2_{L^2(\Omega)}$ del secondo membro con quello del primo, e sommiamo a entrambi i membri $\|u_h\|^2_{L^2(\Omega)}$, maggiorando questo termine con $\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$ nel secondo membro. Abbiamo

$$\min\{1, \alpha/2\} \|u_h\|^2_{H^1(\Omega)} \le \|L_1\|_* \|u_h\|_{H^1(\Omega)} + \big(1 + C(\alpha/2)\big) \|u\|^2_{H^1(\Omega)} .$$

Usando allora anche la (22) deduciamo

$$\|u_h\|_{H^1(\Omega)} \le c \left(\|f\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right) \tag{24}$$

con c come nell'enunciato.

Dunque la famiglia $\{u_h\}$ è limitata in $H^1(\Omega)$ e la derivata $\partial u/\partial e$ di u nella direzione e appartiene a $H^1(\Omega)$ e la sua norma H^1 si maggiora come nella (24). Questo significa, data l'arbitrarietà di e fra i vettori paralleli a Γ, che tutte le derivate parziali seconde di u, tranne la derivata seconda pura $D^2_n u$, esistono in senso debole e appartengono a $L^2(\Omega)$ e che le loro norme in $L^2(\Omega)$ si stimano con il secondo membro della (24). Grazie al Lemma 6 della stessa proprietà gode la derivata $D_{nn}u$. Siccome anche la norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ si maggiora banalmente allo stesso modo, la dimostrazione è conclusa. □

Riunendo tutti i lemmi precedenti deduciamo due risultati locali per i problemi di Dirichlet e di Neumann, nei quali usiamo le notazioni seguenti:

$$\Omega_R = \Omega \cap B_R(x_0) \qquad \text{e} \qquad \Gamma_R = \Gamma \cap B_R(x_0).$$

Infatti, se $x_0 \in \Gamma$, se in Ω_R la funzione u risolve un problema di Dirichlet omogeneo oppure un problema di Neumann e se ζ è una funzione regolare con supporto in $B_R(x_0)$ che vale 1 in una palla più piccola $B_r(x_0)$, allora ζu risolve un problema dello stesso tipo e ha supporto incluso in $B_R(x_0)$. Dopo trasformazione del dominio Ω_R nella semipalla $B^+ = B_1 \cap \mathbb{R}^n_+$, si arriva a problemi ancora dello stesso tipo su B^+ e precisamente: a un problema di Dirichlet omogeneo nel primo caso e a un problema misto con condizione di Neumann sulla parte piatta di B^+ ma con tutte le funzioni in gioco a supporto incluso in B_1 nel secondo. Dunque il prolungamento triviale della trasformata di ζu verifica un problema di Dirichlet omogeneo oppure un problema di Neumann nel semispazio, per il quale è soddisfatta l'ipotesi (16), e per la trasformata abbiamo la regolarità H^2 e la stima corrispondente. Ritornando al dominio originario troviamo la regolarità H^2 e la corrispondente stima per la funzione ζu. A questo punto, ricordando che ζ è regolare in Ω_R e vale 1 in Ω_r, basta usare disuguaglianze del tipo

$$\|u\|_{H^2(\Omega_r)} \le \|\zeta u\|_{H^2(\Omega_R)} \qquad \text{e} \qquad \|\zeta w\|_R \le c\, \|w\|_R$$

ove $\|\cdot\|_\rho$ denota la norma in uno degli spazi di Sobolev sull'aperto Ω_ρ della generica funzione w e c dipende da ζ e dalla norma considerata.

9. Teorema. *Siano $x_0 \in \Gamma$ e $R > 0$ tali che Γ_R sia di classe C^2 e valgano le condizioni seguenti: $a_{ij}, c_i \in W^{1,\infty}(\Omega_R)$ e $f \in L^2(\Omega_R)$. Allora, se u è una soluzione dell'equazione (4) che verifica la condizione $u = 0$ su Γ_R, esiste $r \in]0, R[$ tale che $u \in H^2(\Omega_r)$ e valga una stima del tipo*

$$\|u\|_{H^2(\Omega_r)} \le c\Big(\|f\|_{L^2(\Omega_R)} + \|u\|_{H^1(\Omega_R)}\Big)$$

ove c dipende solo da Ω, da R, dalle norme

$$\|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\Omega_R)}\,, \quad \|c_i\|_{W^{1,\infty}(\Omega_R)}\,, \quad \|b_i\|_{L^\infty(\Omega_R)}\,, \quad \|d\|_{L^\infty(\Omega_R)}$$

e dalla costante α di ellitticità. □

10. Teorema. *Siano $x_0 \in \Gamma$ e $R > 0$ tali che Γ_R sia di classe C^2 e valgano le condizioni seguenti: $a_{ij}, c_i \in W^{1,\infty}(\Omega_R)$, $\varphi \in W^{1,\infty}(\Gamma_R)$, $f \in L^2(\Omega_R)$ e $g \in H^{1/2}(\Gamma_R)$. Allora, se u è una soluzione dell'equazione (4) che verifica su Γ_R la condizione di Neumann*

$$\varphi u + (A\nabla u + \mathbf{c}u) \cdot \nu = g, \tag{25}$$

esiste $r \in]0, R[$ tale che $u \in H^2(\Omega_r)$ e valga una stima del tipo

$$\|u\|_{H^2(\Omega_r)} \le c\Big(\|f\|_{L^2(\Omega_R)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_R)} + \|u\|_{H^1(\Omega_R)}\Big)$$

ove c dipende solo da Ω, da R, dalle norme

$$\|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\Omega_R)}\,, \quad \|c_i\|_{W^{1,\infty}(\Omega_R)}\,, \quad \|b_i\|_{L^\infty(\Omega_R)}\,, \quad \|d\|_{L^\infty(\Omega_R)}\,, \quad \|\varphi\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_R)}$$

e dalla costante α di ellitticità. □

Usando semplicemente i teoremi 1 e 9 oppure 10 e una partizione dell'unità, si deducono immediatamente i risultati corrispondenti di regolarità globale:

11. Teorema. *Supponiamo Ω di classe C^2, $a_{ij}, c_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$. Allora, se u è una soluzione dell'equazione (4) verificante la condizione $u = 0$ su Γ, risulta $u \in H^2(\Omega)$ e vale una stima del tipo*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c\Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\Big)$$

ove c dipende solo da Ω, dalle norme

$$\|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\,, \quad \|c_i\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\,, \quad \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}\,, \quad \|d\|_{L^\infty(\Omega)}$$

e dalla costante α di ellitticità. □

12. Teorema. *Supponiamo Ω di classe C^2, $a_{ij}, c_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\varphi \in W^{1,\infty}(\Gamma)$, $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. Allora, se u è una soluzione dell'equazione (4) che verifica su Γ la condizione di Neumann (25), risulta $u \in H^2(\Omega)$ e vale una stima del tipo*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c\Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\Big)$$

ove c dipende solo da Ω, dalle norme

$$\|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\,, \quad \|c_i\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\,, \quad \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}\,, \quad \|d\|_{L^\infty(\Omega)}\,, \quad \|\varphi\|_{W^{1,\infty}(\Gamma)}$$

e dalla costante α di ellitticità. □

13. Osservazione. Nel caso del problema misto di tipo Dirichlet–Neumann non abbiamo in generale la regolarità globale H^2, nemmeno se l'aperto, i coefficienti e i dati sono di classe C^∞. Potremmo però enunciare un risultato intermedio fra il risultato locale e il risultato globale, che si ottiene naturalmente usando una partizione dell'unità e che suonerebbe più o meno così: se Γ è l'unione disgiunta di due suoi aperti Γ_0 e Γ_1 e della loro frontiera comune Σ e se ω è un aperto la cui chiusura non interseca Σ, allora ogni soluzione u dell'equazione (4) che verifica la condizione $u = 0$ su Γ_0 e la condizione di Neumann (25) su Γ_1 verifica $u \in H^2(\omega)$ e la norma $\|u\|_{H^2(\omega)}$ si stima come nei casi visti, ove c dipende ora anche dalla distanza fra ω e Σ.

14. Osservazione. Se il problema è coercivo, o più in generale se siamo in condizioni di esistenza e unicità della soluzione, allora la quantità $\|u\|_{H^1}$ può essere stimata in termini dei dati del problema stesso e dunque soppressa nei secondi membri delle maggiorazioni fornite dai vari risultati precedenti.

Nei casi di non unicità valgono invece le maggiorazioni trovate. Considerato ad esempio il caso del problema di Neumann classico per l'equazione di Poisson, cioè

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{su} \quad \Gamma,$$

naturalmente nell'ipotesi che $\int_\Omega f\,dx + \int_\Gamma g\,ds = 0$ e Ω sia anche connesso, vale la stima generale data dal Teorema 12, nella quale la norma $\|u\|_{H^1}$ non può essere controllata in funzione dei dati. Se consideriamo invece la soluzione particolare u_* ottenuta imponendo una condizione ulteriore, ad esempio $\int_\Omega u_*\,dx = 0$, il controllo c'è e vale la stima

$$\|u_*\|_{H^2(\Omega)} \le c\Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\Big).$$

15. Osservazione. Nei secondi membri delle maggiorazioni date dai teoremi precedenti la norma $\|u\|_{H^1}$ può essere sostituita dalla norma $\|u\|_{L^2}$. Considerando per semplicità solo il caso delle stime all'interno per l'equazione più semplice $-\operatorname{div}(A\nabla u) = f$, prendendo $v = \zeta^2 u$ come funzione test, ove ζ è arbitraria in $C_0^\infty(\Omega)$, abbiamo

$$\int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla(\zeta^2 u)\,dx = \int_\Omega f\zeta^2 u\,dx.$$

D'altra parte risulta

$$\int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla(\zeta^2 u)\,dx = \int_\Omega (A\nabla u)\cdot(\zeta^2\nabla u + 2\zeta u\nabla\zeta)\,dx =$$
$$\int_\Omega \big(A(\zeta\nabla u)\big)\cdot(\zeta\nabla u)\,dx + 2\int_\Omega \big(A(\zeta\nabla u)\big)\cdot(u\nabla\zeta)\,dx.$$

Deduciamo allora con notazioni ovvie

$$\alpha\,\|\zeta\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\operatorname{supp}\zeta)}\,\|u\|_{L^2(\operatorname{supp}\zeta)} + 2c\,\|\zeta\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,\|u\|_{L^2(\operatorname{supp}\zeta)} \le$$
$$\varepsilon\,\|\zeta\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\varepsilon)\left(\|f\|^2_{L^2(\operatorname{supp}\zeta)} + \|u\|^2_{L^2(\operatorname{supp}\zeta)}\right)$$

e scegliendo ε abbastanza piccolo otteniamo una stima del tipo

$$\|\zeta\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \le c\left(\|f\|_{L^2(\operatorname{supp}\zeta)} + \|u\|_{L^2(\operatorname{supp}\zeta)}\right).$$

Se ora Ω_1, Ω_2 sono aperti tali che $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset \Omega$, possiamo scegliere ζ con supporto incluso in Ω_2 e tale che $\zeta = 1$ in Ω_1. Otteniamo pertanto la maggiorazione

$$\|u\|_{H^1(\Omega_1)} \le c\left(\|f\|_{L^2(\Omega_2)} + \|u\|_{L^2(\Omega_2)}\right)$$

con una costante c che dipende anche dalla distanza $\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega_2)$.

16. Osservazione. Anche nel caso del problema di Dirichlet non omogeneo esistono risultati sia di carattere locale sia di carattere globale. Considerando ad esempio la regolarità globale $H^2(\Omega)$, il problema di Dirichlet diventa

$$u = u_0 + w, \qquad w \in H^1_0(\Omega) \qquad a(u,v) = \int_\Omega fv\,dx \quad \forall\, v \in H^1_0(\Omega),$$

ove u_0 è una funzione la cui traccia è il prescritto dato di Dirichlet, che denotiamo con g. Ora, supponendo senz'altro Ω di classe C^2, condizione necessaria perché $u \in H^2(\Omega)$ è che $g \in H^{3/2}(\Gamma)$. D'altra parte esiste un operatore $\mathcal{R}$ lineare e continuo da $H^{3/2}(\Gamma)$ in $H^2(\Omega)$ di rilevamento delle tracce, cioè tale che $\mathcal{R}g = g$ per ogni $g \in H^{3/2}(\Gamma)$, per cui, assegnata $g \in H^{3/2}(\Gamma)$, possiamo prendere $u_0 = \mathcal{R}g$. Si tratta dunque di studiare w, la quale verifica il problema di Dirichlet omogeneo corrispondente alla stessa forma bilineare a e al secondo membro dato dal funzionale

$$L_0(v) = \int_\Omega fv\,dx - a(u_0, v), \qquad v \in H^1_0(\Omega).$$

Se dunque supponiamo $f \in L^2(\Omega)$ e i coefficienti regolari come nel Teorema 11, possiamo integrare per parti e vedere immediatamente che

$$L_0(v) = \int_\Omega Fv\,dx, \qquad \text{ove} \qquad F = f + \operatorname{div}(A\nabla u_0 + \mathbf{c}u_0) - \mathbf{b}\cdot\nabla u_0 - du_0.$$

Dunque $w \in H^2(\Omega)$, da cui $u \in H^2(\Omega)$, e vale la stima

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le \|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \|w\|_{H^2(\Omega)} \le \|u_0\|_{H^2(\Omega)} + c_0\left(\|F\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{H^1(\Omega)}\right) \le$$
$$c_1\left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right) \le c\left(\|g\|_{H^{3/2}(\Gamma)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right)$$

ove c dipende dalle stesse quantità specificate nel Teorema 11.

17. Soluzioni ultradeboli. I risultati di regolarità che abbiamo introdotto forniscono uno strumento utile per affrontare il problema di soluzioni più irregolari di problemi ellittici, soluzioni che non appartengono a $H^1(\Omega)$, per le quali occorre preliminarmente una definizione precisa. Limitandoci all'equazione più semplice $-\operatorname{div}(A\nabla u) = f$ con $f \in L^2(\Omega)$, partendo da una soluzione $u \in H^1(\Omega)$, moltiplicando per la generica funzione regolare v e integrando per parti due volte, abbiamo formalmente

$$\int fv\,dx = -\int_\Omega \bigl(\operatorname{div}(A\nabla u)\bigr)v\,dx =$$
$$\int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v\,dx - \int_\Gamma (A\nabla u)\cdot\nu v\,ds = \int_\Omega (A^t\nabla v)\cdot\nabla u\,dx - \int_\Gamma (A\nabla u)\cdot\nu v\,ds =$$
$$-\int_\Omega u\operatorname{div}(A^t\nabla v)\,dx + \int_\Gamma u(A^t\nabla v)\cdot\nu\,ds - \int_\Gamma (A\nabla u)\cdot\nu v\,ds$$

e i calcoli sono pienamente giustificati se $v \in H^2(\Omega)$ e $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, pur di interpretare l'ultimo integrale come dualità fra $H^{-1/2}(\Gamma)$ e $H^{1/2}(\Gamma)$, dato che $A\nabla u \in L^2_{\mathrm{div}}(\Omega)$. Si noti invece che la regolarità L^∞ dei coefficienti non sarebbe sufficiente ad assicurare un senso agli altri due integrali dell'ultimo membro, nemmeno se v fosse di classe C^∞.

Supponiamo ora che u verifichi ad esempio la condizione di Dirichlet $u = g$ su Γ, ove per un momento supponiamo $g \in H^{1/2}(\Gamma)$: allora il primo dei due integrali di bordo dell'ultimo membro si può esprimere attraverso g, mentre il secondo scompare se imponiamo a v la condizione $v = 0$ su Γ. Appare dunque giustificata la definizione seguente:

Una funzione $u \in L^2(\Omega)$ è soluzione (ultra–) debole del problema di Dirichlet non omogeneo di dato g per l'equazione $-\operatorname{div}(A\nabla u) = f$ quando vale l'uguaglianza

$$\int_\Omega u\operatorname{div}(A^t\nabla v)\,dx = -\int_\Omega fv\,dx + \int_\Gamma g(A^t\nabla v)\cdot\nu\,ds \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega). \tag{26}$$

Si noti ora che l'uguaglianza precedente, che per $u \in H^1(\Omega)$ e nelle ipotesi fatte sui dati equivale all'usuale nozione di soluzione debole, assume significato con la stessa classe di funzioni test v in condizioni più generali sui dati stessi: sostanzialmente occorre che il secondo membro abbia significato per ogni $v \in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$ e ciò richiede ipotesi meno restrittive. Naturalmente, in queste condizioni più generali, nessuno assicura l'esistenza della soluzione in $H^1(\Omega)$ e si pone il problema dell'esistenza e dell'unicità della soluzione $u \in L^2(\Omega)$ e di stime per la soluzione stessa.

Vediamo subito l'unicità in $L^2(\Omega)$, facile conseguenza del Teorema 11 di regolarità della soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione, detta *equazione aggiunta* della data, $-\operatorname{div}(A^t v) = \psi$. Considerando infatti il problema (26) con $f = 0$ e $g = 0$ e, pretendendo regolari non solo i coefficienti ma anche Ω, che supponiamo allora di classe C^2, possiamo scegliere come funzione test v la soluzione (variazionale) del problema di Dirichlet

$$v \in H^1_0(\Omega), \qquad -\operatorname{div}(A^t v) = u \quad \text{in} \quad \Omega,$$

che esiste ed è unica e appartiene a $H^2(\Omega)$ per il teorema citato. Inserendo tale v nella (26) otteniamo immediatamente $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$, da cui $u = 0$.

Ma il Teorema 11, applicato all'equazione aggiunta, fornisce direttamente addirittura un risultato di esistenza e unicità per il problema (26), grazie al cosiddetto *metodo di trasposizione*, le cui applicazioni più semplici si basano sostanzialmente sul seguente risultato generale: *se un operatore $\mathcal{T}$ lineare e continuo da uno spazio di Banach V in uno spazio di Banach W è un isomorfismo, allora il suo trasposto $\mathcal{T}'$ è un isomorfismo dal duale W' di W sul duale V' di V e gli operatori $\mathcal{T}'$ e $\mathcal{T}$ hanno la stessa norma.* Ricordiamo che il trasposto $\mathcal{T}' \in \mathcal{L}(W', V')$ dell'operatore $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, W)$ è definito dalla formula

$$ {}_{V'}\langle \mathcal{T}'u, v\rangle_V = {}_{W'}\langle u, \mathcal{T}v\rangle_W \qquad \forall\, u \in W' \qquad \forall\, v \in V. \tag{27}$$

Orbene il Teorema 11 implica che l'operatore

$$\mathcal{T} : v \mapsto -\operatorname{div}(A^t \nabla v), \qquad v \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega), \tag{28}$$

aggiunto formale dell'operatore $-\operatorname{div}(A\nabla)$, è un isomorfismo dello spazio $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ sullo spazio $L^2(\Omega)$. Allora il trasposto $\mathcal{T}'$ dell'operatore $\mathcal{T}$ è un isomorfismo dal duale di $L^2(\Omega)$ sul duale di $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ e ha la stessa norma dell'operatore $\mathcal{T}$. Tenendo conto del Teorema di Riesz per $L^2(\Omega)$ mediante il quale identifichiamo $L^2(\Omega)$ al suo duale, deduciamo che l'operatore, che continuiamo a denotare con $\mathcal{T}'$, da $L^2(\Omega)$ nel duale di $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ definito dalla formula

$$ {}_{(H^2 \cap H^1_0)'}\langle \mathcal{T}'u, v\rangle_{H^2 \cap H^1_0} = (u, \mathcal{T}v)_{L^2} \qquad \forall\, u \in L^2(\Omega) \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$$

è pure un isomorfismo da $L^2(\Omega)$ sul duale di $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. Dunque per ogni funzionale L lineare e continuo su $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, esiste una e una sola funzione $u \in L^2(\Omega)$ tale che $\mathcal{T}'u = L$, cioè una e una sola $u \in L^2(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega u(\mathcal{T}v)\, dx = L(v) \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega),$$

e questa equazione è formalmente analoga alla (26). Allora ogni volta che il secondo membro della (26) fornisce un funzionale lineare e continuo su $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, la (26) ha una e una sola soluzione.

Per quanto riguarda l'integrale di bordo possiamo assumere $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, pur di interpretare l'integrale stesso come dualità. In questa ipotesi abbiamo infatti

$$\left| \int_\Gamma g(A^t \nabla v) \cdot \nu\, ds \right| \le \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \left\| (A^t \nabla v) \cdot \nu \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le c\, \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|v\|_{H^2(\Omega)}$$

con una costante c opportuna. Per quanto riguarda l'integrale su Ω si possono fare su f ipotesi di vario tipo. Volendo rimanere nell'ambito delle funzioni e supporre $f \in L^p(\Omega)$, occorre essere autorizzati a sfruttare un'inclusione del tipo di Sobolev che lega $H^2(\Omega)$ a $L^{p'}(\Omega)$. In tali condizioni abbiamo infatti

$$\left| \int_\Omega f v\, dx \right| \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \le c\, \|f\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)}\,.$$

Se ad esempio $n \le 3$, si può scegliere $p' = \infty$, quindi $p = 1$, così che, se Ω è di classe C^2 e i coefficienti appartengono a $W^{1,\infty}(\Omega)$, per ogni $f \in L^1(\Omega)$ e $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ esiste una e una sola soluzione $u \in L^2(\Omega)$ del problema (26) e questa verifica

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le c\left(\|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\right)$$

ove c dipende solo da Ω, dalle norme $\|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ e dalla costante α di ellitticità.

Notiamo infine che la soluzione trovata della (26) nelle ipotesi fatte su aperto, coefficienti e dati si può interpretare come soluzione di un problema ai limiti in un senso più concreto. Infatti, lasciando variare v in $C_0^\infty(\Omega)$, deduciamo immediatamente che vale l'equazione $-\operatorname{div}(A\nabla u) = f$ in Ω nel senso delle derivate deboli, cioè esattamente nel senso seguente

$$\int_\Omega u \operatorname{div}(A^t \nabla v)\, dx = -\int_\Omega f v\, dx \qquad \forall\, v \in C_0^\infty(\Omega).$$

In particolare, supponendo $f \in L^2(\Omega)$ per restare nel quadro hilbertiano, u appartiene allo spazio V descritto brevemente dall'uguaglianza

$$V = \left\{w \in L^2(\Omega) : \quad \operatorname{div}(A\nabla w) \in L^2(\Omega)\right\},$$

che deve essere intesa nel senso delle derivate deboli, munito della norma del grafico

$$\|w\|_V = \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}(A\nabla w)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ma per tale spazio vale un teorema di tracce: l'applicazione $w \mapsto w|_\Gamma$ definita inizialmente per w regolare si prolunga in uno e in un solo modo a un operatore γ_0 lineare e continuo da V in $H^{-1/2}(\Gamma)$ e vale una formula di integrazione per parti. Se scriviamo semplicemente u anziché $\gamma_0 u$ e interpretiamo ogni integrale su Γ come dualità fra $H^{-1/2}(\Gamma)$ e $H^{1/2}(\Gamma)$ la formula in questione è la seguente:

$$-\int_\Omega v \operatorname{div}(A\nabla u)\, dx + \int_\Omega u \operatorname{div}(A^t\nabla v)\, dx = \int_\Gamma u(A^t\nabla v)\cdot \nu\, ds$$
$$\forall\, u \in V \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Sostituendo $-\operatorname{div}(A\nabla u)$ con f e tenendo conto della (26), deduciamo

$$\int_\Gamma u(A^t\nabla v)\cdot\nu\, ds = \int_\Gamma g(A^t\nabla v)\cdot\nu\, ds \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega).$$

Questa uguaglianza implica $u = g$ su Γ, nel senso che i due funzionali $\gamma_0 u$ e g lineari e continui su $H^{1/2}(\Gamma)$ sono lo stesso funzionale: infatti, usando le ipotesi di regolarità e di ellitticità, si può dimostrare che l'operatore $v \mapsto (A^t\nabla v)\cdot\nu|_\Gamma$ da $v \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ in $H^{1/2}(\Gamma)$ è suriettivo.

Notiamo solo il ruolo svolto dall'ellitticità nell'ultimo enunciato. Siccome $(A^t\nabla v)\cdot\nu = (\nabla v)\cdot(A\nu)$, l'operatore di bordo è un operatore di derivata obliqua, per cui occorre vedere che la direzione della derivazione rimane lontana dalle direzioni tangenti a Γ lungo le quali pesa già la restrizione $v \in H_0^1(\Omega)$; ora questa garanzia è data appunto dall'ellitticità: $(A\nu)\cdot\nu \ge \alpha$.

18. Osservazione. Notiamo ancora una volta che è grazie al Teorema 11 che è stato possibile prendere dati abbastanza generali nel problema (26). Supponiamo infatti di non disporre di quel risultato e ciò accade ad esempio quando i coefficienti sono irregolari oppure Ω non è sufficientemente regolare. Resta però vero che l'operatore $v \mapsto -\operatorname{div}(A^t \nabla v)$ è un isomorfismo dallo spazio

$$V = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \quad \operatorname{div}(A^t \nabla v) \in L^2(\Omega) \right\}$$

munito della sua norma naturale

$$\|v\|_V = \|v\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \operatorname{div}(A^t \nabla v) \right\|_{L^2(\Omega)}$$

sullo spazio $L^2(\Omega)$. Si noti che, con le notazioni introdotte, il risultato di regolarità direbbe che $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ con equivalenza di norme. Allora, considerando ad esempio l'integrale di bordo del secondo membro della (26), dobbiamo vedere sotto quali ipotesi su g esso definisce un elemento di V' e quindi dobbiamo maggiorarne il modulo con la norma di v in V anziché in H^2. Allora su v possiamo usare solo le informazioni seguenti: $v \in H_0^1(\Omega)$ e $A^t \nabla v \in L^2_{\operatorname{div}}(\Omega)$, da cui l'unica informazione sulla traccia $(A^t \nabla v) \cdot \nu|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$. L'integrale di bordo, dunque, deve essere stimato come segue

$$\left| \int_\Gamma g(A^t \nabla v) \cdot \nu \, ds \right| \le c \left\| (A^t \nabla v) \cdot \nu \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \le c' \, \|v\|_V$$

e ciò è possibile se $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. Abbiamo dunque perso la possibilità di prendere un dato al bordo generale e la trasposizione non ha portato frutti.