Spazi riflessivi e compattezza debole

1. Preliminari

In questo paragrafo diamo qualche richiamo. Qui e nel seguito resta inteso, in assenza di specificazioni, che gli spazi che intervengono siano spazi di Banach, reali per evitare complicazioni inutili, sebbene tutto quanto diciamo possa essere adattato al caso complesso.

1.1. L'isomorfismo canonico J_V di V in V''. Se V è uno spazio normato e $v \in V$, l'applicazione

$$v' \mapsto {}_{V'}\langle v', v\rangle_V \qquad v' \in V'$$

è lineare e continua su V' come subito si verifica; dunque essa è un elemento di V'' che denotiamo con $J_V v$, omettendo l'indice V quando non sorgono equivoci. Abbiamo allora costruito un'applicazione

$$J_V : v \mapsto J_V v, \qquad v \in V,$$

da V in V'' che viene chiamata *isomorfismo canonico*. Si dimostra che J_V è effettivamente un isomorfismo, anzi un isomorfismo isometrico, ma di V su un sottospazio di V'' in generale diverso da V''. Per definizione si ha

$${}_{V''}\langle J_V v, v'\rangle_{V'} = {}_{V'}\langle v', v\rangle_V \qquad \forall v \in V \qquad \forall v' \in V'.$$

Lo spazio V è detto *riflessivo* quando $J_V(V) = V''$.

1.2. Il trasposto. Siano V e W sono due spazi normati e L è un operatore di V in W lineare e continuo. Allora, per ogni $w' \in W'$, è lineare e continuo su V il funzionale $w' \circ L$. Dunque l'applicazione

$$L' : w' \mapsto w' \circ L, \qquad w' \in W',$$

detta *trasposta* di L, opera da W' in V' e, come si vede facilmente, è lineare e continua. Si può inoltre dimostrare che L e L' hanno la stessa norma. Si noti che

$${}_{V'}\langle L'w', v\rangle_V = {}_{W'}\langle w', Lv\rangle_W \qquad \forall w' \in W' \qquad \forall v \in V$$

proprio per definizione di L'.

Si dimostra facilmente che, se Z è un terzo spazio normato e M è un operatore lineare e continuo da W in Z, allora vale l'uguaglianza

$$(M \circ L)' = L' \circ M'.$$

Consideriamo in particolare il caso in cui L è un isomorfismo. Applicata l'uguaglianza precedente con $M = L^{-1}$ e scambiati poi i ruoli di L e di L^{-1}, si vede che anche L' è un isomorfismo e che vale l'uguaglianza

$$(L')^{-1} = (L^{-1})'.$$

Va poi notato che, *se* $L(V)$ *è denso in* W, *allora il trasposto* L' *è iniettivo*, come si vede facilmente. In particolare, *se* L *è suriettivo, allora* L' *è iniettivo*.

Nel seguito useremo anche l'operatore $L'' = (L')'$, cioè il trasposto del trasposto di L. Naturalmente esso è lineare e continuo da V'' in W''.

Un'applicazione di quanto abbiamo appena detto è la seguente, nella quale, tuttavia, per uniformità con il seguito in cui V è lo spazio ambiente, le notazioni sono scambiate rispetto alle righe precedenti. Se V è uno spazio normato, W è un sottospazio di V e i è l'inclusione di W in V, allora, per ogni $v' \in V'$, il funzionale $i'v'$ è la restrizione di v' al sottospazio W e il Teorema di Hahn–Banach dice in particolare che ogni $w' \in W'$ è la restrizione di almeno un $v' \in V'$. Ciò significa che i' è suriettivo. Dunque i'' è iniettivo.

2. Alcuni risultati generali

In questo paragrafo vediamo come la riflessività di uno spazio di Banach si trasferisca ad altri spazi in qualche modo legati a quello di partenza.

2.1. Teorema. *Se* V *è riflessivo e* W *è isomorfo a* V, *anche* W *è riflessivo.* ∎

Dimostrazione. Detto L un isomorfismo di V su W, consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L} & W \\ {\scriptstyle J_V}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle J_W} \\ V'' & \xrightarrow[L'']{} & W'' \end{array}$$

e dimostriamo che è commutativo. Per ogni $v \in V$ e $w' \in W'$ risulta

$$\begin{aligned} {}_{W''}\langle L'' J_V v, w' \rangle_{W'} &= {}_{V''}\langle J_V v, L'w' \rangle_{V'} = {}_{V'}\langle L'w', v \rangle_V \\ &= {}_{W'}\langle w', Lv \rangle_W = {}_{W''}\langle J_W L v, w' \rangle_{W'}. \end{aligned}$$

Dunque $L'' J_V = J_W L$. Segue allora $J_W = L'' J_V L^{-1}$ e dunque anche J_W è un isomorfismo, dato che anche L'' è un isomorfismo. ∎

Di facile dimostrazione è il seguente

2.2. Lemma. *Dati* V *e* W, *si consideri l'applicazione* $L_{V,W} : V' \times W' \to (V \times W)'$ *definita dalla formula*

$$\begin{gathered} {}_{(V\times W)'}\langle L_{V,W}(v', w'), (v, w) \rangle_{V\times W} = {}_{V'}\langle v', v \rangle_V + {}_{W'}\langle w', w \rangle_W \\ \forall (v, w) \in V \times W \qquad \forall (v', w') \in V' \times W'. \end{gathered}$$

Allora $L_{V,W}$ *è un isomorfismo.* ∎

2.3. Teorema. *Se* V *e* W *sono riflessivi, anche* $V \times W$ *è riflessivo.* ∎

Dimostrazione. Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{J_V \otimes J_W} & V'' \times W'' \\ J_{V\times W} \Big\downarrow & & \Big\downarrow L_* \\ (V \times W)'' & \xrightarrow[L']{} & (V' \times W')' \end{array}$$

ove L e L_* sono gli isomorfismi $L_{V,W}$ e $L_{V',W'}$ ottenuti applicando il Lemma 2.2 alle coppie (V,W) e (V',W') rispettivamente e $J_V \otimes J_W$ è l'applicazione di $V \times W$ in $V'' \times W''$ definita da

$$(J_V \otimes J_W)(v,w) = (J_V v, J_W w), \qquad v \in V, \quad w \in W,$$

che pure è un isomorfismo, come subito si verifica. Allora la tesi segue immediatamente se dimostriamo che il diagramma è commutativo. Dobbiamo dunque controllare che

$$L_*(J_V \otimes J_W) = L' J_{V\times W}.$$

Siano dunque $(v,w) \in V \times W$ e $(v',w') \in V' \times W'$ ad arbitrio. Si ha

$$\begin{aligned} {}_{(V'\times W')'}\langle L_*(J_V \otimes J_W)(v,w), (v',w')\rangle_{V'\times W'} &= {}_{(V'\times W')'}\langle L_*(J_V v, J_W w), (v',w')\rangle_{V'\times W'} \\ = {}_{V''}\langle J_V v, v'\rangle_{V'} + {}_{W''}\langle J_W w, w'\rangle_{W'} &= {}_{V'}\langle v', v\rangle_V + {}_{W'}\langle w', w\rangle_W . \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} {}_{(V'\times W')'}\langle L' J_{V\times W}(v,w), (v',w')\rangle_{V'\times W'} &= {}_{(V\times W)''}\langle J_{V\times W}(v,w), L(v',w')\rangle_{(V\times W)'} \\ = {}_{(V\times W)'}\langle L(v',w'), (v,w)\rangle_{V\times W} &= {}_{V'}\langle v', v\rangle_V + {}_{W'}\langle w', w\rangle_W . \end{aligned}$$

Dal confronto segue allora l'uguaglianza desiderata. ∎

I lemmi successivi preparano la strada al prossimo risultato: un sottospazio chiuso di uno spazio riflessivo è riflessivo.

2.4. Lemma. *Se W è un sottospazio di V e $i : W \to V$ è l'inclusione, allora il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{i} & V \\ J_W \Big\downarrow & & \Big\downarrow J_V \\ W'' & \xrightarrow[i'']{} & V'' \end{array}$$

è commutativo. ∎

Dimostrazione. Per ogni $w \in W$ e $v' \in V'$ si ha infatti

$$\begin{aligned} &{}_{V''}\langle i'' J_W w, v'\rangle_{V'} = {}_{W''}\langle J_W w, i'v'\rangle_{W'} = {}_{W'}\langle i'v', w\rangle_W \\ &= {}_{V'}\langle v', iw\rangle_V = {}_{V'}\langle v', w\rangle_V = {}_{V''}\langle J_V w, v'\rangle_{V'} = {}_{V''}\langle J_V iw, v'\rangle_{V'} \end{aligned}$$

e la dimostrazione è conclusa. ∎

2.5. Definizione. *Se* B *è uno spazio di Banach e se* S *è un suo sottospazio, poniamo*

$$S^\circ = \{v' \in B' : {}_{B'}\langle v', x \rangle_B = 0 \ \ \forall x \in S\}. \ ∎$$

Dunque S° è il sottospazio di B' costituito dai v' tali che $v'|_S = 0$, cioè il nucleo dell'applicazione trasposta dell'inclusione di S in B.

2.6. Lemma. *Se* W *è un sottospazio chiuso di* V *risulta*

$$J_V(W) = J_V(V) \cap (W^\circ)^\circ. \ ∎$$

Dimostrazione. Verifichiamo le due inclusioni. Dimostriamo dapprima che, se $w \in W$, allora $J_V w$ appartiene al secondo membro. Banalmente si ha $J_V w \in J_V(V)$. Per controllare che $J_V w \in (W^\circ)^\circ$ dobbiamo vedere che $J_V w$ si annulla su ogni $v' \in W^\circ$. Sia dunque $v' \in W^\circ$. Si ha

$${}_{V''}\langle J_V w, v' \rangle_{V'} = {}_{V'}\langle v', w \rangle_V = 0$$

proprio per definizione di W°.

Viceversa, sia v'' un elemento del secondo membro e controlliamo che esso appartiene al primo. Rappresentato v'' nella forma $v'' = J_V v$ con un certo $v \in V$ univocamente determinato, basta vedere che $v \in W$. Per assurdo v non appartenga a W. Siccome W è chiuso, grazie al Teorema di Hahn–Banach esiste un $v' \in V'$ che si annulla su W e non su v. Tale v' verifica allora

$$v' \in W^\circ \qquad \text{e} \qquad {}_{V''}\langle J_V v, v' \rangle_{V'} = {}_{V'}\langle v', v \rangle_V \neq 0$$

e ciò contraddice l'appartenenza di $J_V v$ a $(W^\circ)^\circ$. ∎

2.7. Lemma. *Se* W *è un sottospazio di* V *e* $i : W \to V$ *è l'inclusione, allora*

$$i''(W'') = (W^\circ)^\circ. \ ∎$$

Dimostrazione. Dimostriamo le due inclusioni. Se $w'' \in W''$, per ogni $v' \in W^\circ$ si ha

$${}_{V''}\langle i'' w'', v' \rangle_{V'} = {}_{W''}\langle w'', i' v' \rangle_{W'} = 0$$

dato che $i'v' = 0$.

Viceversa, sia $v'' \in (W^\circ)^\circ$: costruiamo $w'' \in W''$ tale che $v'' = i'' w''$. Preso ad arbitrio $w' \in W'$, consideriamo un qualunque $v' \in V'$ che prolunga w', osservando che l'esistenza di funzionali in tali condizioni è garantita dal Teorema di Hahn–Banach. Due qualunque di essi, diciamo v'_1 e v'_2, hanno la stessa restrizione a W; dunque la loro differenza si annulla su W e, di conseguenza, appartiene a W°. Segue

$${}_{V''}\langle v'', v'_1 \rangle_{V'} - {}_{V''}\langle v'', v'_2 \rangle_{V'} = {}_{V''}\langle v'', v'_1 - v'_2 \rangle_{V'} = 0.$$

Dunque il valore ${}_{V''}\langle v'', v' \rangle_{V'}$, ove v' ha le proprietà dette, dipende solo da w' e quindi possiamo considerare l'applicazione

$$w'' : w' \mapsto {}_{V''}\langle v'', v' \rangle_{V'}$$

che a w' associa il valore considerato. Si vede subito che w'' è lineare su W'. Inoltre w'' è anche continua. Infatti, sempre per il Teorema di Hahn–Banach, fissato w', fra i v' ammissibili ne esiste uno tale che $\|v'\|_{V'} = \|w'\|_{W'}$. Si ha allora

$$|{}_{V''}\langle v'', v' \rangle_{V'}| \le \|v''\|_{V''} \|v'\|_{V'} = \|v''\|_{V''} \|w'\|_{W'}.$$

Allora $w'' \in W''$ e risulta per ogni $v' \in V'$

$${}_{V''}\langle i''w'', v' \rangle_{V'} = {}_{W''}\langle w'', i'v' \rangle_{W'} = {}_{V'}\langle v'', v' \rangle_{V}$$

dato che v' è un prolungamento ammissibile di $i'v'$. Dunque $v'' = i''w''$. ∎

Combinando i Lemmi 2.6 e 2.7, otteniamo subito:

2.8. Lemma. *Se W è un sottospazio chiuso di V risulta*

$$J_V(W) = J_V(V) \cap i''(W''). \ ∎$$

2.9. Teorema. *Se V è riflessivo e se W è un sottospazio chiuso di V, allora anche W è riflessivo.* ∎

Dimostrazione. Sia $w'' \in W''$ ad arbitrio. Allora $i''w'' \in i''(W'')$. D'altra parte $i''w''$ appartiene banalmente anche a V'' che, per ipotesi, è $J_V(V)$. Per il Lemma 2.8 abbiamo allora $i''w'' \in J_V(W)$ e il Lemma 2.4 fornisce

$$i''J_W w = J_V iw = J_V w = i''w''.$$

Siccome i'' è un operatore iniettivo in quanto i' è suriettivo per il Teorema di Hahn–Banach, deduciamo $w'' = J_W w$ e la dimostrazione è conclusa. ∎

2.10. Corollario. *Lo spazio V è riflessivo se e solo se V' è riflessivo.* ∎

Dimostrazione. Supponiamo V riflessivo. Essendo J_V anche suriettivo, il suo inverso è definito su tutto V'' ed è un isomorfismo di V'' su tutto V. Dunque il suo trasposto $(J_V^{-1})'$ è un isomorfismo di V' su tutto V''' e, per concludere, basta vedere che esso coincide con $J_{V'}$. Se $v' \in V'$ e $v'' \in V''$ si ha infatti

$$\begin{aligned} {}_{V'''}\langle (J_V^{-1})'v', v'' \rangle_{V''} &= {}_{V'}\langle v', J_V^{-1}v'' \rangle_V = {}_{V''}\langle J_V J_V^{-1} v'', v' \rangle_{V'} \\ &= {}_{V''}\langle v'', v' \rangle_{V'} = {}_{V'''}\langle J_{V'}v', v'' \rangle_{V''}. \end{aligned}$$

Viceversa, supponiamo V' riflessivo. Allora, per quanto abbiamo appena dimostrato, è riflessivo anche il suo duale V''. Dunque, per il Teorema 2.9, è riflessivo anche il suo sottospazio chiuso $J_V(V)$. Ma V e $J_V(V)$ sono isomorfi, per cui anche V è riflessivo grazie al Teorema 2.1. ∎

2.11. Osservazione. Vale anche il risultato che segue: *se V è riflessivo e se W è un suo sottospazio chiuso, anche lo spazio quoziente V/W è riflessivo.* Questo enunciato segue banalmente dai risultati precedenti se si dimostra che il duale di V/W è isomorfo a un sottospazio chiuso di V'. Tuttavia non dimostriamo questo fatto e ci limitiamo a dare un enunciato che fornisce anche l'isomorfismo preciso. Per completezza diamo anche un risultato "duale", che si riferisce al duale di un sottospazio chiuso.

2.12. Proposizione. *Siano W un sottospazio chiuso di V e π la proiezione canonica di V su V/W. Allora la trasposta π' ha immagine chiusa in V' e $(V/W)'$ e la sua immagine $\pi'((V/W)')$ sono spazi isomorfi tramite π'.* ∎

2.13. Proposizione. *Sia W un sottospazio chiuso di V. Siano inoltre i l'inclusione di W in V e π la proiezione canonica di V' sul quoziente $V'/\ker i'$. Allora esiste una e una sola applicazione L che rende commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[rr, "i'"] \arrow[dr, "\pi"'] & & W' \\ & V'/\ker i' \arrow[ur, "L"'] & \end{tikzcd}$$

e tale applicazione è un isomorfismo. ∎

3. Alcuni spazi riflessivi

Come vedremo in seguito, è importante sapere se uno spazio è riflessivo o meno. In questo paragrafo consideriamo il caso degli spazi di Hilbert e degli spazi $L^p(\Omega)$, ove Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$ o, più in generale, uno spazio di misure. Ricordiamo i Teoremi di Riesz di rappresentazione dei funzionali in questi due casi, iniziando dal primo.

Se V è uno spazio di Hilbert e $u \in V$, allora l'applicazione

$$v \mapsto (u, v), \qquad v \in V,$$

è un elemento di V' per la disuguaglianza di Schwarz. Denotato tale elemento con Ru, l'applicazione R che a ogni $u \in V$ associa il corrispondente $Ru \in V'$ è lineare e continua. Il Teorema di Riesz afferma che R è un isomorfismo isometrico.

Sia ora $p \in [1, \infty]$. Posto $V = L^p(\Omega)$ e detto $p' \in [1, \infty]$ l'esponente coniugato di p, se $u \in L^{p'}(\Omega)$, allora l'applicazione

$$v \mapsto \int_\Omega uv, \qquad v \in V,$$

è un elemento di V' per la disuguaglianza di Hölder. Denotato tale elemento con $R_p u$, l'applicazione R_p che a ogni $u \in L^{p'}(\Omega)$ associa il corrispondente $R_p u \in V'$ è lineare e continua. Il Teorema di Riesz afferma che, se $1 \leq p < \infty$, R_p è un isomorfismo isometrico.

3.1. Teorema. *Ogni spazio di Hilbert è riflessivo.* ∎

Dimostrazione. Sia V uno spazio di Hilbert e introduciamo l'isomorfismo di Riesz R, il suo trasposto R' e l'isomorfismo canonico J di V in V'':

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "R"] \arrow[dr, "J"'] & & V' \\ & V'' \arrow[ur, "R'"'] & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Denotando dunque con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e con $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ le dualità fra V' e V e, rispettivamente, fra V'' e V', abbiamo

$$\begin{aligned} \langle Ru, v \rangle &= (u, v) && \forall u, v \in V \\ \langle R'u'', v \rangle &= \langle u'', Rv \rangle_* && \forall u'' \in V'' \quad \forall v \in V \\ \langle Ju, v' \rangle_* &= \langle v', u \rangle && \forall u \in V \quad \forall v' \in V'. \end{aligned}$$

Dimostriamo dapprima che il diagramma (3.1) è commutativo, cioè che $R' \circ J = R$. Per ogni $u, v \in V$ abbiamo

$$\langle R'Ju, v \rangle = \langle Ju, Rv \rangle_* = \langle Rv, u \rangle = (v, u) = (u, v) = \langle Ru, v \rangle$$

e la formula voluta è dimostrata.

La riflessività segue allora immediatamente: infatti la commutatività del diagramma implica che J coincide con l'applicazione $R^{-1} \circ R'$, che è un isomorfismo. ∎

3.2. Teorema. *Se* $1 < p < \infty$, *allora* $L^p(\Omega)$ *è riflessivo.* ∎

Dimostrazione. Per evitare troppe parentesi e troppi apici denotiamo con L_p e con q lo spazio $L^p(\Omega)$ e, rispettivamente, l'esponente coniugato di p. Cercando di imitare la dimostrazione del teorema precedente, consideriamo l'analogo del diagramma (3.1):

$$\begin{tikzcd} L_p \arrow[rr, "R_p"] \arrow[dr, "J_p"'] & & {L_q}' \\ & {L_p}'' \arrow[ur, "R'_q"'] & \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Ora, analogamente a quanto fatto sopra, R_p è l'isomorfismo di Riesz relativo a L_p e J_p è l'isomorfismo canonico di L_p nel suo biduale, mentre R'_q è il trasposto dell'isomorfismo di Riesz R_q relativo a L_q, che è puramente ausiliario

$$R_q : L_q \to L'_p.$$

Scrivendo esplicitamente tutte le dualità fra le varie coppie di spazi per maggior chiarezza, abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
{}_{L_q{}'}\langle R_p u, v\rangle_{L_q} &= \int_\Omega uv && \forall u \in L_p \quad \forall v \in L_q \\
{}_{L_p{}'}\langle R_q v, u\rangle_{L_p} &= \int_\Omega vu && \forall u \in L_p \quad \forall v \in L_q \\
{}_{L_q{}'}\langle R_q' u'', v\rangle_{L_q} &= {}_{L_p{}''}\langle u'', R_q v\rangle_{L_p{}'} && \forall u'' \in L_p{}'' \quad \forall v \in L_q \\
{}_{L_p{}''}\langle J_p u, v'\rangle_{L_p{}'} &= {}_{L_p{}'}\langle v', u\rangle_{L_p} && \forall u \in L_p \quad \forall v' \in L_p{}'.
\end{aligned}$$

Si noti che, effettivamente, R_p e R_q sono isomorfismi suriettivi in quanto $p < \infty$ e $q < \infty$ per le ipotesi fatte su p. In particolare anche R_q' è un isomorfismo e quindi la situazione è davvero analoga alla precedente. Dunque, come prima, la tesi seguirà facilmente se controlliamo che il diagramma (3.2) è commutativo, cioè che $R_q' \circ J_p = R_p$. Per ogni $u \in L_p$ e $v \in L_q$ abbiamo

$${}_{L_q{}'}\langle R_q' J_p u, v\rangle_{L_q} = {}_{L_p{}''}\langle J_p u, R_q v\rangle_{L_p{}'} = {}_{L_p{}'}\langle R_q v, u\rangle_{L_p} = \int_\Omega vu = \int_\Omega uv = {}_{L_q{}'}\langle R_p u, v\rangle_{L_q}$$

e la formula voluta è dimostrata. ∎

4. Alcuni risultati di compattezza sequenziale

Richiamiamo le definizioni e i risultati principali relativi alla convergenza debole in uno spazio di Banach e alla convergenza debole* in un duale.

4.1. Convergenza debole. Se $\{v_n\}$ è una successione in V e se $v \in V$, diciamo che $\{v_n\}$ converge a v debolmente in V, e scriviamo $v_n \rightharpoonup v$ in V, quando

$${}_{V'}\langle v', v_n\rangle_V \to {}_{V'}\langle v', v\rangle_V \qquad \forall v' \in V'.$$

Usando il Teorema di Hahn–Banach si vede che il limite debole è unico.

4.2. Convergenza debole*. Se $\{v_n'\}$ è una successione in V' e se $v' \in V'$, diciamo che $\{v_n'\}$ converge a v' debolmente* in V', e scriviamo $v_n' \overset{*}{\rightharpoonup} v'$ in V', quando

$${}_{V'}\langle v_n', v\rangle_V \to {}_{V'}\langle v', v\rangle_V \qquad \forall v \in V.$$

Il limite debole è unico, banalmente.

4.3. Proposizione. *Siano V uno spazio di Banach, $\mathcal{W}$ un suo sottoinsieme denso e $\{f_n\}$ una successione di elementi di V'. Perché $\{f_n\}$ converga debolmente* in V' è necessario e sufficiente che valgano le condizioni seguenti:*

$$\{f_n\} \quad \textit{è limitata in } V' \qquad \textit{e} \qquad \{\langle f_n, w\rangle\} \quad \textit{converge} \quad \forall w \in \mathcal{W}. \ \blacksquare$$

Dimostrazione. Necessità. La limitatezza è facile conseguenza del Teorema di Banach–Steinhaus e la seconda condizione è ovvia. Vediamo ora la sufficienza.

Sia M tale che $\|f_n\|_* \le M$ per ogni n. Dimostriamo che la successione $\{\langle f_n, v\rangle\}$ è di Cauchy per ogni $v \in V$. Siano dunque $v \in V$ e $\varepsilon > 0$. Si fissi $w \in \mathcal{W}$ tale che $\|v - w\| \le \varepsilon$. Per ogni m, n abbiamo allora

$$\begin{aligned}|\langle f_n, v\rangle - \langle f_m, v\rangle| &\le |\langle f_n, v - w\rangle| + |\langle f_n, w\rangle - \langle f_m, w\rangle| + |\langle f_m, w - v\rangle| \\ &\le 2M\varepsilon + |\langle f_n, w\rangle - \langle f_m, w\rangle|\end{aligned}$$

e l'ultimo membro è $\le (2M + 1)\varepsilon$ se m, n sono abbastanza grandi.

Dunque, per ogni $v \in V$, ha senso porre

$$f(v) = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, v\rangle.$$

Si vede subito che f è lineare e che $|f(v)| \le M\|v\|$ per ogni $v \in V$. Dunque $f \in V'$ e $\{f_n\}$ converge a f debolmente* in V'. ∎

4.4. Teorema. *Sia V uno spazio di Banach separabile. Allora ogni sottoinsieme limitato di V' è relativamente sequenzialmente compatto nella topologia debole*.* ∎

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che da ogni successione limitata in V' si può estrarre una sottosuccessione convergente debolmente* in V'. Sia dunque $\{f_n\}$ una tale successione e sia $\mathcal{W}$ un sottoinsieme numerabile e denso di V, che presentiamo come immagine di una successione $\{w_m\}$. Per la Proposizione 4.3 è sufficiente costruire una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ nelle ipotesi del teorema stesso: siccome tutta la successione di partenza è limitata, occorre solo richiedere la seconda condizione, cioè la convergenza di $\{\langle f_{n_k}, w\rangle\}$ per ogni $w \in \mathcal{W}$. Per costruire la sottosuccessione con la proprietà voluta utilizziamo il procedimento diagonale di Cantor.

Prendiamo $m = 1$. Siccome $\{\langle f_n, w_1\rangle\}$ è una successione limitata di numeri reali, il Teorema di Bolzano–Weierstrass assicura che essa ha una sottosuccessione convergente: questa si ottiene con una certa scelta di indici che crescono strettamente. Per comodità indichiamo tali indici con coppie di numeri naturali del tipo $(1, k)$. Abbiamo dunque

$$(1,1) < (1,2) < (1,3) < \ldots \qquad \text{e} \qquad \{\langle f_{(1,k)}, w_1\rangle\} \quad \text{converge.}$$

Consideriamo ora la successione $\{f_{(1,k)}\}$, che è una sottosuccessione della successione data e ripetiamo lo stesso ragionamento appena fatto, sostituendo però w_1 con w_2. Esiste dunque una successione strettamente crescente di indici, che ancora indichiamo con coppie di numeri naturali, ma ora del tipo $(2, k)$, tale che la corrispondente successione $\{\langle f_{(2,k)}, w_2\rangle\}$ converga. Abbiamo dunque

$$(2,1) < (2,2) < (2,3) < \ldots \qquad \text{e} \qquad \{\langle f_{(2,k)}, w_2\rangle\} \quad \text{converge}$$

e, ricordiamolo, la successione $\{(2, k)\}$ è estratta da $\{(1, k)\}$.

Proseguendo poi analogamente, veniamo a costruire infinite successioni di indici, tutti denotati come coppie di naturali, schematizzate nella matrice infinita

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \tag{4.1}$$

che godono delle proprietà seguenti: ogni riga è una successione estratta dalla riga precedente e, per ogni m, la successione numerica $\{\langle f_{(m,k)}, w_m \rangle\}_{k=1,2,\dots}$ converge. Consideriamo allora la successione "diagonale" di indici

$$(1,1), \quad (2,2), \quad (3,3), \quad \dots \tag{4.2}$$

Abbiamo ad esempio $(1,1) < (1,2)$, come sappiamo, e $(1,2) \leq (2,2)$ perché la seconda riga è estratta dalla prima e la prima riga è una successione strettamente crescente di indici. Dunque $(1,1) < (2,2)$ e, in generale, abbiamo

$$(1,1) < (2,2) < (3,3) < \dots$$

per cui $\{f_{(k,k)}\}$ è una successione estratta da quella data. D'altra parte la (4.2) è una sottosuccessione della prima riga di (4.1); soppresso $(1,1)$, ciò che rimane è una sottosuccessione della seconda riga di (4.1); soppresso anche $(2,2)$, ciò che rimane è una sottosuccessione della terza riga di (4.1), eccetera. Abbiamo quindi anche

$$\{\langle f_{(k,k)}, w_m \rangle\} \quad \text{converge per ogni } m.$$

Dunque $\{f_{(k,k)}\}$ è la sottosuccessione cercata. ∎

Al risultato successivo premettiamo un lemma, la dimostrazione del quale segue subito semplicemente esplicitando ipotesi e tesi:

4.5. Lemma. *Siano V uno spazio di Banach e J l'isomorfismo canonico di V in V''. Siano inoltre $\{u_n\}$ una successione in V e $u \in V$. Allora $\{u_n\}$ converge debolmente a u in V se e solo se $\{Ju_n\}$ converge debolmente* a Ju in V''.* ∎

Siccome le successioni convergenti debolmente* sono limitate, come è affermato nella Proposizione 4.3, dal lemma precedente deduciamo

4.6. Corollario. *Ogni successione convergente debolmente è limitata.* ∎

Del lemma successivo diamo solo l'enunciato, anche se la dimostrazione non è difficile, dato che è basata solo sulle definizioni:

4.7. Lemma. *Se V' è separabile, anche V è separabile.* ∎

4.8. Teorema. *Se V uno spazio di Banach riflessivo, ogni sottoinsieme limitato di V è relativamente sequenzialmente compatto nella topologia debole.* ∎

Dimostrazione. Supponiamo dapprima V' separabile. Dobbiamo dimostrare che da ogni successione limitata di V possiamo estrarre una sottosuccessione convergente debolmente. Sia dunque $\{u_n\}$ una tale successione. Allora $\{Ju_n\}$ è una successione limitata di V'', duale dello spazio di Banach separabile V'. Grazie al Teorema 2, esiste una sottosuccessione $\{Ju_{n_k}\}$ convergente debolmente* in V'' a un certo elemento $u'' \in V''$. Siccome V è riflessivo, u'' è l'immagine tramite J di un certo elemento $u \in V$ e dunque $\{Ju_{n_k}\}$ convergente debolmente* a Ju in V''. Quindi, per il lemma precedente, $\{u_{n_k}\}$ converge debolmente a u in V.

Dimostriamo ora il teorema nella sua generalità. Consideriamo il sottospazio W ottenuto prendendo la chiusura della varietà generata dall'immagine della successione $\{u_n\}$. Esso è separabile e chiuso, ovviamente. Per il Teorema 2.9, anche W è riflessivo. Allora anche W'', che è isomorfo a W, è separabile e, per il Lemma 4.7, risulta separabile anche W'. Ora la successione $\{u_n\}$, che è limitata in V e costituita da elementi di W, è una successione limitata di W e ad essa possiamo applicare il risultato già dimostrato: esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ convergente debolmente in W a un certo $u \in W$. Dunque $u \in V$ e ora dimostriamo che la sottosuccessione considerata converge debolmente a u anche in V. Sia infatti $v' \in V'$ ad arbitrio. Detta w' la restrizione di v' a W, abbiamo $w' \in W'$; dunque

$$\lim_{k\to\infty} {}_{V'}\langle v', u_{n_k}\rangle_V = \lim_{k\to\infty} {}_{W'}\langle w', u_{n_k}\rangle_V = {}_{W'}\langle w', u\rangle_W = {}_{V'}\langle v', u\rangle_V .$$

Ciò conclude la dimostrazione. ∎

4.9. Osservazione. Riportiamo gli enunciati di altri risultati di compattezza che coinvolgono le topologie deboli, alcuni dei quali completano quanto abbiamo già visto e sono di dimostrazione molto difficile.

(a) Se V è uno spazio di Banach, allora ogni sottoinsieme limitato del duale è relativamente compatto per la topologia debole* (Banach–Alaoglu–Bourbaki).

(b) Uno spazio di Banach V è riflessivo se e solo se ogni suo sottoinsieme limitato è relativamente compatto per la topologia debole (Kakutani).

(c) Uno spazio di Banach V è riflessivo se e solo se ogni suo sottoinsieme limitato è relativamente sequenzialmente compatto per la topologia debole (Eberlein–Smulian).

5. Qualche semplice applicazioni della riflessività

Premettiamo due lemmi che hanno applicazioni molto generali:

5.1. Lemma. *Siano X uno spazio topologico separato, $\{x_n\}$ una successione di elementi di X e x un elemento di X. Allora perché $\{x_n\}$ converga a x è sufficiente che:*

(5.1) *da ogni sottosuccessione estratta da $\{x_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente a x.* ∎

Dimostrazione. Ragionando per assurdo e supponendo che $\{x_n\}$ non converga a x, troviamo un intorno A di x e una sottosuccessione S di $\{x_n\}$ nessun elemento della quale appartiene ad A. Siccome ogni successione convergente a x ha elementi che appartengono ad A in quanto A è un intorno di x, la successione S non può avere sottosuccessioni convergenti a x. Dunque la (5.1) è contraddetta e la dimostrazione è conclusa. Notiamo che, di fatto, la (5.1) è anche necessaria. ∎

5.2. Osservazione. Allora, per verificare che una successione $\{x_n\}$ converge, è sufficiente controllare che: (i) ogni sua sottosuccessione ha una sottosuccessione convergente; (ii) tutte le sottosuccessioni convergenti di $\{x_n\}$ hanno lo stesso limite. Queste condizioni sono soddisfatte quando lo spazio ambiente X ha proprietà di compattezza sequenziale e i limiti di tutte le sottosuccessioni convergenti estratte da $\{x_n\}$ risolvono un problema per il quale è noto un risultato di unicità.

5.3. Lemma. *Siano V e W due spazi normati e L un operatore lineare e continuo da V in W. Allora L è sequenzialmente continuo da V in W quando i due spazi sono muniti delle rispettive topologie deboli.* ∎

Dimostrazione. Supponiamo $v_n \rightharpoonup v$ in V e deduciamo che $Lv_n \rightharpoonup Lv$ in W. Se infatti $w' \in \mathcal{W}'$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} {}_{W'}\langle w', Lv_n\rangle_W = \lim_{n\to\infty} (w' \circ L)(v_n) = (w' \circ L)(v) = {}_{W'}\langle w', Lv\rangle_W$$

in quanto $w' \circ L$ è lineare e continuo su V, cioè appartiene a V'. ∎

Ecco la prima delle due applicazioni:

5.4. Proposizione. *Siano $\mathcal{W}$ uno spazio localmente convesso e V un sottospazio vettoriale di $\mathcal{W}$ munito della struttura di spazio di Banach in modo che*

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{in } V \qquad \text{implichi} \qquad v_n \to v \quad \text{in } \mathcal{W}.$$

Siano inoltre $\{u_n\}$ una successione di elementi di V e $w \in \mathcal{W}$ tali che

$$u_n \rightharpoonup w \qquad \text{in } \mathcal{W}.$$

Allora, se V è riflessivo e $\{u_n\}$ è limitata in V, abbiamo

$$w \in V \qquad \text{e} \qquad u_n \rightharpoonup w \qquad \text{in } V. \ \blacksquare$$

Dimostrazione. Grazie al Lemma 5.1, applicato allo spazio V munito della topologia debole, è sufficiente verificare la condizione (5.1). Sia dunque S una sottosuccessione estratta da quella data. Allora anche S è limitata in V e, siccome V è riflessivo, da S è possibile estrarre una sottosuccessione S' debolmente convergente in V a un certo elemento $u \in V$. Segue che S' converge a u in $\mathcal{W}$. Siccome S' converge a w in $\mathcal{W}$ e

$\mathcal{W}$ è separato, deduciamo $w = u$. In particolare $w \in V$, che è la prima tesi. Inoltre S' converge debolmente a w in V, il che conclude la verifica della (5.1). ∎

La prossima applicazione riguarda la compattezza degli operatori lineari e continui. Diamo in generale la seguente

5.5. Definizione. *Siano V e W due spazi di Banach e $L : V \to W$ un operatore. Diciamo che L è compatto quando, per ogni sottoinsieme B limitato di V, l'immagine $L(B)$ è un sottoinsieme relativamente compatto di W.* ∎

5.6. Proposizione. *Siano V e W due spazi di Banach e $L : V \to W$ un operatore lineare e continuo. Se V è riflessivo, allora L è compatto se e solo se vale la condizione*

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{in } V \qquad \text{implica} \qquad Lv_n \to Lv \quad \text{in } W\,. \tag{5.2}$$ ∎

Dimostrazione. Supponiamo L compatto, oltre che lineare e continuo, e dimostriamo che vale la condizione (5.2). Supponiamo dunque $v_n \rightharpoonup v$ in V e dimostriamo che da ogni sottosuccessione estratta dalla successione $\{Lv_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente a Lv fortemente in W. Il Lemma 5.1 fornirà allora $Lv_n \to Lv$ in W.

Sia dunque $\{Lv_{n_k}\}$ un'estratta da $\{Lv_n\}$. Allora $v_{n_k} \rightharpoonup v$ in V per cui $\{v_{n_k}\}$ è limitata in V. Per la compattezza di L, l'insieme $\{Lv_{n_k} : k \in \mathbf{N}\}$ è relativamente compatto in W, per cui esiste una sottosuccessione $\{Lv_{n_{k_i}}\}$ tale che

$$Lv_{n_{k_i}} \to w \qquad \text{in } W$$

per un certo $w \in W$. D'altra parte, siccome L è lineare e continuo, grazie al Lemma 5.3 abbiamo $Lv_n \rightharpoonup Lv$ in W. Deduciamo

$$Lv_{n_{k_i}} \rightharpoonup Lv \qquad \text{in } W$$

e concludiamo che $w = Lv$ e che $Lv_{n_{k_i}} \to Lv$ in W.

Viceversa, supponiamo vera la (5.2) e verifichiamo che L è compatto. Siano dunque B un limitato di V e $\{w_n\}$ una successione in $L(B)$, cioè una successione della forma $\{Lv_n\}$ ove $\{v_n\}$ è una successione in V: dobbiamo trovare una sottosuccessione convergente fortemente in W.

Siccome $\{v_n\}$ è limitata in V e V è riflessivo, possiamo estrarre una successione $\{v_{n_k}\}$ convergente debolmente in V a un certo $v \in V$. Allora, applicando la (5.2), deduciamo $Lv_{n_k} \to Lv$ in W, per cui abbiamo trovato la sottosuccessione cercata. ∎

6. La norma del grafico

Siano V uno spazio di Banach, $\mathcal{Z}$ uno spazio localmente convesso[(1)], Z un sottospazio vettoriale di $\mathcal{Z}$ munito di una struttura di spazio di Banach e L un operatore lineare di V in $\mathcal{Z}$. Supponiamo che l'iniezione di Z in $\mathcal{Z}$ verifichi

$$z_n \to z \quad \text{in } Z \qquad \text{implica} \qquad z_n \to z \quad \text{in } \mathcal{Z} \tag{6.1}$$

[(1)] Più in generale $\mathcal{Z}$ può essere uno spazio vettoriale topologico separato.

e che l'operatore L verifichi l'analoga condizione

$$v_n \to v \quad \text{in } V \qquad \text{implica} \qquad Lv_n \to Lv \quad \text{in } \mathcal{Z}. \tag{6.2}$$

Notiamo che queste due condizioni sono spesso soddisfatte nelle applicazioni.

6.1. Definizione. *Nelle condizioni dette poniamo*

$$W = \{v \in V : \; Lv \in Z\} \qquad \text{e, per } v \in W, \qquad \|v\|_W = \|v\|_V + \|Lv\|_Z \tag{6.3}$$

e chiamiamo la norma $\|\cdot\|_W$ *norma del grafico.* ■

Il nome *norma del grafico* è dovuto al fatto seguente: per ogni $v \in W$ la norma di v in W e la norma del punto (v, Lv) del grafico G della restrizione di L a W sono le stesse se G è visto come sottospazio del prodotto $V \times Z$ munito della norma usuale

$$\|(v,z)\|_{V\times Z} = \|v\|_V + \|z\|_Z.$$

Si noti che la somma al secondo membro può essere sostituita ad esempio dal massimo oppure dalla radice della somma dei quadrati, dato che si otterrebbero norme equivalenti. Sostituzioni dello stesso tipo sono allora lecite anche in (6.3). Si verifica immediatamente che $V \times W$ è uno spazio di Banach. Il primo risultato è il seguente

6.2. Teorema. *W è uno spazio di Banach rispetto alla norma del grafico.* ■

Dimostrazione. Sia $\{u_n\}$ di Cauchy in W. Allora le successioni $\{u_n\}$ e $\{Lu_n\}$ sono di Cauchy in V e in Z rispettivamente. Siccome V e Z sono completi, esistono $u \in V$ e $z \in Z$ tali che

$$u_n \to u \quad \text{in } \; V \qquad \text{e} \qquad Lu_n \to z \quad \text{in } \; Z.$$

Le (1) e (2) implicano allora

$$Lu_n \to z \quad \text{in } \; \mathcal{Z} \qquad \text{e} \qquad Lu_n \to Lu \quad \text{in } \; \mathcal{Z}.$$

Quindi, essendo $\mathcal{Z}$ separato, risulta $z = Lu$. Dunque $u \in W$ e $u_n \to u$ in W. ■

Ecco l'altro risultato importante:

6.3. Teorema. *Con le notazioni precedenti, se gli spazi V e Z sono riflessivi, anche lo spazio W è riflessivo.* ■

Dimostrazione. Grazie ai Teoremi 2.1 e 2.9, è sufficiente controllare che W è isomorfo a un sottospazio chiuso del prodotto $V \times Z$. Consideriamo l'applicazione T di W in $V \times Z$, la cui immagine è il grafico di $L|_W$, definita dalla formula

$$Tv = (v, Lv), \qquad v \in W.$$

Chiaramente T è lineare e iniettiva. Inoltre, per ogni $v \in W$, risulta

$$\|Tv\|_{V\times Z} = \|(v, Lv)\|_{V\times Z} = \|v\|_V + \|Lv\|_Z = \|v\|_W$$

per cui T è un'isometria. Dunque W è isomorfo all'immagine $T(W)$, che è un sottospazio del prodotto $V \times Z$. Siccome W è completo, anche $T(W)$ è completo; dunque esso è un sottospazio chiuso di $V \times Z$ e la dimostrazione è conclusa. ∎

Vogliamo ora esprimere la convergenza debole in W in termini delle convergenze deboli degli spazi V e Z da cui siamo partiti. Per questo premettiamo un risultato, che è anche di interesse autonomo, sul duale di W.

6.4. Teorema. *Per ogni $w' \in W'$ esistono $v' \in V'$ e $z' \in Z'$ tali che*

$$_{W'}\langle w', v\rangle_W = {}_{V'}\langle v', v\rangle_V + {}_{Z'}\langle z', Lv\rangle_Z \qquad \forall v \in W. \ \blacksquare \tag{6.4}$$

Dimostrazione. Detto G il grafico della restrizione di L a W, che è un sottospazio lineare di $V \times Z$ in quanto L è lineare, consideriamo il funzionale

$$f : (v, z) \mapsto {}_{W'}\langle w', v\rangle_W \qquad (v, z) \in G.$$

Esso è chiaramente lineare e verifica

$$|f(v, z)| \le \|w'\|_{W'}\|v\|_W \le \|w'\|_{W'}(\|v\|_V + \|z\|_Z) = \|w'\|_{W'}\|(v, z)\|_{V\times Z}.$$

Esso, dunque, è anche continuo rispetto alla norma che $V \times Z$ induce su G. Per il Teorema di Hahn–Banach f ha un prolungamento F lineare e continuo definito su tutto lo spazio prodotto. Per il Lemma 2.2 esistono $v' \in V'$ e $z' \in Z'$ tali che

$$_{(V\times Z)'}\langle F, (v, z)\rangle_{V\times Z} = {}_{V'}\langle v', v\rangle_V + {}_{Z'}\langle z', z\rangle_Z \qquad \forall (v, z) \in V \times Z. \ \blacksquare \tag{6.5}$$

Per ogni $v \in W$ abbiamo allora

$$_{W'}\langle w', v\rangle_W = {}_{G'}\langle f, (v, Lv)\rangle_G = {}_{(V\times Z)'}\langle F, (v, Lv)\rangle_{V\times Z} = {}_{V'}\langle v', v\rangle_V + {}_{Z'}\langle z', Lv\rangle_Z$$

e la dimostrazione è conclusa. ∎

6.5. Proposizione. *Siano $\{w_n\}$ una successione in W e $w \in W$. Allora $\{w_n\}$ converge a w debolmente in W se e solo se valgono le condizioni*

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{in } V \qquad \text{e} \qquad Lw_n \rightharpoonup Lw \quad \text{in } Z. \ \blacksquare$$

Dimostrazione. Supponiamo $\{w_n\}$ convergente a w debolmente in W. Fissato ad arbitrio $v' \in V'$, il funzionale $w' = v'|_W$ è lineare e continuo su W. Dunque possiamo scrivere

$$\lim_{n\to\infty} {}_{V'}\langle v', w_n\rangle_V = \lim_{n\to\infty} {}_{W'}\langle w', w_n\rangle_W = {}_{W'}\langle w', w\rangle_W = {}_{V'}\langle v', w\rangle_V$$

e ciò dimostra la prima delle due condizioni. La seconda si ottiene definendo $w' = z' \circ L$ a partire dal generico $z' \in Z'$ e osservando che $w' \in W'$:

$$\lim_{n\to\infty} {}_{Z'}\langle z', Lw_n\rangle_Z = \lim_{n\to\infty} {}_{W'}\langle w', w_n\rangle_W = {}_{W'}\langle w', w\rangle_W = {}_{Z'}\langle z', Lw\rangle_Z .$$

Per vedere la sufficienza delle condizioni dell'enunciato, prendiamo $w' \in W'$ ad arbitrio e, applicando il risultato precedente, troviamo $v' \in V'$ e $z' \in Z'$ tali che valga la (6.4). Abbiamo allora

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} {}_{W'}\langle w', w_n\rangle_W &= \lim_{n\to\infty} {}_{V'}\langle v', w_n\rangle_V + \lim_{n\to\infty} {}_{Z'}\langle z', Lw_n\rangle_Z \\ &= {}_{V'}\langle v', w\rangle_V + {}_{Z'}\langle z', Lw\rangle_Z = {}_{W'}\langle w', w\rangle_W\end{aligned}$$

e la dimostrazione è conclusa. ■

6.6. Osservazione. Tutto quanto abbiamo detto si estende senza difficoltà al caso più generale che ora descriviamo. Ancora V è uno spazio di Banach e gli spazi Z e $\mathcal{Z}$ e l'operatore L sono sostituiti da $n-$ uple. Abbiamo dunque n spazi Z_j di Banach, n spazi $\mathcal{Z}_j$ localmente convessi e n operatori lineari L_j verificanti le analoghe ipotesi sulle inclusioni e sulle continuità. La definizione di W e la relativa norma del grafico sono ora le seguenti:

$$W = \{v \in V : \ L_j v \in Z_j, \ j = 1, \ldots, n\}, \qquad \|v\|_W = \|v\|_V + \sum_{j=1}^n \|L_j v\|_{Z_j} .$$

Allora W è uno spazio di Banach, per il suo duale vale la formula di rappresentazione

$${}_{W'}\langle w', v\rangle_W = {}_{V'}\langle v', v\rangle_V + \sum_{j=1}^n {}_{Z_j'}\langle z_j', L_j v\rangle_{Z_j} \qquad \forall v \in W$$

per opportuni $v' \in V'$ e $z_j' \in Z_j'$ e, ancora, se tutti gli spazi V e Z_j sono riflessivi, anche W gode della stessa proprietà. Per dimostrare tutto quanto si possono adattare le dimostrazioni fatte, oppure si può procedere come segue: si introducono gli spazi prodotto Z e $\mathcal{Z}$ e l'operatore L definiti da

$$Z = Z_1 \times \ldots \times Z_n, \qquad \mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \times \ldots \times \mathcal{Z}_n \qquad \text{e} \qquad Lv = (L_1 v, \ldots, L_n v), \quad v \in V,$$

e ci si riconduce al caso precedente.