Tutorato di Analisi Matematica 2
Lezione 3

5 Aprile 2024

Esercizio 1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$, e sia $f : A \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = 2x^2 \log(xy) + 3.$$

Determinare il dominio A di f e stabilire se f è continua, differenziabile, C^1 in A. Calcolare il gradiente di f nei punti di A in cui è definito e calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1,f(1,1))$. Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(1,1)$ nella direzione $v = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$.

Esercizio 2. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y e^{x^2} + y^2}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

è continua e per quali è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 3. (Prescritto d'esame 16 Giugno 2022).
Dire per quali esponenti del parametro $\alpha > 0$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2 + xy^3}{(x^2+y^2)^{5\alpha}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

è continua ma non differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 4. Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1 e $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua tale che $\|v(x)\| = 1$ per ogni $x \in \Omega$. Mostrare che è continua anche la funzione

$$D_v : \Omega \to \mathbb{R}^m, \;\; D_v(x) = \frac{\partial f}{\partial v(x)}(x).$$

Esercizio 5. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali. Sia poi $P : \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi/2) \to \Omega$ la mappa di passaggio a coordinate polari, ossia $P(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$. Definiamo $\tilde{f}(\rho,\theta) = f \circ P(\rho,\theta)$, e supponiamo che $\tilde{f}$ abbia derivate parziali di classe C^1. Allora anche f è di classe C^1.
- Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 ed è biunivoca con inversa di classe C^1 allora

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\infty} \|f(\boldsymbol{x}\| = +\infty.$$

- se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è di classe C^1 allora per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ esiste un intorno $U_{\boldsymbol{x}}$ in cui la funzione f è lipschitziana.
- se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 ed è biunivoca con inversa di classe C^1, allora per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ la Jacobiana $J_{\boldsymbol{x}} f$ è invertibile.
- Siano P_k e Q_r due polinomi definiti su $\mathbb{R}^3$ a valori reali di grado rispettivamente k e r. Allora se $k > r > 0$ e se i due polinomi sono a coefficienti non negativi necessariamente vale
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\infty} \frac{P_k(\boldsymbol{x})}{Q_r(\boldsymbol{x})} = +\infty.$$
- Siano P_k e Q_r due polinomi come al punto precedente con $k > r > 0$. Supponiamo inoltre che siano entrambi omogenei (ossia tutti i monomi di cui sono composti P_k e Q_r hanno rispettivamente grado k e r), allora
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to 0} \frac{P_k(\boldsymbol{x})}{Q_r(\boldsymbol{x})} = 0.$$

Esercizio 6. Scrivere il polinomio di McLaurin di ordine 2 delle seguenti funzioni:

$$3x_2 + x_1 \sin(x_2) \text{ per } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2; \quad x_1 x_2 \exp(x_3) \text{ per } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3;$$
$$x_1(x_2 + \cos(x_1 x_2)) \text{ per } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2; \quad x_1^2 - x_2 + x_1 x_2 x_3 \text{ per } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Esercizio 7. Verificare la validità delle seguenti regole di calcolo:

$$\begin{array}{rlll}
\partial_{x_i}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}) = (\partial_{x_i}\boldsymbol{f})\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}\partial_{x_i}\boldsymbol{g} & & \text{se } \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, & \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \\
\partial_{x_i}(f\boldsymbol{g}) = (\partial_{x_i} f)\boldsymbol{g} + f\partial_{x_i}\boldsymbol{g} & & \text{se } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, & \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \\
\partial_{\boldsymbol{v}}(f\boldsymbol{g}) = (\partial_{\boldsymbol{v}} f)\boldsymbol{g} + f\partial_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{g} & & \text{se } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, & \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \\
\partial_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}) = (\partial_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{f})\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}\partial_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{g} & & \text{se } \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, & \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \\
\operatorname{grad}(\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}) = (A + A^t)\boldsymbol{x}, & & \text{se } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, & A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \\
\operatorname{grad}(|\boldsymbol{x}|) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}, & & \text{se } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. & \\
\dfrac{d}{dt}\Big(A(t)\cdot B(t)\Big) = A'(t)\cdot B(t) + A(t)\cdot B'(t) & & \text{se } A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), & B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})
\end{array}$$

Esercizio 8. Applicare quanto visto nell'esercizio precedente per calcolare le seguenti funzioni di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{grad}|A\boldsymbol{x}|^2 \text{ con } A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); \quad \operatorname{grad}(\exp(|\boldsymbol{x}|));$$
$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}}(x_1\boldsymbol{v}), \text{ con } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \text{ versori ortogonali di } \mathbb{R}^3$$
$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}}(\operatorname{grad}|\boldsymbol{x}|^2), \text{ con } \boldsymbol{u} \text{ versore di } \mathbb{R}^3.$$

Esercizio 9. Detta S la semiretta di $\mathbb{R}^2$ descritta dalle condizioni $x_2 = 0$ e $x_1 \geq 0$, e posto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus S$, consideriamo la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{1}{x_1^2+1} \text{ se } x_1 > 0 \text{ e } x_2 > 0; \\ 1 \text{ altrove.} \end{cases}$$

Mostrare che f è di classe C^1 in Ω, e che le sue derivate sono limitate.
Mostrare che ciononostante f non è lipschitziana.

Esercizio 10.

- Costruire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $f(x) = 1$ per ogni $x \in [-1, 1]$ e $f(x) = 0$ per ogni $x \notin [-2, 2]$.
- Costruire una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $f(x) = 1$ su $B_1(0) := \{x : \|x\| \leq 1\}$ e $f(x) = 0$ per ogni x di $\big(B_2(0)\big)^c := \{x : \|x\| > 2\}$.

Esercizio 11.

- Dare un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che sia derivabile parzialmente in ogni punto, ma che non sia differenziabile nei punti $(0, 0)$ e $(0, 1)$.
- Dare un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che sia derivabile parzialmente in ogni punto, ma che non sia differenziabile in nessuno dei punti di tipo $(0, n) : n \in \mathbb{N}$.