Tutorato di Analisi Matematica 2

Foglio 2 – 22/03/2024

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono continue:

$$\text{(a)} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^5}{(x^2+y^2)^3} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\text{(c)} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-e^{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

BONUS: Studiare anche derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$.

Esercizio 2. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{\log(1+|xy|)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\text{(b)} \lim_{(x,y)\to\infty} ye^{-x^2},$$

$$\text{(c)} \lim_{(x,y)\to\infty} (x+y)e^{-2x^2-3y^2},$$

Esercizio 3. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(\sin x - \sin y)}{(x^2+y^2)^{3/4}},$$

$$\text{(b)} \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(x-2)\sin\sqrt[3]{y-1}}{x^2+y^2-2x-4y+5}$$

$$\text{(c)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+(y-x)^2)}{x^2+y^2}$$

$$\text{(d)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2x}{x^2+y^4}$$

Esercizio 4. Sia (X,d) uno spazio metrico.

1. Sia $x_0 \in X$ un punto fissato. Mostrare che la mappa $x \mapsto d(x,x_0)$ è lipschitziana, cioè esiste $L \geq 0$ tale che, per ogni $x,y \in X$, valga
$$|d(x,x_0) - d(y,x_0)| \leq L\, d(x,y).$$
2. Sia $A \subseteq X$ un insieme non vuoto,e si definisca per ogni $x \in X$
$$\delta(x,A) := \inf_{a\in A} d(x,a).$$
Dimostrare che anche $x \mapsto \delta(x,A)$ è lipschitziana e verificare che
$$\overline{A} \equiv \{x \in X \mid \delta(x,A) = 0\}.$$

Esercizio 5. (*Proprietà di Urysohn*) Sia (X, d) uno spazio metrico, e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Si dimostri l'equivalenza delle seguenti condizioni:

1. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\overline{x} \in X$.
2. Ogni sottosuccessione di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette un'ulteriore sottosuccessione convergente a $\overline{x} \in X$.