Tutorato di Analisi Matematica 2
Lezione 4

12 Aprile 2024

Esercizio 1. Dimostrare la validità delle seguenti relazioni (dove i simboli O e o denotano rispettivamente l'O-grande e l'o-piccolo).

- Se $F(x) = O(|x|^n)$ per qualche $n \geq 1$, allora $F(x) = o(|x|^{n-1}$.
- Se $\varphi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che:
$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(x) = o(|x|^k) \text{ per qualche } k \geq 0,$$
e se
$$F(0) = 0 \text{ e } F(x) = O(|x|^n) \text{ per un qualche } n \geq 1,$$
allora
$$\varphi(F(x)) = o(|x|^{nk}).$$
- Se P è un polinomio di grado n omogeneo nelle variabili x e y, ossia
$$P(x,y) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j y^{n-j},$$
allora vale
$$P(x,y) = O\Big(\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^n\Big).$$

Esercizio 2. Sviluppare le seguenti funzioni fino al quart'ordine in zero:
$$f_1(x,y,z) = \sin(xyz); \quad f_2(x,y) = \cos(x+y^2).$$
Sviluppare le seguenti funzioni fino al secondo ordine in zero:
$$g_1(x,y) = \frac{e^x}{1-\sin(y)};\ \ g_2(x,y) = \frac{e^{\sin(x)}}{1+xy};\ \ g_3(x,y) = \frac{\cos(x-y)}{e^{x+y}};\ \ g_4(x,y) = \log(e^y + \sin(x)).$$

Esercizio 3. Determinare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = (3x - x^3)(3y - y^3)$ di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ e classificarli.
Determinare estremo inferiore/superiore della funzione
$$g(x,y) = \frac{x^3 y}{1 + x^4 + y^4}$$
precisando se si tratta rispettivamente di un minimo o di un massimo.

Esercizio 4. Si determinino gli eventuali estremi locali e globali delle seguenti funzioni

$$f(x,y) = \sin(x+y) - \cos(x-y); \;\; g(x,y) = x^2y^6 + \arctan(x^2y).$$

Esercizio 5. Studiare i punti di massimo e minimo locale di

$$f(x,y) = |xy|(7x + 7y - 1)$$

ristretta agli insiemi

$$A^+ = (0,+\infty) \times (0,+\infty);$$
$$A^+ = (0,+\infty) \times (-\infty,0).$$

Esercizio 6. Classificare i punti stazionari di

$$f(x,y) = \sin(x)e^{\cos(x)}; \;\; g(x,y) = x^3 - x^2y; \;\; h(x,y) = (\sin(x))^2 + \cos(y).$$

Esercizio 7. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 z e^{y^2+z^2}$$

nella palla di centro $(0,0,0)$ e raggio 1.

Esercizio 8. Determinare (se esistono) il massimo e il minimo assoluti nel piano della funzione

$$f(x,y) = \frac{2 - x^2y^2}{\exp\left(4\sqrt{x^2+y^2}\right)}.$$

Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sin(\pi/2xy^4)}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^4}}.$$

Esercizio 9. Sia Ω un insieme aperto, non vuoto, limitato di $\mathbb{R}^n$, sia $\bar{\Omega}$ la sua chiusura, e sia f una funzione reale definita in $\bar{\Omega}$, continua, avente derivate prime continue in Ω. Si supponga inoltre che f assuma valore costante sulla frontiera di Ω. Allora esiste almeno un punto di Ω in cui il differenziale di f è nullo. (Confrontare il risultato con il teorema di Rolle)

Esercizio 10. Siano dati n punti $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$ nel piano. Mostrare che esiste un unico punto $\boldsymbol{p} = (x,y)$ tale che la somma dei quadrati delle distanze dagli n punti assegnati sia minima. Ossia $\boldsymbol{p}$ minimizza la funzione

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2].$$

Esercizio 11. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Dimostrare che f è continua. Dimostrare che per ogni punto $P = (x,y)$ esiste un intorno U_P tale che la restrizione di f ad U_P è lipschitziana.
Sia K un compatto di $\mathbb{R}^2$. Mostrare che f ristretta a K è lipschitziana.

Esercizio 12. Trovare una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ almeno di classe C^1 che abbia solo due punti stazionari, i quali sono entrambi minimi locali.
Confrontare con quanto noto dall'analisi uno.