Tutorato di Analisi Matematica 2
Lezione 5

19 Aprile 2024

Esercizio 1. Si calcoli
$$\int\int_T xy\sin(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
con
$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y \le 2x,\ \frac{2}{x}\pi \le y \le \frac{3}{x}\pi,\ x > 0\}.$$
Hint: trasformare T in un rettangolo.

Esercizio 2. Si calcoli, usando un'opportuna trasformazione,
$$\int\int_T x^2(y-x^3)e^{y+x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
dove
$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \le y \le 3,\ x \ge 1\}.$$

Esercizio 3. Calcolare il volume della regione interna al cilindro di equazione $x^2+y^2 \le 4$ e compresa tra i piani $z = x-1$ e $z = 1-x$.

Esercizio 4. Solidi di tipo conico.
Calcolare la misura dell'$n-$simplesso standard definito come
$$\Lambda_n := \Big\{\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n :\ 0 \le x_i \le 1\,\forall i;\ \sum_{i=1}^n x_i \le 1\Big\}.$$
Hint: iniziare a risolvere il problema per $n = 2$. Il risultato generale è $mis(\Lambda_n) = 1/n!$

Esercizio 5. Calcolare il volume dei solidi di $\mathbb{R}^3$ descritti dai seguenti sistemi di disequazioni:
$$x \ge 0,\ 0 \le y \le z \le x,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4;$$
$$1 < x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 < 4;$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le \max\{x,y\};$$
$$x^2+y^2+z^2 \le 1,\ 0 < y < x;$$
$$x^2+y^2 \le 1,\ x^2+z^2 \le 1.$$

Esercizio 6. Dimostrare il seguente risultato: (**Teorema di Guldino**)
Sia D un insieme compatto misurabile nel piano. Sia r una retta del piano che non interseca D e si consideri il solido E ottenuto per rotazione di D di un angolo α attorno all'asse r. Allora il volume di E è pari al prodotto dell'area di D per la lunghezza del cammino percorso dal baricentro di D.
[Si consideri inizialmente D nel piano yz di un riferimento xyz e come retta r l'asse z.]

Esercizio 7. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa. Sia E il solido ottenuto facendo ruotare il sottografico di f di un giro completo attorno all'asse x. Dimostrare che

$$\operatorname{mis}(E) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Esercizio 8. Calcolare il momento di inerzia rispetto al piano x, y del solido S di $\mathbb{R}^3$ di densità 1 ottenuto intersecando la corona sferica di raggi 1 e 2 con il cono circolare descritto dalle disequazioni $z > 0$ e $z^2 > x^2 + y^2$.

Esercizio 9. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dove A è aperto. Sia $c \in A$ un punto di continuità per f. Posta $B_k = B_{1/k}(c)$ mostrare che

$$\lim_{k \to \infty} ⨍_{B_k} f(x) \, \mathrm{d}x = f(c).$$

Esercizio 10. Sia $\rho : B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente positiva e limitata definita sulla palla $n-$dimensionale. Sia $f : B_1(0) \to \mathbb{R}$ un funzione integrabile e continua in zero. Calcolare

$$\lim_{r \to 0} \frac{\int_{B_r(0)} f(x) p(x) \, \mathrm{d}x}{\int_{B_r(0)} p(x) \, \mathrm{d}x}.$$