Tutorato di Analisi Matematica 2
Lezione 7

10 Maggio 2024

Esercizio 1. Determinare, se esiste, $\min_C f$ dove

$$f(x,y,z) = x^2 + y - z, \quad C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z = x^2 - y.\}$$

Esercizio 2.
- Trovare i punti della superficie

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - xy - 1 = 0\}$$

  più vicini all'origine.

- Trovare, se esistono, i punti dell'insieme

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 - xy + y^2 - z = 1, \ x^2 + y^2 = 1\}$$

  che hanno minima e massima distanza dall'origine.

Esercizio 3. Siano $f(x,y) = x$ e $g(x,y) = y^2 - x^3$. Mostrare che $(0,0)$ è un punto di minimo per f vincolato a $g(x,y) = 0$, ma che non è critico per f, cioè non esiste alcun λ che verifichi l'uguaglianza

$$\nabla f(0,0) = \lambda \nabla g(0,0).$$

Esercizio 4. Siano f, g due funzioni scalari differenziabili definite su $\mathbb{R}^3$ i cui gradienti non sono mai nulli in nessun punto. Supponiamo che gli insiemi

$$\Gamma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\}, \ \Gamma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}$$

siano entrambi non vuoti, e che Γ_2 sia compatto.
Dimostrare che

- esistono due punti $\boldsymbol{x_1} \in \Gamma_1$ e $\boldsymbol{x_2} \in \Gamma_2$ tali che

$$\|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}\| = \inf\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| : \ \boldsymbol{x} \in \Gamma_1, \ \boldsymbol{y} \in \Gamma_2\}.$$

- Il segmento che congiunge $\boldsymbol{x_1}$ con $\boldsymbol{x_2}$ è ortogonale sia a Γ_1 sia a Γ_2.

Esercizio 5. Determinare i punti dello spazio $\mathbb{R}^3$ che hanno massima e minima distanza dall'asse z e inoltre appartengono all'insieme definito dalle equazioni

$$x^2 + y^2 + 7z^2 = 1, \quad x + y + z = 1.$$

Esercizio 6. Determinare la migliore costante M tale che

$$x^2 + y^2 \leq M(x^4 + y^2)$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x^4 + y^2 \geq 1$.
Determinare se esiste una costante M per cui vale la disuguaglianza precedente per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 7. Sia Γ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ descritto dalle equazioni

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n - m,$$

dove $n > m > 0$, e dove i vettori $\boldsymbol{u}_i$ sono linearmente indipendenti (ma non necessariamente ortogonali).
Sia $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$. Calcolare la proiezione di $\boldsymbol{x_0}$ su Γ, ossia il punto di minimo della funzione

$$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\|, \quad \text{al variare di } \boldsymbol{x} \in \Gamma.$$

Dimostrare in particolare che la proiezione esiste ed è unica.

Esercizio 8. Data una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trovare i punti di estremo della funzione

$$f(\boldsymbol{x}) = x^t A x$$

sulla sfera $\mathbb{S}^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$.

Esercizio 9. Calcolare la distanza tra

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}, \ \ \Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2 - 5,\ 0 \leq x \leq 2.\}$$

Esercizio 10. Calcolare

$$\int_\gamma (x + y + 3)\, \mathrm{d}x - 2y^2\, \mathrm{d}y,$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio uno orientata in senso orario.

Esercizio 11. Determinare se la forma differenziale

$$\omega(x, y) = (2xe^{x^2} \sin(y))\, \mathrm{d}x + (e^{x^2} \cos(y))\, \mathrm{d}y$$

è esatta. In caso affermativo determinarne una primitiva.

Esercizio 12. Sia $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{x\, \mathrm{d}x + y\, \mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$$

su Ω. Dimostrare che è chiusa e esatta in tutto Ω.
Verificare poi che la forma differenziale

$$\omega'(x, y) = \frac{-y\, \mathrm{d}x + x\, \mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$$

è chiusa ma non esatta.

Esercizio 13. Data la forma differenziale

$$\omega = \left(\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) \mathrm{d}y$$

e la curva γ data da

$$\gamma(t) = (2+\cos(t), 2\sin(t)),\ t \in [0, 2\pi],$$

calcolare

$$\int_\gamma \omega.$$

Esercizio 14. Determinare le regioni massimali del piano su cui è esatta la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(2xy - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x + x^2 \, \mathrm{d}y$$

e determinare una primitiva f di ω su tali regioni.

Esercizio 15. Determinare la funzione $A(x,y,z)$ affinché la forma differenziale

$$y \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y + A(x,y,z) \, \mathrm{d}z$$

sia esatta.

Esercizio 16. Determinare tutte le forme differenziali esatte del tipo

$$A(y) \, \mathrm{d}x + B(x) \, \mathrm{d}y$$

dove le funzioni A e B sono di classe $C^1(\mathbb{R})$.