
Tutorato di Analisi Matematica 2

Foglio 8 – 17/05/2024

Esercizio 1. Per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{ay - 2x}{x^2 + 4y^2} dx + \frac{bx - 8y}{x^2 + 4y^2} dy$$

è esatta nel primo quadrante? Per quali invece è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

Esercizio 2. Stabilire se la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = (3x^2y - yz + 1)dx + (x^3 - xz - 1)dy + (1 - xy)dz$$

sia esatta in \mathbb{R}^3 ed in caso affermativo se ne determini un potenziale.

Esercizio 3. Sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-2y}{x^2 + y^2}, \frac{2x}{x^2 + y^2} \right).$$

Calcolare il lavoro di \mathbf{F} lungo il grafico della parabola $\gamma : y = x^2 - 1, x \in [-1, 1]$, orientata per x crescente.

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{e^x + 2xy}{3 - x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Si associ ad esso la seguente forma differenziale

$$w(x, y) = (e^x + 2xy)dx + (x^2 - 3)dy,$$

si mostri che è esatta e si determini la soluzione del problema di Cauchy tramite una curva di livello del potenziale.

Esercizio 5. Seguendo lo stesso procedimento dell'Esercizio 4, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{3x^2 + y}{3y^2 + x}, \\ y(0) = 3, \end{cases}$$

e si studi qualitativamente il grafico della soluzione.

Esercizio 6. Sia S la superficie di rivoluzione ottenuta ruotando di 360 gradi attorno all'asse z il profilo di una funzione $x = f(z)$ di classe \mathcal{C}^1 in un intervallo I . Dimostrare che l'area della superficie è data dalla formula

$$|S| = 2\pi \int_I |f(z)| \sqrt{1 + (f'(z))^2} dz$$