ANALISI FUNZIONALE **Scritto del 24 gennaio 2011**

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale complesso $X = C^1([-1,1])$ delle funzioni definite in $[-1,1]$ a valori in $\mathbb{C}$, continue e derivabili con derivata f' continua.

a) Introdurre una norma in X che lo renda spazio di Banach.

b) Sia ora Y lo spazio prodotto $\mathbb{C}\times C^0([-1,1])$ e si consideri l'applicazione $L : X \to Y$ definita da $L(f) = (f(0), f')$. Introdurre una norma su Y e studiare linearità e continuità di L.

c) L'operatore L è un isomorfismo fra i due spazi X e Y? È un'isometria?

Esercizio 2. Sia Ω un aperto qualunque di $\mathbb{R}^N$ e siano $f \in L^3(\Omega)$ e $g \in L^5(\Omega)$. Si chiede se

a) il prodotto fg appartiene ad $L^1(\Omega)$?

b) esiste un $p \in (1,\infty]$ tale che $fg \in L^p(\Omega)$?

Motivare per bene le risposte date.

Domanda 3. Enunciare e dimostrare un corollario del Teorema di Hahn-Banach oppure una forma geometrica dello stesso teorema, a vostra scelta.

Esercizio 4. Indicati con ℓ^p, $1 \le p < \infty$, ed ℓ^∞ gli usuali spazi di successioni reali $a = (a_1, a_2, \ldots)$ tali che

$$\|a\|_p := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{1/p} < +\infty, \qquad \|a\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty$$

e con c_0 il sottospazio di ℓ^∞ delle successioni infinitesime, sia $T : \ell^p \to \ell^\infty$ l'applicazione definita da

$$(Ta)_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k.$$

a) Per quali $p \in [1,\infty)$ l'applicazione T è ben definita, lineare e continua? Per questi valori di p calcolare la norma di T in $\mathcal{L}(\ell^p, \ell^\infty)$.

b) Provare che T è iniettiva.

c) Provare che $T(\ell^1)$ è strettamente contenuta in c_0 e contiene strettamente ℓ^1.

d) Verificare che l'applicazione $S := T^{-1}|_{\ell^1}$, definita dunque come l'inversa di T ristretta a ℓ^1, è un elemento di $\mathcal{L}(\ell^1, \ell^1)$ e calcolarne la norma.

Domanda 5. Parlare di convergenze deboli e deboli* per successioni: proprietà e implicazioni varie, legami con limitatezza, cosa succede negli spazi $L^p(\Omega)$.

Domanda 6. Definizione di spazio separabile, separabilità o meno degli spazi $L^p(\Omega)$, legami fra separabilità di V e del suo spazio duale.

Esercizio 7. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e continua tale che $\varphi(t) + 2t + 3 \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia inoltre Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ e si definisca la funzione $\Phi : L^1(\Omega) \to (-\infty, +\infty]$ in questo modo

$$\Phi(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \varphi(u(x))\, dx & \text{se } \ \varphi(u) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

a) Provare che Φ è propria, convessa e semicontinua inferiormente in $L^1(\Omega)$ rispetto alla topologia indotta dalla norma [**Suggerimento:** se $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$ allora esiste una successione estratta $\{u_{n_k}\}$ tale che ...]

b) Dare un esempio di φ che verifica le ipotesi e per la quale

$$\Phi \ \text{ ammette minimo in } \ L^1(\Omega) \ \text{ e tale minimo è unico.}$$

Domanda 8. Enunciare il Teorema dell'applicazione aperta, commentarlo e discutere qualche conseguenza di questo risultato.

Esercizio 9. Posto $V = L^2(-\pi, \pi)$, sia $L : V \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e continuo tale che $\langle L, u \rangle = 0$ per ogni $u \in V$ dispari (cioè, per ogni elemento $u \in V$ che ammette come rappresentante una funzione dispari). Dimostrare che esiste una e una sola $w \in V$ tale che

$$w \text{ è pari} \qquad \text{e inoltre} \qquad \langle L, v \rangle = \int_{(-\pi,\pi)} w(x) v(x)\, dx \quad \forall v \in V.$$

Domanda 10. Spazi riflessivi e isomorfismo canonico; accennare poi e confrontare con spazi strettamente convessi e spazi uniformemente convessi.