ANALISI FUNZIONALE **Scritto del 13 gennaio 2012**

Esercizio 1. Siano X e Y due spazi normati con norme $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$ rispettivamente, e si supponga che $X \subseteq Y$. Si dice che X è immerso in modo compatto in Y se

(1) l'immersione di X in Y è continua, cioè esiste una costante C tale che $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ per ogni $x \in X$;

(2) qualsiasi sottoinsieme limitato in X è precompatto in Y, cioè qualsiasi successione a valori in tale insieme limitato possiede una sottosuccessione che è di Cauchy nella norma $\|\cdot\|_Y$.

Indicato con $Y = \ell^2$ l'usuale spazio di successioni complesse $v = (v_1, v_2, \ldots)$ tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|^2 < +\infty,$$

a) si consideri lo spazio $X := \{v \in \ell^2 : \quad v_n = 0 \quad \forall\, n \geq 15\}$. Posto $\|v\|_X := \max_{n\in\mathbb{N}} |v_n|$ per ogni $v \in X$, osservare che $(X, \|\cdot\|_X)$ è uno spazio di Banach e dimostrare che X è immerso in modo compatto in Y;

b) se ora invece $X := \left\{v \in \ell^2 : \quad v_n = 0 \quad \text{per } n \text{ pari}\right\}$ con la norma indotta da Y, provare che X **non** è immerso in modo compatto in Y.

Esercizio 2. Si indichi con c lo spazio delle successioni reali $x = (x_1, x_2, \ldots)$ convergenti munito della norma $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Sia inoltre c_3 il sottoinsieme di c costituito da tutte le successioni $x = (x_1, x_2, \ldots)$ tali che $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$.

a) Descrivere la struttura di c_3 dal punto di vista vettoriale.

b) Costruire un esempio di funzionale lineare e continuo $f : c \to \mathbb{R}$ che assuma valore costante su tutti gli elementi di c_3, cioè tale che esista $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\langle f, x\rangle = \alpha$ per tutti gli $x \in c_3$.

c) Calcolare $\|f\|_*$ dove f è il funzionale trovato al punto b).

d) Dare un esempio di due sottoinsiemi convessi **infiniti** di c che sono separati dall'insieme c_3.

Esercizio 3. Posto $\Omega = \mathbb{R}^N$, si definisca la funzione $\varphi : L^2(\Omega) \to (-\infty, +\infty]$ in questo modo

$$\varphi(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |u(x)|dx & \text{se } u \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

a) Provare che φ è propria, convessa e semicontinua inferiormente in $L^2(\Omega)$.

b) Utilizzando l'identificazione di Riesz $L^2(\Omega)' \cong L^2(\Omega)$, individuare la funzione convessa **coniugata** $\varphi^* : L^2(\Omega) \to (-\infty, +\infty]$.

Esercizio 4. Per $1 \le p \le \infty$, $n \ge 1$, $f \in L^p(\mathbb{R})$ sia

$$a_n(f) = \int_{\mathbb{R}} |x| f(x) e^{-nx^2} dx$$

e si consideri l'applicazione $A : f \mapsto (a_1(f), a_2(f), \ldots)$.

a) Dimostrare che A è un operatore lineare limitato da $L^p(\mathbb{R})$ in ℓ^∞ per ogni $p \in [1, \infty]$.

b) Trovare il valore di $\|A\|$ nel caso $p = \infty$.

c) Dare un esempio di $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ per cui $Ah \notin \ell^1$. Fissata questa h (quella che avete scelto), trovare tutti i $q \in (1, \infty]$ tali che $Ah \in \ell^q$.

d) Dimostrare che se $Af \in \ell^2$ e $Ag \in \ell^2$, allora

$$(Af, Ag)_{\ell^2} = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) g(y) \frac{|xy|}{1 - e^{-(x^2+y^2)}} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy.$$

Esercizio 5. Per $1 \le p < \infty$ si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^{1/p} e^{-n|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Dimostrare che $f_n \in L^q(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $q \in [1, \infty]$.

b) Studiare la convergenza q.o. di f_n in $\mathbb{R}$.

c) Provare che la successione $\{f_n\}$ è limitata in $L^p(\mathbb{R})$.

d) Discutere la convergenza forte di $\{f_n\}$ in $L^p(\mathbb{R})$.

e) Discutere la convergenza debole di $\{f_n\}$ in $L^p(\mathbb{R})$, distinguendo i due casi $p = 1$ e $1 < p < \infty$.

Domanda 1. Funzionale di Minkowski e sue proprietà per un convesso aperto che contiene lo 0. Teorema di Hahn-Banach prima forma geometrica come applicazione. Riportare almeno una dimostrazione.

Domanda 2. Esistenza del minimo per funzioni semicontinue inferiormente e/o convesse. Riportare almeno una dimostrazione.

Domanda 3. Spazi riflessivi e spazi separabili, definizioni. Legami tra separabilità di uno spazio e quella del suo duale. Riflessività e separabilità (o meno) degli spazi $L^p(\Omega)$, dove Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$. Riportare almeno una dimostrazione.

Domanda 4. Lemma di Baire e teorema di Banach-Steinhaus, con dimostrazioni.

Domanda 5. Teorema di Lions-Stampacchia e corollario di Lax-Milgram, con dimostrazioni.