ANALISI FUNZIONALE **Scritto del 15 gennaio 2013**

Domanda 1. Teorema di Banach-Steinhaus e suoi corollari. Riportare almeno una dimostrazione.

Domanda 2. Funzioni convesse proprie e semicontinue inferiormente: definizioni, funzione indicatrice, prolungamenti a $+\infty$, funzioni convesse coniugate, calcolo di qualche coniugata, teorema di Fenchel-Moreau. Riportare almeno una dimostrazione.

Esercizio 1. Si consideri lo spazio c_0 delle successioni $u = (u_1, u_2, \ldots)$ reali e infinitesime, munito della norma $\|u\|_{c_0} := \sup\{|u_k|,\ k \in \mathbb{N}\}$. Sia $a = (a_1, a_2, \ldots)$ una successione reale tale che $a_1 > 0$, $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 2$, e inoltre

$$\text{la serie } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge e ha per somma 1.}$$

a) Provare che il funzionale $F : c_0 \to \mathbb{R}$, $F(u) := \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$, è lineare e limitato.

b) Calcolare $\|F\|_{(c_0)'}$.

c) Si consideri l'operatore lineare e limitato $P : c_0 \to c_0$ definito da

$$(P(u))_1 = \frac{F(u)}{a_1} - u_1, \qquad (P(u))_k = u_k \text{ per ogni } k \geq 2.$$

Stabilire se P è iniettivo e/o suriettivo.

d) Calcolare $P^*(F)$, dove $P^* : (c_0)' \to (c_0)'$ è l'operatore aggiunto di P.

Esercizio 2. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Si consideri la successione di funzioni

$$u_n(x) = u(x - n), \text{ per } x \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Siano inoltre p, q tali che $1 \leq p \leq \infty$, $1 < q < \infty$ e ricordiamo infine che $C^0_c(\mathbb{R})$ è denso in $L^r(\mathbb{R})$ se $1 \leq r < \infty$.

a) Provare che se $u \in L^p(\mathbb{R})$ allora $u_n \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e inoltre la successione $\{u_n\}$ è limitata in $L^p(\mathbb{R})$.

b) Mostrare che se $u \in L^q(\mathbb{R})$ allora $u_n \to 0$ debolmente in $L^q(\mathbb{R})$.

c) Mostrare che se $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ allora $u_n \to 0$ debolmente star in $L^\infty(\mathbb{R})$.

d) Se u è la funzione caratteristica dell'intervallo $(0, 1)$, provare che nessuna sottosuccessione di $\{u_n\}$ converge debolmente a 0 in $L^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni reali definite sull'intervallo aperto $\Omega = (0,1)$ e tali che

$$f_n \in L^2(\Omega) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad f_n \to f \quad \text{q.o. in } \Omega. \tag{1}$$

a) Costruire un esempio di successione $\{f_n\}$ che soddisfa (**??**) e per la quale la funzione limite f non appartiene a $L^2(\Omega)$.

b) Posto

$$C = \left\{ g : \Omega \to \mathbb{R} \text{ misurabile } : \quad \int_\Omega \frac{1}{x}\, |g(x)|^2 dx \leq 1 \right\},$$

provare che C è un convesso chiuso di $L^2(\Omega)$.

c) Se la successione $\{f_n\}$ di (**??**) verifica $f_n \in C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, mostrare che esiste una successione estratta $\{f_{n_k}\}$ che converge debolmente in $L^2(\Omega)$.

d) Nelle stesse condizioni di c), provare che f_{n_k} converge debolmente alla funzione f in $L^2(\Omega)$ per $k \to \infty$.

e) Se $f_n \in C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $f_n \to f$ q.o. in Ω, dimostrare che tutta la successione f_n converge debolmente a f in $L^2(\Omega)$ per $n \to \infty$.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio $H^1_0(-2,2)$ delle funzioni v reali (ed assolutamente continue sull'intervallo $[-2,2]$) che si annullano in -2 e 2, e ammettono derivata debole v' in $L^2(-2,2)$. Sia inoltre ψ una funzione assegnata in $L^2(-2,2)$ tale che

$$\psi(x) + |x| \leq 2 \qquad \text{per q.o. } \ x \in (-2,2).$$

a) Definito l'insieme

$$K = \left\{ v \in H^1_0(-2,2) : \ \ v(x) \geq \psi(x) \ \text{ per q.o. } \ x \in (-2,2) \right\},$$

provare che K è non vuoto, convesso e chiuso in $H^1_0(-2,2)$.

b) Dimostrare che il problema di minimo

$$\text{trovare } u \in K \text{ tale che } \quad \int_{(-2,2)} |u'(x)|^2 dx \leq \int_{(-2,2)} |v'(x)|^2 dx \quad \forall\, v \in K \tag{2}$$

ammette un'unica soluzione u.

c) La soluzione u di (**??**) è anche soluzione di un'equazione o una disequazione variazionale?

d) Possiamo tentare di indovinare la soluzione u di (**??**) nel caso in cui ψ è la funzione caratteristica di $[-1,1]$? Trovata una candidata, controllare che effettivamente la candidata risolva il nostro problema.