ANALISI FUNZIONALE

Prova scritta del 24 gennaio 2014

Svolgere **una sola** domanda di teoria e **non più di 3** esercizi. Rispondere in modo soddisfacente alla domanda di teoria e svolgere in modo completo 2 esercizi è sufficiente per ottenere il massimo dei voti.

Esercizio 1. Sia $u : [0, +\infty) \to (0, 1)$ una funzione non crescente, di classe C^1 e tale che $\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} u'(x) = 0$. Si ponga $u_n(x) := u^n(x)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (nel primo caso fornire una dimostrazione, nel secondo caso un controesempio):

(a) La successione u_n tende a 0 in $L^\infty(0, +\infty)$.

(b) La successione u_n tende a 0 in $W^{1,\infty}(0, +\infty)$.

(c) Esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $u_n \in L^1(0, +\infty)$.

(d) Se $u \in L^{35}(0, +\infty)$, allora $u_n \in W^{1,1}(0, +\infty)$ almeno per n sufficientemente grande ed inoltre u_n tende a 0 in $W^{1,1}(0, +\infty)$.

Esercizio 2. Sia dato lo spazio di Hilbert $H = L^2(-1, 1)$ munito degli usuali prodotto scalare e norma. Si consideri l'operatore lineare non limitato

$$A : D(A) \to H, \qquad Au = u', \tag{1}$$

dove u' è la derivata debole di u e il dominio di A, $D(A) \subset H$, è definito da

$$D(A) = \big\{u \in H^1(-1, 1) : \ u(-1) = 0\big\}. \tag{2}$$

(a) Dimostrare che A è chiuso e di dominio denso.

(b) Determinare il dominio $D(A^*)$ e l'espressione analitica dell'operatore aggiunto $A^* : D(A^*) \to H$.

(c) Sia $v \in H$. Dimostrare che $v \in H^1(-1, 1)$ se e solo se valgono (tutte e tre) le seguenti proprietà:

$$v \in C^0([-1, 1]), \qquad v|_{(-1,0)} \in H^1(-1, 0), \qquad v|_{(0,1)} \in H^1(0, 1).$$

(d) Rispondere alle domande (a) e (b) nel caso in cui (2) sia sostituita da

$$D(A) = \big\{u \in H^1(-1, 1) : \ u(0) = 0\big\}. \tag{3}$$

Esercizio 3. Per ogni $\alpha \in [0, +\infty)$ e per ogni $p \in [1, \infty)$ si definisca lo spazio di Banach

$$\ell^p_\alpha := \Big\{a = (a_n) : \|a\|^p_{\alpha,p} := \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha |a_n|^p < \infty\Big\}.$$

Analogamente, per $\alpha \in [0, +\infty)$ e $p = \infty$ si ponga

$$\ell^\infty_\alpha := \big\{ a = (a_n) : \|a\|_{\alpha,\infty} := \sup_n (n^\alpha |a_n|) < \infty \big\}.$$

(a) È vero che $\ell^2_2 \subset \ell^1$?
(b) È vero che $\ell^2_1 \subset \ell^1$?
(c) Determinare tutte le coppie (α, p) tali che $\ell^p_\alpha \subset \ell^1$.
(d) Dimostrare che le immersioni al punto (c), quando valgono, sono continue.

Esercizio 4. Sia $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $g(r) = (r-1)^2$. Si definisca il funzionale J nel seguente modo:

$$J(u) := \begin{cases} \int_0^1 g(u(x))\,\mathrm{d}x & \text{se } u \geq 0 \text{ q.o. e } \int_0^1 g(u(x))\,\mathrm{d}x < +\infty, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{4}$$

(a) Discutere la semicontinuità inferiore e la continuità di $J : L^2(0,1) \to (-\infty, +\infty]$.
(b) Dire se $J : L^1(0,1) \to (-\infty, +\infty]$ è semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole di $L^1(0,1)$.
(c) Rispondere alle domande (a) e (b) sostituendo (4) con la seguente

$$J(u) := \begin{cases} \int_0^1 g(|u(x)|)\,\mathrm{d}x & \text{se } \int_0^1 g(|u(x)|)\,\mathrm{d}x < +\infty, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{5}$$

Domanda I. Topologia debole e convergenza debole negli spazi di Banach.

Domanda II. Proprietà dello spazio L^1.

Domanda III. Applicazioni del Teorema di Hahn-Banach.