Consideriamo una funzione $j : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ convessa, semicontinua inferiormente e propria e definiamo il funzionale

$$\Phi : L^2(\Omega) \to [0, +\infty], \quad \Phi(u) = \int_\Omega j(u(x))\, \mathrm{d}x, \tag{1}$$

ove si intende che $\Phi(u) = +\infty$ nel caso in cui $j(u)$ non è sommabile. Qui Ω è un aperto, non necessariamente limitato, di $\mathbb{R}^N$ e, per semplicità, supponiamo che $j(0) = 0$. Vogliamo dimostrare che il funzionale coniugato $\Phi^* : L^2(\Omega) \to [0, +\infty]$ (notare che la positività di Φ^* è conseguenza dell'ipotesi $j(0) = 0$) ha l'espressione

$$\Phi^*(u) = \int_\Omega j^*(u(x))\, \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Sia $u \in L^2(\Omega)$. È allora facile verificare che, per ogni $v \in L^2(\Omega)$ si ha, q.o. in Ω, $j^*(u(x)) \geq u(x)v(x) - j(v(x))$, da cui, integrando e passando all'estremo superiore rispetto a v,

$$\Phi^*(u) \leq \int_\Omega j^*(u(x))\, \mathrm{d}x. \tag{3}$$

L'obbiettivo è dunque quello di mostrare la disuguaglianza inversa. A questo scopo, per ogni $\delta > 0$, definiamo

$$j_\delta(r) := j(r) + \frac{\delta}{2} r^2, \quad \Phi_\delta(u) = \int_\Omega j_\delta(u(x))\, \mathrm{d}x.$$

Sia data $u \in L^2(\Omega)$ e sia $\varepsilon > 0$. Allora, per (quasi) ogni $x \in \Omega$, possiamo scegliere un valore $v(x)$ tale che

$$u(x)v(x) - j_\delta(v(x)) \geq j_\delta^*(u(x)) - \frac{\varepsilon}{(1 + |x|)^{N+1}}. \tag{4}$$

Utilizzando il fatto che $u \in L^2$ si può dimostrare (per esempio procedendo per regolarizzazione di u) che il valore $v(x)$ può essere scelto in modo tale che la risultante funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ sia misurabile.

Ora, la (4) può essere riscritta nella forma

$$j(v(x)) + \frac{\delta}{2}|v(x)|^2 \leq u(x)v(x) - j_\delta^*(u(x)) + \frac{\varepsilon}{(1 + |x|)^{N+1}} \leq \frac{\delta}{4}|v(x)|^2 + \frac{1}{\delta}|u(x)|^2 + \frac{\varepsilon}{(1 + |x|)^{N+1}}, \tag{5}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la disuguaglianza di Young. Integrando su Ω e utilizzando la sommabilità dell'ultimo addendo deduciamo allora che, a δ fissato, v (che ovviamente dipende da δ) appartiene a $L^2(\Omega)$.

Integrando su Ω la (4) abbiamo allora

$$\begin{aligned} \int_\Omega j_\delta^*(u(x))\, \mathrm{d}x &\leq \int_\Omega \big(u(x)v(x) - j_\delta(v(x))\big)\, \mathrm{d}x + c\varepsilon \\ &\leq (u, v)_{L^2} - \int_\Omega j(v(x))\, \mathrm{d}x + c\varepsilon = (u, v)_{L^2} - \Phi(v) + c\varepsilon \leq \Phi^*(u) + c\varepsilon \end{aligned} \tag{6}$$

dove abbiamo usato il fatto che $j_\delta \geq j$. Ora, per $\delta \searrow 0$, si ha che $j_\delta \searrow$. Conseguentemente, $j_\delta^* \nearrow$. Inoltre non è difficile verificare che j_δ^* tende puntualmente a j^*.

Dunque, per $\delta \searrow 0$, si può applicare il teorema di Beppo Levi in (6), che fornisce

$$\int_\Omega j^*(u(x))\, \mathrm{d}x = \lim_{\delta \searrow 0} \int_\Omega j_\delta^*(u(x))\, \mathrm{d}x \leq \Phi^*(u) + c\varepsilon,$$

da cui otteniamo la disuguaglianza opposta a (3) per arbitrarietà di ε.