ANALISI MATEMATICA 3

Scritto del 5 settembre 2019

Esercizio 1. Sia $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e si supponga che f soddisfi le seguenti proprietà:

$$f(y) \neq 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{R},$$
$$\exists\, \epsilon > 0 : \quad \liminf_{y \nearrow +\infty} \frac{|f(y)| + |f(-y)|}{y^2} > \epsilon$$

(in particolare è possibile che il $\liminf$ valga $+\infty$). Dimostrare, possibilmente in modo rigoroso, che non esiste alcun elemento $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che la soluzione massimale del problema di Cauchy (bilaterale)

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

abbia come dominio tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = 3y, \\ y' = 3x + 8y. \end{cases}$$

Studiare l'andamento qualitativo delle traiettorie e determinare, in forma implicita, l'equazione delle orbite.

Esercizio 3. (a) Determinare almeno una funzione $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che la funzione

$$u(x,y) = x^3(1+y) - x\gamma(y) \tag{1}$$

sia armonica su $\mathbb{R}^2$ (verifichi cioè $\Delta u = 0$).

(b) Per tale γ determinare inoltre un'armonica coniugata di v, ovvero una funzione $v(x,y)$ tale che $f(z) = f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy)$ sia olomorfa, dove, come sempre, si è identificato il punto $z = x+iy$ di $\mathbb{C}$ col punto (x,y) di $\mathbb{R}^2$. Determinare infine la risultante espressione di f in termini della variabile complessa z.

(c) Determinare *tutte* le funzioni γ tali che la u definita da (1) sia armonica.

Esercizio 4. Si definisca, laddove ha senso, la successione di funzioni

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(z^{2k} + z^{2k+1})(2k)!}$$

della variabile complessa z. Calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_{1/2}(0)} s_n(z) \, \mathrm{d}z,$$

ove $C_{1/2}(0)$ rappresenta la circonferenza di raggio $1/2$ centrata in 0 percorsa una volta in senso antiorario, giustificando la risposta data alla luce della teoria.