

## ANALISI MATEMATICA 3

Scritto del 14 febbraio 2019

**Esercizio 1 (doppio).** Studiare il comportamento qualitativo delle soluzioni dell'equazione

$$y' = |ty| + \frac{1}{y}.$$

discutendo in particolare la regolarità e l'eventuale presenza di flessi. Determinare inoltre una formula risolutiva.

**Esercizio 2.** Calcolare, utilizzando almeno in parte metodi di variabile complessa,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^{1/2}}{(x^2 + 1)} dx.$$

**Esercizio 3.** Sia  $\Omega = B(0, 1)$  e si ricordi che si dice che  $h \in \mathcal{H}(\Omega)$  “ha primitiva in  $\Omega$ ” se esiste  $H \in \mathcal{H}(\Omega)$  tale che  $H'(z) = h(z)$  per ogni  $z \in \Omega$ . Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (nel primo caso fornire una dimostrazione, nel secondo un controesempio):

- (a) Se  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  allora  $g(z) := f(z^2)$  ha primitiva in  $\Omega$ .
- (b) Se  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  allora  $g(z) := f(z^2)/z^5$  ha primitiva in  $\Omega \setminus \{0\}$ .
- (c) Se  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  allora  $g(z) := f(z^2)/z^2$  ha primitiva in  $\Omega \setminus \{0\}$ .
- (d) Se  $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{0\})$  allora  $g(z) := f(z^3)/z^2$  ha primitiva in  $\Omega \setminus \{0\}$ .
- (e) Se  $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{0\})$  ha primitiva in  $\Omega \setminus \{0\}$  allora  $g(z) := f(z^2)/(z - 1/2)^2$  ha primitiva in  $\Omega \setminus \{0, 1/2\}$ .