Prova scritta di Istituzioni di Matematiche

20 Settembre 2005

!! Tempo a disposizione 2h e 30'.

Esercizio 1 (12 punti). Studiare la funzione

$$y(x) = \begin{cases} -3 & \text{se } x = 0, \\ \dfrac{x^2}{2}\big(6\log|x| - 9\big) - 3 & \text{se } x \neq 0, \end{cases}$$

discutendone campo d'esistenza, *proprietà di simmetria*, numero di intersezioni con gli assi, limiti, eventuali asintoti, monotonia, massimi, minimi, concavità, convessità e flessi. Se ne tracci poi il grafico qualitativo. *Non è richiesta* la determinazione precisa degli zeri di $y(x)$.

▫ ▫ ▫ □ □ ▫ ▫ ▫

Esercizio 2 (9 punti). Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x + \log\left(1 + x^{4/3}\right)}{\sin 2x + x^3}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{3}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3^x + 1}{e^x + x\cos x},$$

▫ ▫ ▫ □ □ ▫ ▫ ▫

Esercizio 3 (7 punti). Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-y + \arctan t}{t^2 + 1}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

▫ ▫ ▫ □ □ ▫ ▫ ▫

Esercizio 4 (8 punti). Determinare il carattere delle seguenti serie al variare del parametro α nell'intervallo indicato:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left[\sin\frac{1}{n}\right]^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos\alpha)^n}{n}, \qquad \alpha \in [0, \pi].$$